Løsningsforslag eksamen R1 høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^2+e^x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{2x+e^x}}$

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^3\cdot\sqrt{2x-1}\\
g'(x) &= 3x^2\cdot\sqrt{2x-1}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\\
&= 3x^2\cdot\sqrt{2x-1}+\frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}\\
&= x^2\left(\frac{3\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)\\
&= x^2\left(\frac{3(2x-1)}{\sqrt{2x-1}}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)\\
&= \underline{\underline{\frac{x^2(7x-3)}{\sqrt{2x-1}}}}
\end{aligned}
$$

NB! Her holder det nok å derivere, uten å bearbeidet uttrykket videre.

c)

$$
h(x)=\frac{x^3}{x^2-1}
$$

$$
h'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\underline{\underline{\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{(x+1)^2(x-1)^2}}}
$$

Oppgave 2

$$
\begin{aligned}
2\ln\left(a^3b^4\right)-3\ln a-3\ln\left(ab^2\right) &= 2\left(\ln a^3+\ln b^4\right)-3\ln a-3\left(\ln a+\ln b^2\right)\\
&= 2\left(3\ln a+4\ln b\right)-3\ln a-3\left(\ln a+2\ln b\right)\\
&= 6\ln a+8\ln b-3\ln a-3\ln a-6\ln b\\
&= \underline{\underline{2\ln b}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a) Setter inn 2 for x i likningen $x^3 + 2x^2 = 5x + 6$.

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 = 5 \cdot 2 + 6$$
$$8 + 8 = 10 + 6$$
$$16 = 16$$

Ser da at $x = 2$ er en løsning av likningen $x^3 + 2x^2 = 5x + 6$, <u>som skulle vises</u>

b)

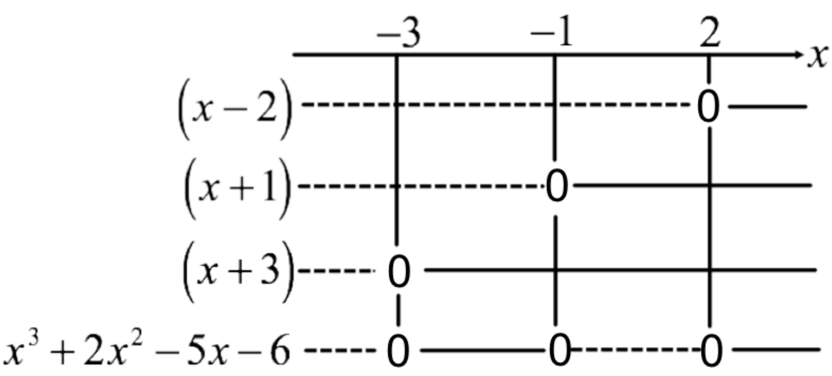
$$x^3 + 2x^2 < 5x + 6$$
$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$$

Resultatet vårt i a), forteller at $(x-2)$ er faktor i polynomet på venstre side i ulikheten. Bruker dette til å faktorisere dette polynomet.

$$\left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right) : \left(x - 2\right) = x^2 + 4x + 3$$
$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad 4x^2 - 5x - 6 \\
\quad \underline{4x^2 - 8x} \\
\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\quad \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

så $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3) = (x-2)(x+1)(x+3)$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{x^3 + 2x^2 < 5x + 6 \text{ når } x \in \langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle -1, 2 \rangle}}$$

c) Her vil jeg finne et uttrykk som er lik null for $x = 2$ og ikke definert for $x = -1$.

Brøken $\dfrac{x-2}{x+1}$ er en kandidat.

Den er positiv for alle verdier av *x* større enn 2 og for alle verdier av *x* mindre enn -1, og ikke definert for $x = -1$.

Da kan vi sette opp følgende ulikhet: $\underline{\underline{\dfrac{x-2}{x+1} \geq 0}}$

Oppgave 4

a)

$$\vec{r}(t) = [4t + 2, 2t - 5t^2]$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \underline{\underline{[4, 2 - 10t]}}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underline{\underline{[0, -10]}}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) &= 0 \\ [4, 2 - 10t] \cdot [0, -10] &= 0 \\ 4 \cdot 0 + (2 - 10t)(-10) &= 0 \\ 0 - 20 + 100t &= 0 \\ 100t &= 20 \\ t &= \frac{20}{100} \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren når } t = \frac{1}{5}}}$

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{AB} = [6 - 1, 2 - 1] = \underline{\underline{[5, 1]}}$$

og

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \underline{\underline{\sqrt{26}}}$$

b) $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\big([1,1] + [6,2] + [5,7] + [2,8]\big) = \frac{1}{4}\big[1 + 6 + 5 + 2, 1 + 2 + 7 + 8\big] = \frac{1}{4}\big[14, 18\big] = \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$

$\underline{\underline{\text{Det matematiske tyngdepunktet i firkanten } ABCD \text{ har koordinatene } \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)}}$

c)

$$\overrightarrow{OT} = [3,2]$$

$$gir$$

$$\frac{1}{4}\left([0,3]+[2,-2]+[7,3]+[x,y]\right) = [3,2]$$

$$\frac{1}{4}[0+2+7+x, 3-2+3+y] = [3,2]$$

$$[9+x, 4+y] = 4\cdot[3,2]$$

$$[9+x, 4+y] = [12,8]$$

Vi har da $9+x=12$ og $4+y=8$, som gir $x=3$ og $y=4$.

$\underline{\underline{H \text{ har koordinater } (3,4)}}$

Oppgave 6

a) To kuler med samme farge kan skje på to måter – to blå eller to røde.

$$2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken er } \frac{1}{3}}}$

b) To kuler med ulik farge kan skje på to måter – Rød, så blå, eller omvendt.
Vi tar utgangspunkt i at sannsynligheten for to kuler med ulik farge minker etter hvert som vi legger til kuler som har den ene av de to fargene.
Lar x være antall røde kuler som legges til i krukka og setter opp en likning der sannsynligheten for ulik farge skal være 50%.

$$\frac{2+x}{4+x}\cdot\frac{2}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{2+x}{3+x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(4+2x)}{(4+x)(3+x)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4(4+2x)}{(4+x)(3+x)} = 1$$

$$16+8x = (4+x)(3+x)$$

$$16+8x = 12+4x+3x+x^2$$

$$x^2+7x+12-8x-16 = 0$$

$$x^2-x-4 = 0$$

$$gir$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vi velger den positive løsningen $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Denne verdien ligger mellom 2 og 3, så vi runder opp til 3.
Vi må altså legge til minst 3 røde kuler for at sannsynligheten for to ulike farger skal være under 50%.

Det må ligge minst 5 røde kuler i krukka for at sannsynligheten for ulik farge er mindre enn 50 %

Slik denne løsningen utviklet seg, vil jeg si det egentlig er enklere å bare "prøve seg frem", altså å legge til røde kuler og bestemme den nye sannsynligheten, til denne er under 50 %. Eller det kan hende det finnes en enklere metode enn det jeg kom på i farten.

Oppgave 7

a)

$$f(x) = (x+2)(x^2+x+5) = x^3 + x^2 + 5x + 2x^2 + 2x + 10 = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$$

så

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 7$$

og

$$3x^2 + 6x + 7 = 0$$

gir

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-84}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{-58}}{6}$$

Vi kan også se av uttrykket til den deriverte at grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"). Når vi da i tillegg finner at den deriverte ikke har noen nullpunkter, kan vi konkludere med at den deriverte er positiv for alle verdier av *x*.
Det betyr at grafen til *f* er stigende for alle verdier av *x*.
Som skulle vises.

b)

$$f''(x) = 6x + 6$$

og

$$6x + 6 = 0$$

gir

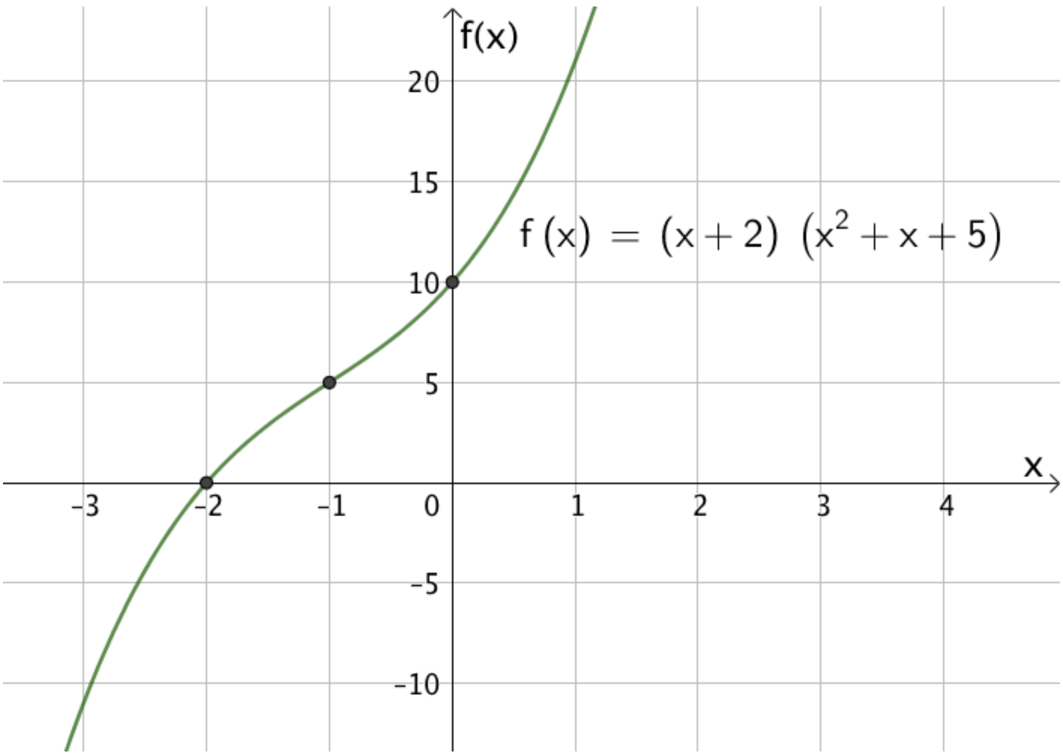
$$x = -1$$

Grafen til andrederiverte er ei rett linje, så den skifter fortegn i nullpunktet.

$$f(-1) = (-1+2)\left((-1)^2 - 1 + 5\right) = 1 \cdot (1 - 1 + 5) = 5$$

Grafen til *f* har vendepunkt i (-1, 5)

c) Når grafen til *f* er stadig stigende, og har vendepunkt i (-1,5), vet vi også at $x=-2$ er eneste nullpunkt. Vi har også $f(0)=2\cdot 5=10$.
Da kan vi skissere grafen til *f*:



Oppgave 8

$\angle A$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som en sentralvinkel på $140°$, så $\angle A = \frac{140°}{2} = 70°$.

ΔBCS er likebeint, så $\angle SBC = \frac{180° - 140°}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$.
Da har vi at $\angle ABC = 20° + 30° = 50°$.

Vi har da to av tre vinkler i trekant *ABC*, og kan greit regne ut den siste.
$\angle BCA = 180 - 50° - 70° = 60°$

$\underline{\underline{\angle A = 70° \wedge \angle ABC = 50° \wedge \angle BCA = 60°}}$

Oppgave 9

Lager en hjelpefigur:

Vi vet at M er midtpunkt på AD og at N er midtpunkt på BC.

Formlikhet gir da at $MP = \frac{1}{2}AR$ og $NQ = \frac{1}{2}BS$.

Vi kan også si at $AR + BS = AB - CD$ og $PQ = CD$

Da har vi:

$$MN = MP + NQ + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}AR + \frac{1}{2}BS + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}(AR + BS) + PQ$$

$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD) + CD$$

$$MN = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD + CD$$

$$MN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$$

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

<u>Som skulle vises</u>