Løsningsforslag eksamen 1T høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

Skal ha en likning på formen $y = ax + b$, der *a* er stigningstallet og *b* er konstantleddet.
Ser at stigningstallet til linja er 2 og at linja krysser *y*-aksen i punktet (0, -1).

Likningen for den rette linja er $\underline{\underline{y = 2x - 1}}$

Oppgave 2

$$\frac{6,2 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^8}{0,0005} = \frac{6,2 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{-4}} = 6,2 \cdot 5 \cdot 10^{4+7-(-4)} = 31 \cdot 10^{15} = \underline{\underline{3,1 \cdot 10^{16}}}$$

Oppgave 3

$$I. \quad x + 2y = 16$$
$$II. \quad 3x - y = 6$$

Legger likning *II* til likning *I* to ganger og får

$$7x = 28$$
$$x = \frac{28}{7}$$
$$x = 4$$

Setter dette inn i likning *I*:

$$4 + 2y = 16$$
$$2y = 16 - 4$$
$$y = \frac{12}{2}$$
$$y = 6$$

$$\underline{\underline{x = 4 \wedge y = 6}}$$

Oppgave 4

$$\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x - y} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{x - y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \frac{(x-y)^2}{x - y} = \underline{\underline{x - y}}$$

Oppgave 5

Dersom $4x^2+kx+\frac{1}{4}$ skal være et fullstendig kvadrat, må uttrykket kun ha ett nullpunkt.

$$4x^2+kx+\frac{1}{4}=0$$

gir

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4}}{8}$$

Dersom denne likningen kun skal ha én løsning, må vi ha $k^2-4=0$.
Da har vi:

$$k^2=4$$
$$k=\pm\sqrt{4}$$
$$k=\pm 2$$

$$\underline{\underline{4x^2+kx+\frac{1}{4}\text{ blir et fullstendig kvadrat når } k=-2\vee k=2}}$$

Alternativ løsning:

$$4x^2+kx+\frac{1}{4}=4\left(x^2+\frac{k}{4}+\frac{1}{16}\right)$$

Må ha $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4}\right)^2=\frac{k^2}{64}$ og $\frac{1}{16}=\frac{4}{64}$, så da må vi ha $k^2=4$

og så regne videre og svare som over.

Oppgave 6

$$\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{-1}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{20}\cdot 3^0}=\frac{\sqrt{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\sqrt{5\cdot 4}\cdot 1}=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}{4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2^2}{4\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 7

$$\frac{\lg 1000 \cdot \lg \frac{1}{10}}{\lg 0{,}01 \cdot \lg 10^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\lg 10^3 \left(\lg 1 - \lg 10\right)}{\lg 10^{-2} \cdot \lg 10^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3\left(0-1\right)}{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{0-3}{1} = \underline{\underline{-3}}$$

Oppgave 8

a)

$$\frac{2^{2+x}}{2^{1-2x}} = 64$$
$$2^{2+x-(1-2x)} = 2^6$$
$$2 + x - \left(1-2x\right) = 6$$
$$2 + x - 1 + 2x = 6$$
$$3x = 6 - 2 + 1$$
$$\underline{\underline{x = \frac{5}{3}}}$$

b)

$$\lg\left(\frac{1}{x^2-3x}\right) = -1$$
$$10^{\lg\left(\frac{1}{x^2-3x}\right)} = 10^{-1}$$
$$\frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{10}$$
$$x^2 - 3x = 10$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

"Sum og produkt" gir

$$\left(x+2\right)\left(x-5\right) = 0$$

så

$$\underline{\underline{x = -2 \vee x = 5}}$$

Oppgave 9

$2x-4$ er likningen til ei rett linje som krysser y-aksen i $\left(0,-4\right)$ og har stigningstall 2.

Vi kan da se at denne linja vil skjære grafen til f først i $\left(0,-4\right)$ og så igjen i $\left(5,6\right)$, og at linja ligger høyere enn grafen til f i dette intervallet.

$$\underline{\underline{f(x) < 2x - 4 \text{ når } 0 < x < 5}}$$

Oppgave 10

Må løse likningen $f'(x) = -3$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$ gir $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Da får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \\ 3x^2 + 6x &= -3 \\ 3x^2 + 6x + 3 &= 0 \\ 3\left(x^2 + 2x + 1\right) &= 0 \\ 3\left(x+1\right)^2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Det betyr at grafen til *f* har én tangent med stigningstall -3. Denne tangerer grafen i punktet $\left(1, f(-1)\right) = \left(1,5\right)$.

Bestemmer likningen til tangenten ved hjelp av ettpunktsformelen.

$$\begin{aligned} \left(y-5\right) &= -3\left(x-(-1)\right) \\ y &= -3\left(x+1\right)+5 \\ y &= -3x - 3 + 5 \\ y &= -3x + 2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har én tangent med stigningstall -3. Likningen for denne er } y = -3x + 2}}$$

Oppgave 11

a) Her er det 8 av 10 elever i gruppa som ikke er Charlotte eller Gunnar.

$$P\left(\text{Verken Charlotte eller Gunnar blir trukket ut}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} = \underline{\underline{\frac{28}{45}}}$$

b) Det er 2 av 10 elever som er Charlotte eller Gunnar.

$$P\left(\text{ Charlotte og Gunnar blir trukket ut}\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \underline{\underline{\frac{1}{45}}}$$

Oppgave 12

a) ΔABC er en rettvinklet, likebeint trekant. Da vet vi at $\angle B = \angle C = 45^\circ$.

Lengden til hypotenusen *BC* er $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Tar utgangspunkt i $\angle B$ og bruker definisjonene av cosinus og sinus.

Definisjonen av cosinus gir: $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Definisjonen av sinus gir: $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vi har da at $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, som skulle vises

b) Bestemmer arealet ved hjelp av arealsetningen.

$$A = \frac{8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 45°}{2} = 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 24 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 24$$

Arealet av trekanten *PQR* er 24

c) Bruker cosinussetningen til å bestemme lengden av *QR*.

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45°} \\ &= \sqrt{64 + 36 \cdot 2 - 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{64 + 72 - 96} \\ &= \sqrt{40} \\ &= \sqrt{4 \cdot 10} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Oppgave 13

Ut fra informasjonen i oppgaven, kan vi si at $x + 2y = 1000$, slik at $y = 500 - \frac{1}{2}x$.

Arealet av området er gitt ved $A = x \cdot y$.
Siden vi har et uttrykk for *y* avhengig *x*, kan vi uttrykke arealet som en funksjon avhengig av *x*.

$$A(x) = x\left(500 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 500x.$$

Ser utfra funksjonsuttrykket til *A* at grafen er en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), slik at den har ett stasjonært punkt, som er et toppunkt. Finner ekstremalpunktet ved å løse likningen $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -x + 500 &= 0 \\ x &= 500 \end{aligned}$$

Som igjen gir $y = 500 - \frac{1}{2} \cdot 500 = 500 - 250 = 250$.

$\underline{\underline{\text{Arealet av området blir størst mulig når } x = 500\text{m og } y = 250\text{m}}}$