Løsningsforslag eksamen R1 høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^2+e^x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{2x+e^x}}$

b)

$$g(x)=x^3\cdot\sqrt{2x-1}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=3x^2\cdot\sqrt{2x-1}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\\&=3x^2\cdot\sqrt{2x-1}+\frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}\\&=x^2\left(\frac{3\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)\\&=x^2\left(\frac{3(2x-1)}{\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)\\&=\underline{\underline{\frac{x^2(7x-3)}{\sqrt{2x-1}}}}\end{aligned}$$

NB! Her holder det nok å derivere, uten å bearbeidet uttrykket videre.

c)

$$h(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

$$h'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\underline{\underline{\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{(x+1)^2(x-1)^2}}}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned}2\ln\left(a^3b^4\right)-3\ln a-3\ln\left(ab^2\right)&=2\left(\ln a^3+\ln b^4\right)-3\ln a-3\left(\ln a+\ln b^2\right)\\&=2\left(3\ln a+4\ln b\right)-3\ln a-3\left(\ln a+2\ln b\right)\\&=6\ln a+8\ln b-3\ln a-3\ln a-6\ln b\\&=\underline{\underline{2\ln b}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Setter inn 2 for x i likningen $x^3+2x^2=5x+6$.

$$2^3+2\cdot 2^2=5\cdot 2+6$$
$$8+8=10+6$$
$$16=16$$

Ser da at $x=2$ er en løsning av likningen $x^3+2x^2=5x+6$, <u>som skulle vises</u>

b)

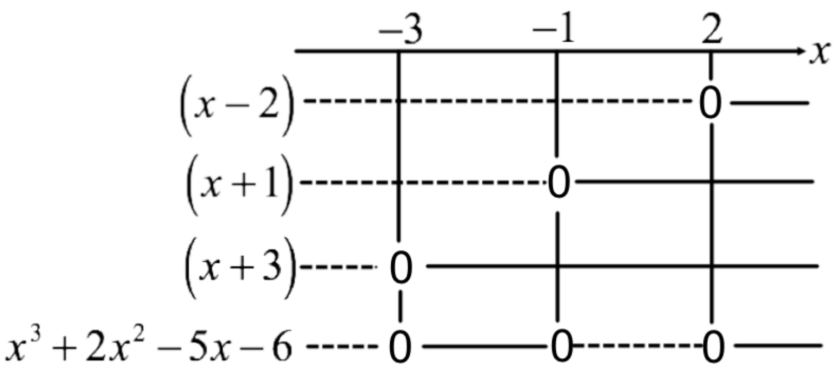
$$x^3+2x^2<5x+6$$
$$x^3+2x^2-5x-6<0$$

Resultatet vårt i a), forteller at $(x-2)$ er faktor i polynomet på venstre side i ulikheten. Bruker dette til å faktorisere dette polynomet.

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):\left(x-2\right)=x^2+4x+3$$
$$\underline{x^3-2x^2}$$
$$4x^2-5x-6$$
$$\underline{4x^2-8x}$$
$$3x-6$$
$$\underline{3x-6}$$
$$0$$

så $x^3+2x^2-5x-6=\left(x-2\right)\left(x^2+4x+3\right)=\left(x-2\right)\left(x+1\right)\left(x+3\right)$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{x^3+2x^2<5x+6 \text{ når } x\in\left\langle \leftarrow,-3\right\rangle \cup \left\langle -1,2\right\rangle}}$$

c) Her vil jeg finne et uttrykk som er lik null for $x=2$ og ikke definert for $x=-1$.

Brøken $\frac{x-2}{x+1}$ er en kandidat.

Den er positiv for alle verdier av x større enn 2 og for alle verdier av x mindre enn -1, og ikke definert for $x=-1$.

Da kan vi sette opp følgende ulikhet: $\underline{\underline{\frac{x-2}{x+1} \geq 0}}$

Oppgave 4

a)

$$\vec{r}(t) = [4t+2, 2t-5t^2]$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \underline{\underline{[4, 2-10t]}}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underline{\underline{[0, -10]}}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) &= 0 \\ [4, 2-10t]\cdot[0,-10] &= 0 \\ 4\cdot 0 + (2-10t)(-10) &= 0 \\ 0 - 20 + 100t &= 0 \\ 100t &= 20 \\ t &= \frac{20}{100} \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren når } t = \frac{1}{5}}}$

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{AB} = [6-1, 2-1] = \underline{\underline{[5,1]}}$$

og

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \underline{\underline{\sqrt{26}}}$$

b) $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\left([1,1]+[6,2]+[5,7]+[2,8]\right) = \frac{1}{4}\left[1+6+5+2, 1+2+7+8\right] = \frac{1}{4}\left[14,18\right] = \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$

$\underline{\underline{\text{Det matematiske tyngdepunktet i firkanten } ABCD \text{ har koordinatene } \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)}}$

c)

$$\overrightarrow{OT} = [3,2]$$
$$gir$$
$$\frac{1}{4}([0,3]+[2,-2]+[7,3]+[x,y]) = [3,2]$$
$$\frac{1}{4}[0+2+7+x, 3-2+3+y] = [3,2]$$
$$[9+x, 4+y] = 4\cdot[3,2]$$
$$[9+x, 4+y] = [12,8]$$

Vi har da $9+x=12$ og $4+y=8$, som gir $x=3$ og $y=4$.

<u>*H* har koordinater (3,4)</u>

Oppgave 6

a) To kuler med samme farge kan skje på to måter – to blå eller to røde.

$$2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken er } \frac{1}{3}}}$$

b) To kuler med ulik farge kan skje på to måter – Rød, så blå, eller omvendt.
Vi tar utgangspunkt i at sannsynligheten for to kuler med ulik farge minker etter hvert som vi legger til kuler som har den ene av de to fargene.
Lar *x* være antall røde kuler som legges til i krukka og setter opp en likning der sannsynligheten for ulik farge skal være 50%.

$$\frac{2+x}{4+x}\cdot\frac{2}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{2+x}{3+x}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{2(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{4(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=1$$
$$16+8x=(4+x)(3+x)$$
$$16+8x=12+4x+3x+x^2$$
$$x^2+7x+12-8x-16=0$$
$$x^2-x-4=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vi velger den positive løsningen $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Denne verdien ligger mellom 2 og 3, så vi runder opp til 3.
Vi må altså legge til minst 3 røde kuler for at sannsynligheten for to ulike farger skal være under 50%.

Det må ligge minst 5 røde kuler i krukka for at sannsynligheten for ulik farge er mindre enn 50 %

Slik denne løsningen utviklet seg, vil jeg si det egentlig er enklere å bare "prøve seg frem", altså å legge til røde kuler og bestemme den nye sannsynligheten, til denne er under 50 %. Eller det kan hende det finnes en enklere metode enn det jeg kom på i farten.

Oppgave 7

a)

$$f(x) = (x+2)(x^2+x+5) = x^3+x^2+5x+2x^2+2x+10 = x^3+3x^2+7x+10$$

så

$$f'(x) = 3x^2+6x+7$$

og

$$3x^2+6x+7=0$$

gir

$$x = \frac{-6\pm\sqrt{36-84}}{6} = \frac{-6\pm\sqrt{-48}}{6}$$

Vi kan også se av uttrykket til den deriverte at grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"). Når vi da i tillegg finner at den deriverte ikke har noen nullpunkter, kan vi konkludere med at den deriverte er positiv for alle verdier av *x*.
Det betyr at grafen til *f* er stigende for alle verdier av *x.*
Som skulle vises.

b)

$$f''(x) = 6x+6$$

og

$$6x+6=0$$

gir

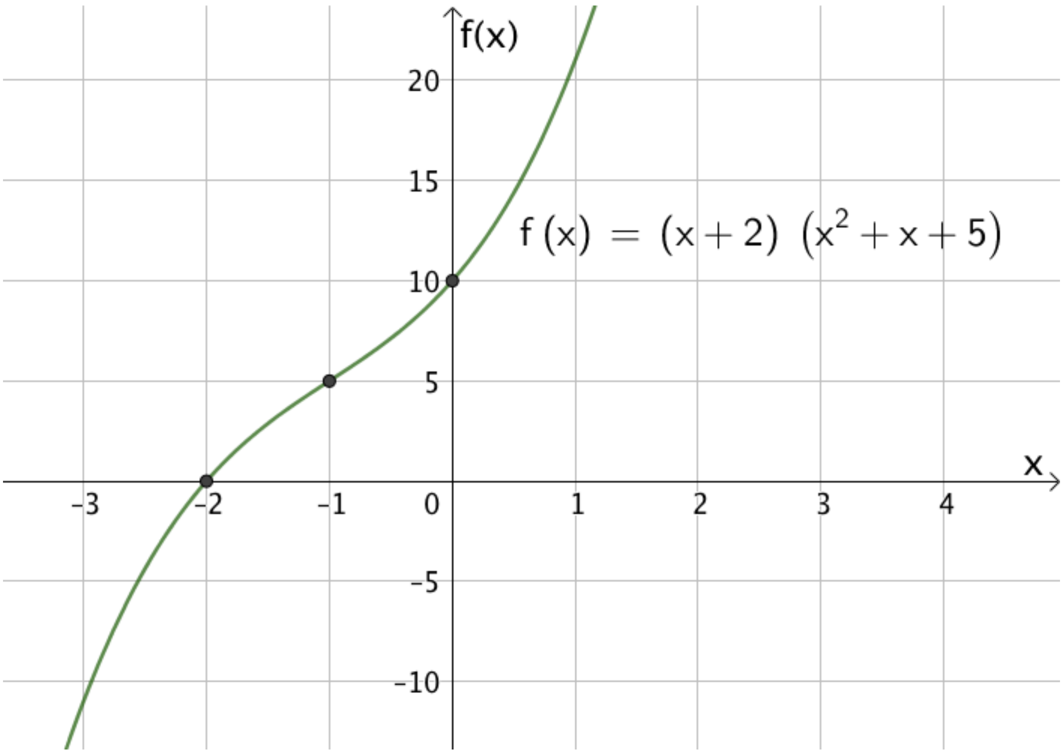
$$x=-1$$

Grafen til andrederiverte er ei rett linje, så den skifter fortegn i nullpunktet.

$$f(-1) = (-1+2)\left((-1)^2-1+5\right) = 1\cdot(1-1+5) = 5$$

Grafen til *f* har vendepunkt i (-1, 5)

c) Når grafen til *f* er stadig stigende, og har vendepunkt i (-1,5), vet vi også at $x = -2$ er eneste nullpunkt. Vi har også $f(0) = 2 \cdot 5 = 10$.
Da kan vi skissere grafen til *f*:



Oppgave 8

$\angle A$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som en sentralvinkel på $140°$, så $\angle A = \dfrac{140°}{2} = 70°$.

ΔBCS er likebeint, så $\angle SBC = \dfrac{180° - 140°}{2} = \dfrac{40°}{2} = 20°$.
Da har vi at $\angle ABC = 20° + 30° = 50°$.

Vi har da to av tre vinkler i trekant *ABC*, og kan greit regne ut den siste.
$\angle BCA = 180 - 50° - 70° = 60°$

$\underline{\underline{\angle A = 70° \wedge \angle ABC = 50° \wedge \angle BCA = 60°}}$

Oppgave 9

Lager en hjelpefigur:

Vi vet at M er midtpunkt på AD og at N er midtpunkt på BC.

Formlikhet gir da at $MP = \frac{1}{2}AR$ og $NQ = \frac{1}{2}BS$.

Vi kan også si at $AR + BS = AB - CD$ og $PQ = CD$

Da har vi:

$$MN = MP + NQ + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}AR + \frac{1}{2}BS + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}(AR + BS) + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD) + CD$$

$$MN = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD + CD$$

$$MN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$$

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

<u>Som skulle vises</u>

Del 2

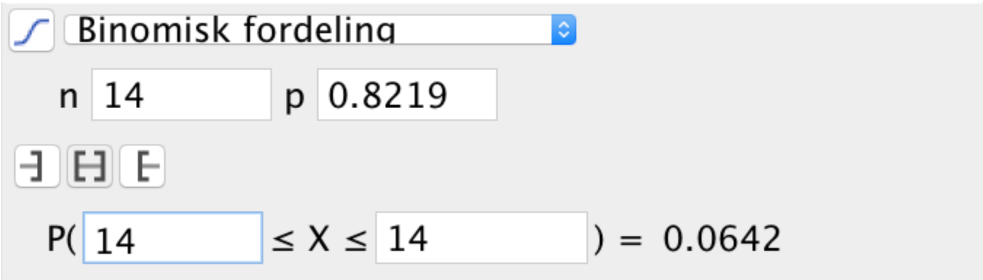
Oppgave 1

a) Her kan Agnete ha tatt utgangspunkt i at hun har en binomisk sannsynlighetsmodell.
Da ser vi på hver dag som et forsøk, der utfallet er enten ”soldag” eller ”ikke soldag”. Vi må da forutsette at vi har en gitt, fast sannsynlighet for hvert av utfallene og at hvert delforsøk er uavhengig av andre delforsøk, slik at ”soldag” én dag, ikke påvirker om neste dag er ”soldag” eller ikke.

Dersom vi ser bort fra skuddår, kan vi si at sannsynligheten for soldag er gitt ved.

$$p = \frac{300}{365} = \frac{60}{73} \approx 0{,}8219$$

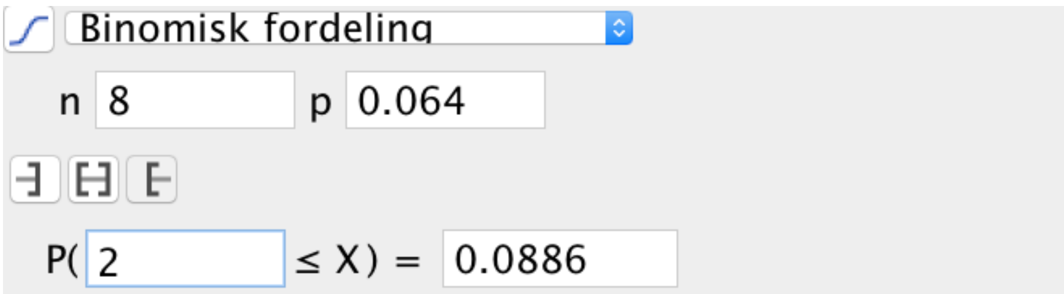
Bruker så sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å beregne sannsynligheten for 14 soldager på rad.



Vi får altså at det er 6,4 % sannsynlighet for at alle de 14 dagene blir soldager.

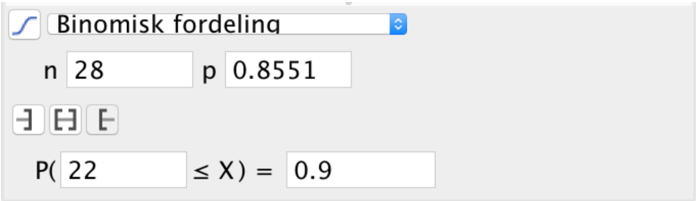
Det ser altså ut som at Agnete har sett på situasjonen som en binomisk sannsynlighetsmodell, med de forutsetninger som ligger til grunn, og beregnet sannsynligheten ut fra dette

b) Vi tar med oss fra a) at det er 6,4 % sannsynlig for 14 soldager på rad.
Nå har vi en binomisk sannsynlighetsmodell der utfallene er enten ”14 soldager på rad” eller ”ikke 14 soldager på rad”.
Beregner sannsynligheten for at ”14 soldager på rad” skjer minst 2 av 8 ganger.



<u>Sannsynligheten for at familien opplever kun soldager på minst 2 av de 8 feriereisene er 8,9%</u>

c) Justerer verdien i p-vinduet til jeg får opp at det er 90 % sannsynlig med minst 22 soldager av 28 mulige.



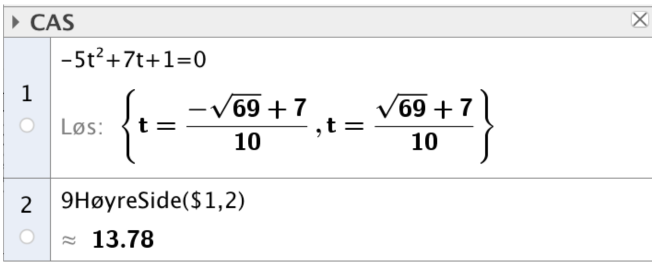
Må altså ha $p \geq 0{,}8551$ for at det skal være *minst* 90 % sannsynlig med minst 22 soldager av 28 mulige.

$$0{,}8551 \cdot 365 \text{ dager } = 312{,}1115 \text{ dager}$$

<u>Det må være minst 313 soldager i året på feriestedet om påstanden fra reisebyrået skal være sann.</u>

Oppgave 2

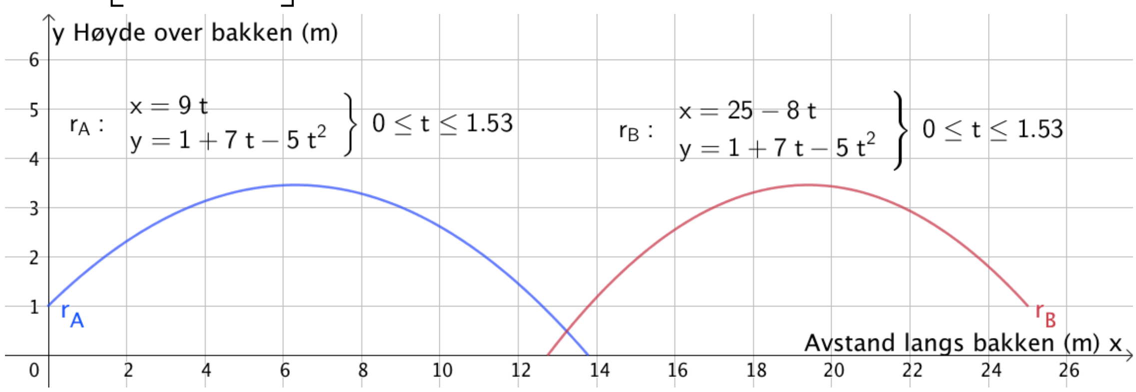
a) Når kula treffer bakken, har vi $1+7t-5t^2=0$.
Kula er altså null meter over bakken.



Velger den positive løsningen og setter den inn for *t* i *x*-komponenten til $\vec{r}_A$
<u>Rikard kaster kulen omtrent 13,8 meter i *x*-retning</u>

b) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)"
i GeoGebra og tegner grafene til $\vec{r}_A$ og $\vec{r}_B$ i samme koordinatsystem.

Lar $t \in \left[0, \dfrac{\sqrt{69}+7}{10}\right] \approx [0\ ,\ 1{,}53]$ for begge kurvene.



c)

CAS

1	Skjæring(r_A, r_B) → $\left\{\left(\frac{621}{5}, -\frac{4273}{5}\right), \left(\frac{225}{17}, \frac{139}{289}\right)\right\}$
2	{(621 / 5, (-4273) / 5), (225 / 17, 139 / 289)} ≈ $\{(124.2, -854.6), (13.235, 0.481)\}$
3	9t=25-8t Løs: $\left\{t = \frac{25}{17}\right\}$
4	r_A(25/17) → $\left(\frac{225}{17}, \frac{139}{289}\right)$
5	r_B(25/17) → $\left(\frac{225}{17}, \frac{139}{289}\right)$

I linje 1 finner jeg to skjæringspunkter, men de avrundede verdiene i linje 2 forteller hvilket som er aktuelt i denne situasjonen.

I linje 3 finner jeg ut på hvilket tidspunkt kulene har samme posisjon i *x*-retning. I linje 4 og 5 setter jeg dette tidspunktet for *t* i $\vec{r}_A(t)$ og $\vec{r}_B(t)$ og ser at dette gir skjæringspunktet mellom kurvene.

<u>Kulene vil treffe hverandre</u>

d) I og med at *y*-komponentene til $\vec{r}_A(t)$ og $\vec{r}_B(t)$ er like, vil disse ha samme posisjon i *y*-retning på ethvert tidspunkt hvor de har samme posisjon i *x*-retning. Det betyr at kulene vil truffet hverandre også om Berit hadde stått nærmere Rikard i det hun kastet kula si.

Oppgave 3

Starter med å definere funksjonen *f* og uttrykk for grunnlinje og høyde i rektangelet *ABCD.*
Da kan jeg bestemme et uttrykk for arealet av rektangelet, avhengig av *a*.

CAS

1	f(x):=6x−x² → $f(x) := -x^2 + 6x$
2	h:=f(a) → $h := -a^2 + 6a$
3	g:=6−2a → $g := -2a + 6$
4	F(a):=g*h → $F(a) := 2a^3 - 18a^2 + 36a$

Løser likningen $F'(a)=0$ og velger den løsningen som er innenfor definisjonsområdet for *a.*

5	F'(a)=0 Løs: $\left\{a=-\sqrt{3}+3, a=\sqrt{3}+3\right\}$
6	{a = -sqrt(3) + 3, a = sqrt(3) + 3} ≈ $\{a=1.268, a=4.732\}$

For å bekrefte at $a=3-\sqrt{3}$ gir toppunkt på grafen til *F*, sjekker jeg at den andrederiverte av *F* er negativ for denne verdien av *a*.

7	F''(HøyreSide($5,1)) ≈ -20.785

$\underline{\underline{a=3-\sqrt{3} \text{ er den eksakte verdien av } a \text{ som gjør at rektangelet får størst mulig areal.}}}$

Oppgave 4

a)

CAS

1	h(x):=x² → $h(x) := x^2$
2	g(x):=r-sqrt(r²-x²) → $g(x) := r-\sqrt{r^2-x^2}$
3	h''(0)=g''(0) Løs: $\left\{r=-\frac{1}{2}, r=\frac{1}{2}\right\}$

Velger den positive løsningen.

$$\underline{\underline{g''(0)=h''(0) \text{ når } r=\frac{1}{2}}}$$

b)

2	r(0)=sqrt(((1+(h'(0))²)³)/(h''(0))²) ✓ $r(0) = \sqrt{\frac{\left(1+h'(0)^2\right)^3}{h''(0)^2}}$
3	r(0) = sqrt((1 + h'(0)²)³ / h''(0)²) → $r(0) = \frac{1}{2}$

Krumningsradiusen til grafen til h i $(0, h(0))$ er $\frac{1}{2}$

c)

CAS	
1	f(x):=ln(x) → $f(x) := \ln(x)$
2	r(a):= sqrt((1 + f'(a)²)³ / f''(a)²) ✓ $r(a) := \sqrt{\frac{\left(1+f'(a)^2\right)^3}{f''(a)^2}}$
3	r'(a)=0 Løs: $\left\{a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
4	r''(HøyreSide($3,2)) → $\sqrt{3} \cdot 4$

Definerer f og uttrykket for $r(a)$.
I linje 3 løser jeg likningen $r'(a) = 0$. Når vi har $f(x) = \ln x$, må vi ha $a > 0$.

I linje 4 gjennomfører jeg andrederiverttesten for å forsikre meg om at $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gir bunnpunkt på grafen til r.

5	(HøyreSide($3,2), f(HøyreSide($3,2))) $\rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)$
6	r(HøyreSide($3,2)) $\rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{3}$

I linje 5 finner jeg punktet på grafen til *f* som har minst krumningsradius, og i linje 6 finner jeg den minste krumningsradiusen.

$$\underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \text{ er det punktet på grafen til } f \text{ som har minst krumningsradius}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Da er krumningsradiusen } \frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$