Tentamen vår 2021 (LF)

onsdag 19. mai 2021 16:41

Oppgave 1

a) $f(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 3\cdot 3x^2 - 4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{9x^2 - 4 - \frac{1}{x^2}}}$$

b) $g(x) = \underbrace{3x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}$

$$g'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$= 6x\cdot \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 6x\cdot \ln x + 3x$$

$$= \underline{\underline{3x(2\ln x + 1)}}$$

c) $h(x) = \sqrt{\underbrace{4x^2-5}_{u}}$

$$h'(x) = h'(u)\cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-5}}\cdot 8x = \underline{\underline{\frac{4x}{\sqrt{4x^2-5}}}}$$

Oppgave 2

a) $$\frac{3x}{x^2-x-2} - \frac{2x}{x+1} - \frac{2}{x-2}$$

$$= \frac{3x}{(x+1)(x-2)} - \frac{2x\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-2)} - \frac{2\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x+1)}$$

$$= \frac{3x - 2x(x-2) - 2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x - 2x^2 + 4x - 2x - 2}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-2x^2+5x-2}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-2(x-\frac{1}{2})\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x+1}{x+1}}}$$

Finner nullpunktene til $-2x^2+5x-2$ for å faktorisere:

$$-2x^2+5x-2=0$$

$$x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-4}$$

$$= \frac{-5\pm\sqrt{9}}{-4} = \underline{\frac{-5\pm 3}{-4}}$$

Gir $x_1 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$

Dermed er

$-2x^2+5x-2 = \underline{-2(x-\frac{1}{2})(x-2)}$

b) $\ln(a\cdot b^2) - 8\ln b + 2\ln a^3 - 3\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$

$= \ln a + \ln b^2 - 8\ln b + 2\cdot 3 \ln a - 3(\ln a^2 - \ln b^2)$

$= \ln a + 2\ln b - 8\ln b + 6\ln a - 6\ln a + 6\ln b$

$= \underline{\underline{\ln a}}$

Oppgave 3

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$

a) Hvis $\vec{a} \perp \vec{b}$, må $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Sjekker: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\cdot(-1) + 1\cdot 3 = -4+3 = \underline{-1}$

Siden $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, er $\vec{a}$ ikke $\perp$ på $\vec{b}$.

b) Ønsker $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \\ 3s \end{bmatrix}$$

Gir likningssettet:

$\text{I}: \; 4 = 4r - s$

$\text{II}: \; 14 = r + 3s$

Ganger I med 3 og adderer:

$\text{I}: \; 12 = 12r - 3s$

$\text{II}: \; 14 = r + 3s$

$\text{I} + \text{II}: \; 26 = 13r$

$\boxed{r = 2}$

Setter $r = 2$ inn i I:

$4 = 4r - s$

$4 = 4\cdot 2 - s$

$4 = 8 - s \Rightarrow \boxed{s = 4}$

Løsning: $\underline{\underline{r = 2 \text{ og } s = 4}}$

Oppgave 4

A: Produserer 40% , 20% av disse er feil (F)

B: Produserer 60% , 10% av disse er feil (F)

Gir: $P(A) = 0{,}40$ $\quad P(F \mid A) = 0{,}20$

$P(B) = 0{,}60$ $\quad P(F \mid B) = 0{,}10$

a) $P(\text{"Feil på deksel"}) = P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$

$= P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid A)$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}60 \cdot 0{,}10$$

$$= 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14 = \underline{\underline{14\%}}$$

b) $$P(\text{"produsert av A hvis feil"}) = P(A \mid F) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}20}{0{,}14}$$

$$= \frac{0{,}08}{0{,}14} = \frac{8}{14} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}} \quad (\approx 0{,}57 = 57\%)$$

(Oppgaven kan også løses vha. krysstabell:

	Feil	Ikke feil	Sum
A	8%	32%	40%
B	6%	54%	60%
Sum	14%	86%	100%

svaret på a), og $\frac{8\%}{14\%} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ som svaret på b)

Oppgave 5

$f(x) = x^3 - 14x + 15$

a) Finner koordinatene til topp/bunn ved å sette $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 14$$

$$3x^2 - 14 = 0 \implies 3x^2 = 14 \implies x^2 = \frac{14}{3}$$

Gir $\underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}}}$

Ser fra grafen at den negative er for toppunktet og den positive for bunnpunktet.

b) For å løse $f(x) > 0$ ønsker jeg å faktorisere $f(x)$.

Ser at $f(3) = 0$, dermed er $f(x)$ delelig med $(x-3)$.

Utfører divisjonen:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 14x + 15) : (x - 3) = \underline{x^2 + 3x - 5} \\
\underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
\quad 3x^2 - 14x + 15 \\
\quad \underline{-(3x^2 - 9x)} \\
\qquad -5x + 15 \\
\qquad \underline{-(-5x + 15)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dermed er $f(x) = (x^2 + 3x - 5)(x - 3)$

Finner nullpunktene til

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

• Da har $f(x)$ nullpunkter i

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

- Da har $f(x)$ nullpunkter i

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \quad \text{og} \quad x_3 = 3$$

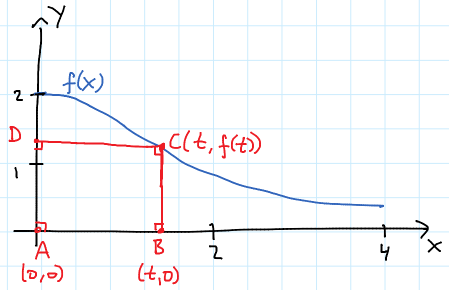
- Fra grafen ser vi at $f(x) > 0$ mellom x_1 og x_2, og etter x_3.

- Løsningen blir dermed

$$\underline{\underline{x \in \left\langle \frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \right\rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}$$

Oppgave 6

$f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$, $x > 0$



Arealet av rektangelet er gitt ved

$$A(t) = \underset{\text{lengde}}{t} \cdot \underset{\text{bredde}}{f(t)}$$

$$= t \cdot \frac{8}{t^2+4} = \frac{8t}{t^2+4}$$

- Finner det største arealet ved å finne toppunktet til $A(t)$ ved derivasjon:

$$A'(t) = \left(\frac{8t}{t^2+4}\right)'$$

Brøkregelen: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{8\cdot(t^2+4) - 8t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{8t^2 + 32 - 16t^2}{(t^2+4)^2} = \frac{-8t^2+32}{(t^2+4)^2}$$

- Nevneren er alltid positiv, så toppunktet er der telleren er 0:

$$-8t^2 + 32 = 0 \Rightarrow 8t^2 = 32$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

- $t = -2$ er utenfor definisjonsområdet, så det maksimale arealet vil inntreffe når $\underline{\underline{t = 2}}$

(Kan og kontrollere at $f'(x)$ endrer fortegn her, men det er egentlig åpenbart fra figuren at dette må være et toppunkt)

Oppgave 7

$\square ABCD$. $AB = 3$ cm, $AC = 10$ cm, $CD = 9$ cm

$\angle ADC = 90°$ og $\angle BAC = 75°$

Konstruksjon:

1. Setter av linjestykket $AB = 3$ cm

2. Konstruerer 75° i A ved å først konstruere både en 90° og en 60°, og halverer mellom disse.

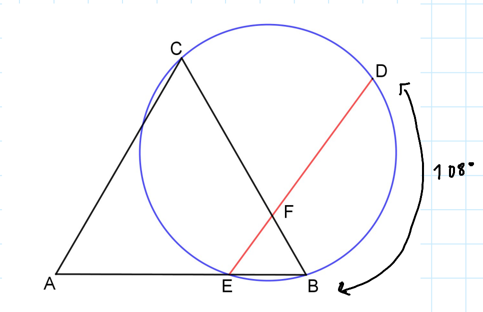
3. Slår en bue om A på 10 cm, skjæringspunktet med vinkelen på 75° danner punkt C.

4. Finner midtpunktet på AC ved å danne en midtnormal. Slår en halvsirkel om AC.

5. Punkt D må ligge på halvsirkelen, siden $\angle ADC = 90°$ (Tales' setning)
Slår en bue om C på 9 cm for å finne D.

6. $\square ABCD$ er konstruert.

Oppgave 8



a) $\angle BED$ er en periferivinkel over buen BD. Den er dermed halvparten av buen/sentralvinkelen.

Ergo er $\underline{\underline{\angle BED = 54°}}$

b) $\angle CFD = \angle BFE$ (toppvinkler)

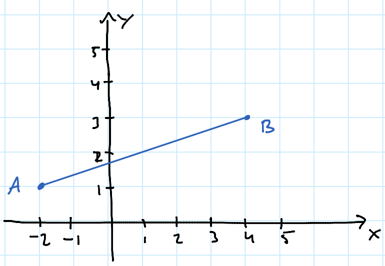
Vet at i $\triangle EBF$ er $\angle E = 54°$,
og $\angle B = 60°$ (siden $\triangle ABC$ er likesidet).

Dermed er $\angle F = 180° - 60° - 54°$
$= 180° - 114° = 66°$.

Ergo er også $\underline{\underline{\angle CFD = 66°}}$

Oppgave 9

Linje ℓ gjennom $A(-2, 1)$ og $B(4, 3)$.



a) Parameterfremstilling gitt ved

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Bruker startpunkt A, så $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Ser fra figuren at retningsvektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, som gir

$$\ell: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

b) Skjæring med x-aksen: Der $y = 0$.

$$y = 1 + 2t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\tfrac{1}{2}}$$

Setter inn i $x = -2 + 6t = -2 + 6 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = -2 - 3 = \underline{\underline{-5}}$

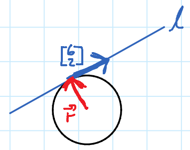
Skjæring med y-aksen: Der $x = 0$.

$$x = -2 + 6t = 0 \Rightarrow \boxed{t = \tfrac{1}{3}}$$

Setter inn i $y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{3} = 1 + \tfrac{2}{3} = \underline{\underline{\tfrac{5}{3}}}$

c) Sirkel, sentrum i $S(1,0)$ og tangerer l.

Om sirkelen tangerer l, må vektoren fra sentrum til tangeringspunktet stå vinkelrett på retningen til l:



$$\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Kaller tangeringspunktet (x, y), da er $\vec{r} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$

Det gir $\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (x-1) \cdot 6 + y \cdot 2 = 0$

$$\boxed{6x - 6 + 2y = 0}$$

Punktet som oppfyller denne likningen må også ligge på l, og oppfylle $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Setter inn for å finne t:

$$6 \cdot (-2 + 6t) - 6 + 2(1 + 2t) = 0$$
$$-12 + 36t - 6 + 2 + 4t = 0$$
$$40t = 16$$
$$t = \tfrac{16}{40} = \tfrac{4}{10} = \underline{\tfrac{2}{5}}$$

Setter inn $t = \tfrac{2}{5}$ for å finne punktet:

$$x = -2 + 6t = -2 + 6 \cdot \tfrac{2}{5} = -2 + \tfrac{12}{5} = -\tfrac{10}{5} + \tfrac{12}{5} = \underline{\tfrac{2}{5}}$$

$$y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot \tfrac{2}{5} = 1 + \tfrac{4}{5} = \underline{\tfrac{9}{5}}$$

Tangerer altså i $(\tfrac{2}{5}, \tfrac{9}{5})$

Lengden av $\vec{r}$ gir radien. $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2/5 - 1 \\ 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-\tfrac{3}{5})^2 + (\tfrac{9}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{9}{25} + \tfrac{81}{25}} = \sqrt{\tfrac{90}{25}} = \sqrt{\tfrac{18}{5}} = \sqrt{\tfrac{9 \cdot 2}{5}} = \underline{\underline{3\sqrt{\tfrac{2}{5}}}}$$