Oppgave

Sirkelen $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ går gjennom origo.
Finn de to punkter på periferien som sammen med origo danner hjørnene i en likesidet trekant.

Løsningsforslag

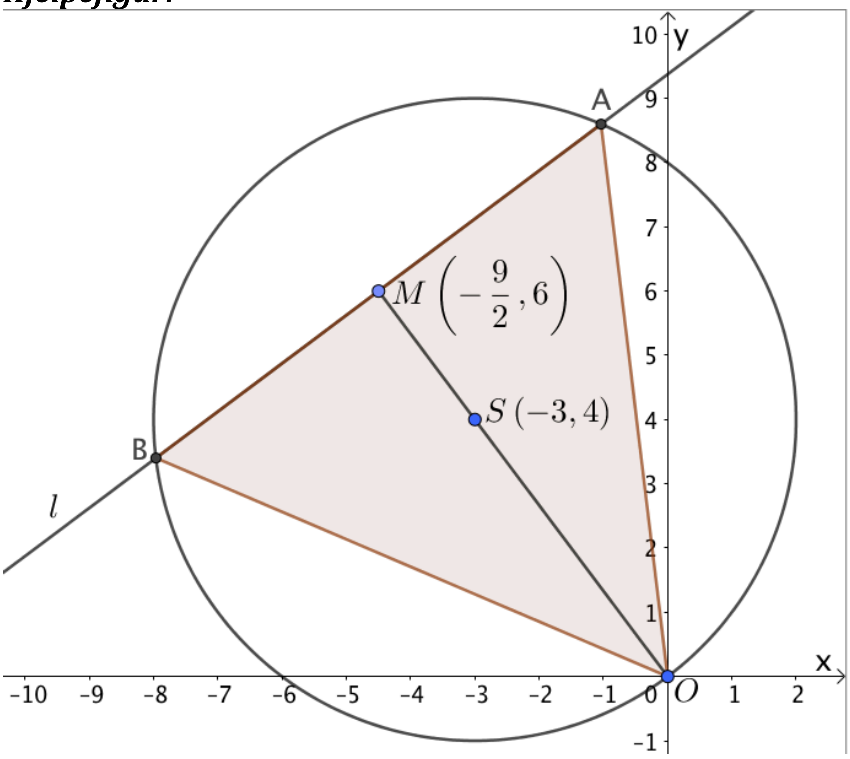
$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Så sirkelen har sentrum i $S(-3,4)$ og radius $r = 5$.

Kaller punktene jeg skal finne for *A* og *B*, slik at disse sammen med origo er hjørner i en likesidet trekant *OAB*.

S er sentrum i den omskrevne sirkelen til trekant *OAB*, og dermed også skjæringspunktet mellom midtnormalene i trekanten. Siden trekanten er likesidet, er *S* samtidig skjæringspunktet mellom medianene i trekanten.

Hjelpefigur:



$$\overrightarrow{OS} = [-3,4] \text{ og } \left|\overrightarrow{OS}\right| = 5$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OS} = \left[-\frac{9}{2}, 6\right] \text{ og } \left|\overrightarrow{OM}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{OS}\right| = \frac{15}{2}$$

ΔMOA er en 30-60-90-trekant, så da har vi:

$$\left|2\overrightarrow{MA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2$$

$$3\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \frac{15^2}{4\cdot 3}$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{15}{\sqrt{12}}$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{15}{2\sqrt{3}}$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{15\sqrt{3}}{6}$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Siden $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{OS}$, vil $\vec{r} = [4,3]$ være en retningsvektor for ei linje l gjennom *A*, *M* og *B*.

M har koordinater $\left(-\frac{9}{2}, 6\right)$ så vi kan ha følgende parameterfremstilling for l:

$$l: \begin{cases} x = 4t - \frac{9}{2} \\ y = 3t + 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA} = t\cdot\vec{r} = [4t, 3t]$$

så

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{16t^2 + 9t^2} = \sqrt{25t^2} = 5t$$

Vi har fra før at $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, så $t = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Setter dette inn i parameterfremstillingen for l og bestemmer koordinatene til *A*.

$$A = \left(4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}, 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\right) = \left(\frac{4\sqrt{3}-9}{2}, \frac{3\sqrt{3}+12}{2}\right)$$

$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$, så setter inn $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i parameterfremstillingen for l finner *B.*

$$B=\left(4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{9}{2},3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+6\right)=\left(-\frac{4\sqrt{3}+9}{2},-\frac{3\sqrt{3}-12}{2}\right)$$

Vi har altså

$$\underline{\underline{A\left(\frac{4\sqrt{3}-9}{2},\frac{3\sqrt{3}+12}{2}\right)\text{ og }B\left(-\frac{4\sqrt{3}+9}{2},-\frac{3\sqrt{3}-12}{2}\right)}}$$