Løsningsforslag eksamen S1 høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
2(3x+2) &= 2x(x+2)+4 \quad |\cdot\frac{1}{2} \\
3x+2 &= x(x+2)+2 \\
3x+2 &= x^2+2x+2 \\
x^2+2x+2-3x-2 &= 0 \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
&\underline{\underline{x=0 \vee x=1}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
3^x \cdot 3^2 &= \frac{1}{3^5} \\
3^{x+2} &= 3^{-5} \\
x+2 &= -5 \\
x &= -5-2 \\
&\underline{\underline{x=-7}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lg(3x-2) &= 2\lg x \\
\lg(3x-2) &= \lg x^2 \\
3x-2 &= x^2 \\
x^2-3x+2 &= 0 \\
(x-1)(x-2) &= 0 \\
&\underline{\underline{x=1 \vee x=2}}
\end{aligned}
$$

Faktoriserer ved hjelp av "sum og produkt".

(Sjekker kjapt at begge løsningene er gyldige)

Oppgave 2

a)

$$\frac{4a^3\left(a^{-2}b^3\right)^2}{\left(2^{-1}\right)^{-2}ab^4}=\frac{4a^3\cdot a^{-4}\cdot b^6}{2^2ab^4}=a^{3-4-1}\cdot b^{6-4}=a^{-2}\cdot b^4=\underline{\underline{\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

b)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}+1=\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x+1-2x+x^2-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x}{x+1}}}$$

Oppgave 3

$x^2-3x+2\leq 0$

Har fra oppgave 1c) at uttrykket på venstre side har nullpunktene $x=1$ og $x=2$. Grafen til uttrykket på venstre side er en parabel som vender den hule siden opp ("smilemunn"), så det betyr at grafen ligger under *x*-aksen mellom nullpunktene.

$\underline{\underline{x^2-3x+2\leq 0 \text{ når } 1\leq x\leq 2}}$

Oppgave 4

Lar *x* være antall gullmedaljer og lar *y* være antall sølvmedaljer.
Da kan jeg sette opp følgende likningssett:

$I.\quad x+y=16$

$II.\quad 7x+5y=102$

Likning *I.* kan skrives om til $y=16-x$. Setter dette inn i likning *II.*:

$$7x+5(16-x)=102$$

$$7x+80-5x=102$$

$$2x=102-80$$

$$x=\frac{22}{2}$$

$$x=11$$

<u>Norge tok 11 gullmedaljer under vinter-OL i 2014</u>

Oppgave 5

a) To kuler med samme farge kan skje på to måter – to blå eller to røde.

$$2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken er } \frac{1}{3}}}$$

b) To kuler med ulik farge kan skje på to måter – Rød, så blå, eller omvendt.
Vi tar utgangspunkt i at sannsynligheten for to kuler med ulik farge minker etter hvert som vi legger til kuler som har den ene av de to fargene.
Lar *x* være antall røde kuler som legges til i krukka og setter opp en likning der sannsynligheten for ulik farge skal være 50%.

$$\frac{2+x}{4+x}\cdot\frac{2}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{2+x}{3+x}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{4(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=1$$

$$16+8x=(4+x)(3+x)$$

$$16+8x=12+4x+3x+x^2$$

$$x^2+7x+12-8x-16=0$$

$$x^2-x-4=0$$

$$gir$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vi velger den positive løsningen $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Denne verdien ligger mellom 2 og 3, så vi runder opp til 3.
Vi må altså legge til minst 3 røde kuler for at sannsynligheten for to ulike farger skal være under 50%.

<u>Det må ligge minst 5 røde kuler i krukka for at sannsynligheten for ulik farge er mindre enn 50 %</u>

Slik denne løsningen utviklet seg, vil jeg si det egentlig er enklere å bare "prøve seg frem", altså å legge til røde kuler og bestemme den nye sannsynligheten, til denne er under 50 %. Eller det kan hende det finnes en enklere metode enn det jeg kom på i farten.

Oppgave 6

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$

- Den vertikale asymptoten forteller at $x+c=0$ når $x=3$, så vi har $c=-3$.
- Når vi lar $x\to\infty$, kan vi si at $\dfrac{ax+b}{x+c}\approx\dfrac{ax}{x}=a$.
  Da forteller den horisontale asymptoten at vi må ha $a=-2$.
- $f(2)=0$, så $a\cdot 2+b=0$.
  Når vi da setter inn $a=-2$, får vi $b=4$.

$\underline{\underline{a=-2\wedge b=4\wedge c=-3}}$

Oppgave 7

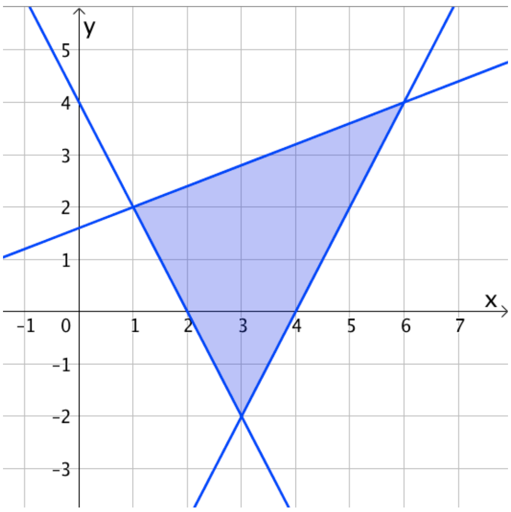
a) Ordner ulikhetene slik at jeg får y alene på venstre side:

$$-2x+5y\le 8 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad 2x-y\le 8$$

$$5y\le 2x+8 \quad \text{og} \quad y\ge -2x+4 \quad \text{og} \quad -y\le -2x+8$$

$$y\le \frac{2}{5}x+\frac{8}{5} \qquad\qquad y\ge 2x-8$$

Tegner linjene jeg får likningen til når jeg erstatter ulikhetstegnene med likhetstegn i ulikhetene over og skraverer i henhold til ulikhetene.



b) Regner ut verdien av $-2x+3y$ når vi setter inn koordinatene til de ulike hjørnene.

Hjørnet $(1,2)$ gir $-2\cdot 1+3\cdot 2=-2+6=4$.

Hjørnet $(3,-2)$ gir $-2\cdot 3+3\cdot(-2)=-6-6=-12$

Hjørnet $(6,4)$ gir $-2\cdot 6+3\cdot 4=-12+12=0$

$\underline{\underline{\text{Alle verdiene til uttrykket } -2x+3y \text{ ligger i intervallet } [-12,4] \text{ når } (x,y) \text{ ligger i } M}}$

Oppgave 8

$$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

a)

$$\frac{g(2) - g\left(\frac{3}{2}\right)}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}{\frac{4}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{8-6-0}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\underline{\underline{\text{Den gjennomsnittlige vekstfarten til } g \text{ i intervallet } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ er } 4}}$$

b)

$$g'(x) = 3x^2 - 3x$$

$$så$$

$$g'(2) = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 = 12 - 6 = \underline{\underline{6}}$$

c) Vi har i fra b) at den ene tangenten tangerer grafen til g i punktet $(2, g(2))$.
Setter den deriverte lik 6 for å finne x-koordinaten til det andre tangeringspunktet.

$$3x^2 - 3x = 6$$

$$x^2 - x = 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$så$$

$$x = 2 \vee x = -1$$

$$g(2) = 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 = 8 - 6 = 2$$

$$g(-1) = (-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Punktene } A \text{ og } B \text{ har koordinater } \left(-1, -\frac{5}{2}\right) \text{ og } (2,2)}}$$

Oppgave 9

a) Omkretsen av rektangelet er 96 cm og sidene er *x* cm og *y* cm.
Da kan vi si at:

$$2x+2y=96$$
$$x+y=48$$
$$y=48-x$$

<u>Som skulle forklares.</u>

b) Volumet av sylinderen er $V=G\cdot h=\pi\cdot r^2\cdot h$, der *G* er en sirkel med omkrets *x*.

Da er radius i sirkelen $\dfrac{x}{2\pi}$.

$h=y=48-x$.

Dette gir

$$V(x)=\pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(48-x\right)=\frac{\pi\cdot x^2}{4\pi^2}\left(48-x\right)=\frac{1}{4\pi}\cdot x^2\left(48-x\right)=\frac{1}{4\pi}\left(48x^2-x^3\right)$$

<u>Som skulle vises.</u>

c)

$$V(x)=\frac{48x^2}{4\pi}-\frac{x^3}{4\pi}=\frac{12}{\pi}x^2-\frac{1}{4\pi}x^3$$

så

$$V'(x)=\frac{24}{\pi}x-\frac{3}{4\pi}x^2$$

Setter den deriverte lik null.

$$V'(x)=0$$
$$\frac{24}{\pi}x-\frac{3}{4\pi}x^2=0 \quad |\cdot 4\pi$$
$$96x-3x^2=0 \quad |\cdot\frac{1}{3}$$
$$32x-x^2=0$$
$$x\left(32-x\right)=0$$

så

$$x=0\vee x=32$$

Grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), så den er positiv mellom nullpunktene. Det betyr at den deriverte skifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet $x=32$.

Det forteller oss at $\left(32,V(32)\right)$ er et toppunkt på grafen til *V*.

<u>Volumet av sylinderen blir størst mulig når *x* = 32</u>

Del 2

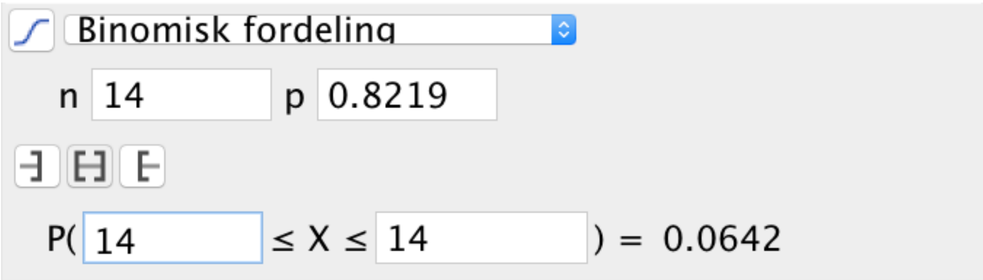
Oppgave 1

a) Her kan Agnete ha tatt utgangspunkt i at hun har en binomisk sannsynlighetsmodell.
Da ser vi på hver dag som et forsøk, der utfallet er enten ”soldag” eller ”ikke soldag”. Vi må da forutsette at vi har en gitt, fast sannsynlighet for hvert av utfallene og at hvert delforsøk er uavhengig av andre delforsøk, slik at ”soldag” én dag, ikke påvirker om neste dag er ”soldag” eller ikke.

Dersom vi ser bort fra skuddår, kan vi si at sannsynligheten for soldag er gitt ved.

$$p = \frac{300}{365} = \frac{60}{73} \approx 0{,}8219$$

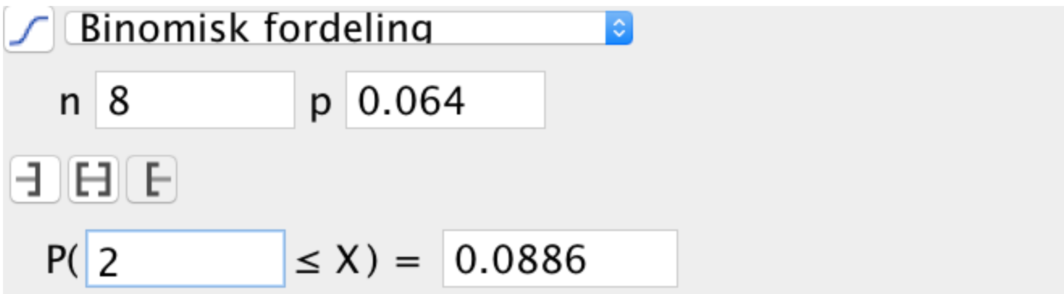
Bruker så sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å beregne sannsynligheten for 14 soldager på rad.



Vi får altså at det er 6,4 % sannsynlighet for at alle de 14 dagene blir soldager.

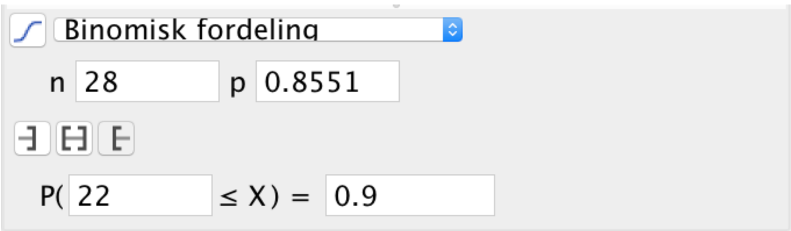
Det ser altså ut som at Agnete har sett på situasjonen som en binomisk sannsynlighetsmodell, med de forutsetninger som ligger til grunn, og beregnet sannsynligheten ut fra dette

b) Vi tar med oss fra a) at det er 6,4 % sannsynlig for 14 soldager på rad.
Nå har vi en binomisk sannsynlighetsmodell der utfallene er enten ”14 soldager på rad” eller ”ikke 14 soldager på rad”.
Beregner sannsynligheten for at ”14 soldager på rad” skjer minst 2 av 8 ganger.



<u>Sannsynligheten for at familien opplever kun soldager på minst 2 av de 8 feriereisene er 8,9%</u>

c) Justerer verdien i p-vinduet til jeg får opp at det er 90 % sannsynlig med minst 22 soldager av 28 mulige.



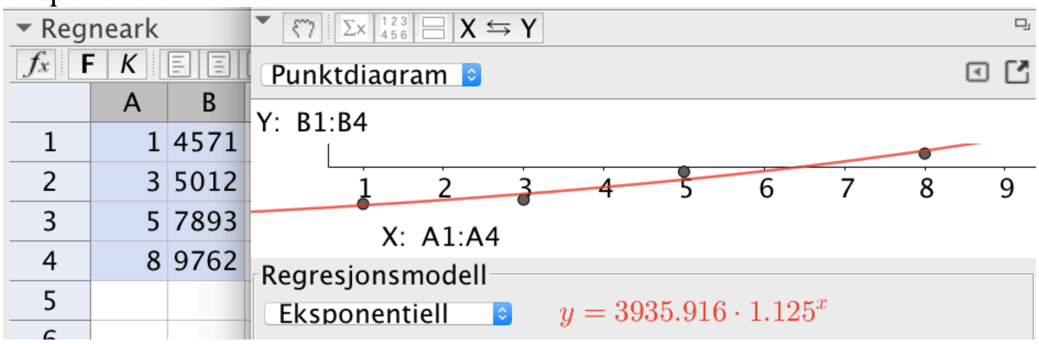
Må altså ha $p \geq 0{,}8551$ for at det skal være *minst* 90 % sannsynlig med minst 22 soldager av 28 mulige.

$$0{,}8551 \cdot 365 \text{ dager } = 312{,}1115 \text{ dager}$$

Det må være minst 313 soldager i året på feriestedet om påstanden fra reisebyrået skal være sann.

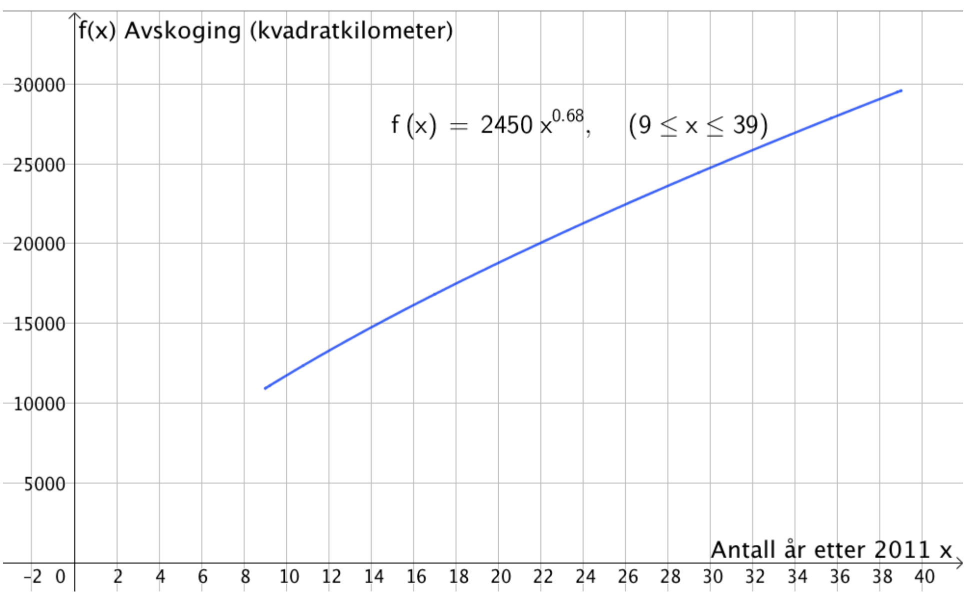
Oppgave 2

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra og velger regresjonsanalyse og eksponentiell modell.

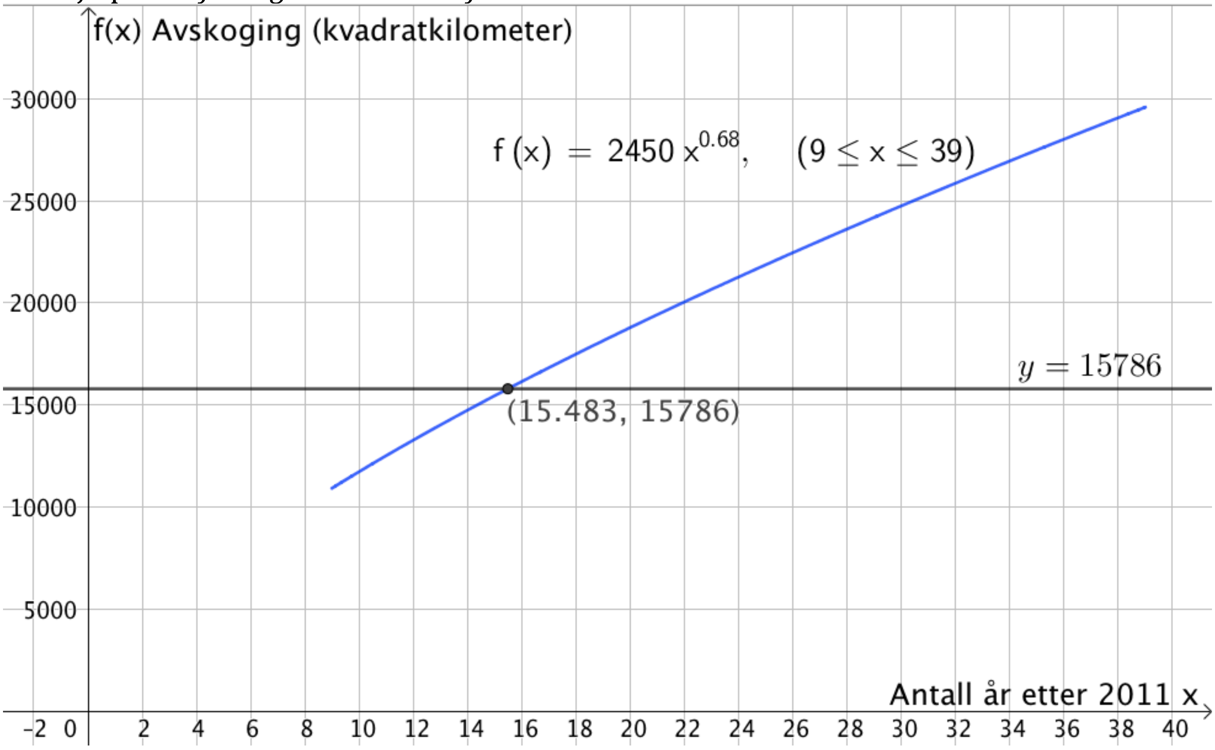


$g(x) = 3936 \cdot 1{,}125^x$ er en eksponentiell modell for avskogingen i Amazonas x år etter 2011

b)

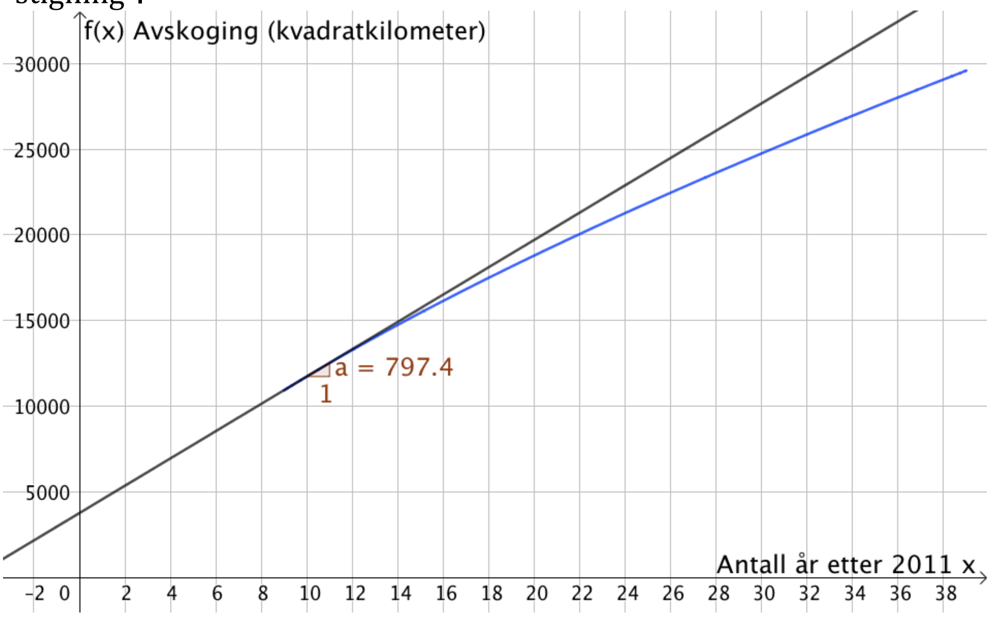


c) Tegner linja $y = 2 \cdot 7893$ og finner skjæringspunktet mellom denne og grafen til *f* ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



I følge modellen *f*, vil avskogingen per år være dobbelt så stor som i 2016 omtrent 15,5 år etter 2011, altså i 2026.

d) Bruker kommandoen " *Tangent(<x-verdi>, <Funksjon>)*" og tegner tangenten i punktet $\left(10, f(19)\right)$ og finner stigningstallet til denne ved hjelp av knappen "stigning".



$$\underline{\underline{f'(10) = 797{,}4}}$$

Svaret forteller at avskogingen øker med 797,4 km² per år i 2021.

e)

CAS

1 f(x):=2450*x^0.68

$\rightarrow$ $f(x) := 2450 \sqrt[25]{x^{17}}$

2 f'(11)/f'(10)

$\approx$ **0.97**

0,97 er vekstfaktor ved 3% nedgang.
Modellen *f* stemmer med myndighetenes ønske

Oppgave 3

a) Det er ikke mulig å produsere mindre enn 0 marsipanpølser, så må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- Marsipanpølsen av type A inneholder 250g melis, mens type B inneholder 100g melis. Konditoriet har daglig tilgang på 60 000g melis.
Dette gir følgende ulikhet:

$$250x + 100y \leq 60000 \quad | \cdot \frac{1}{100}$$

$$2{,}5x + y \leq 600$$

- Marsipanpølsen av type A inneholder 225g mandler, mens type B inneholder 350g mandler. Konditoriet har daglig tilgang på 88 200g mandler.
Dette gir følgende ulikhet:

$$225x + 350y \leq 88200 \quad | \cdot \frac{1}{100}$$

$$2{,}25x + 3{,}5y \leq 882$$

- Marsipanpølsen av type A inneholder 25g eggehvite, mens type B inneholder 50g eggehvite. Konditoriet har daglig tilgang på 12000g eggehvite.
Dette gir følgende ulikhet:

$$25x + 50y \leq 12000 \quad | \cdot \frac{1}{25}$$

$$x + 2y \leq 480$$

x og *y* må altså tilfredsstille følgende ulikheter:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

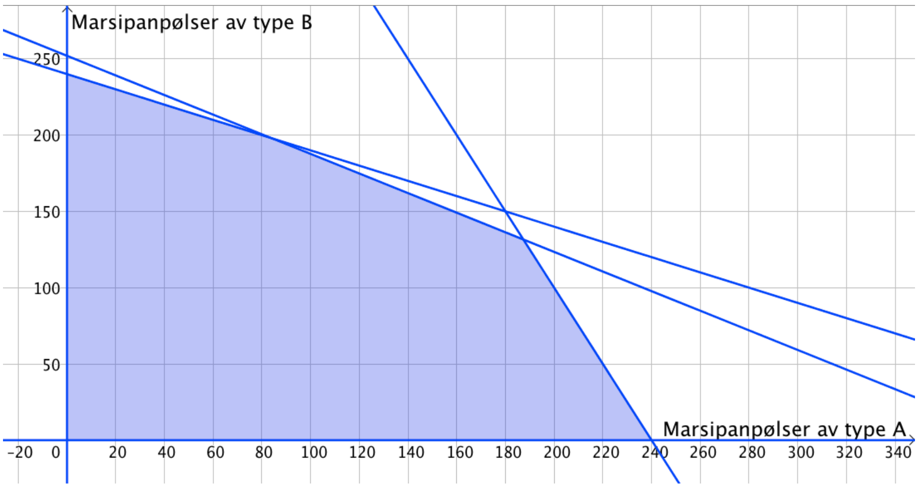
$$2{,}5x + y \leq 600$$

$$2{,}25x + 3{,}5y \leq 882$$

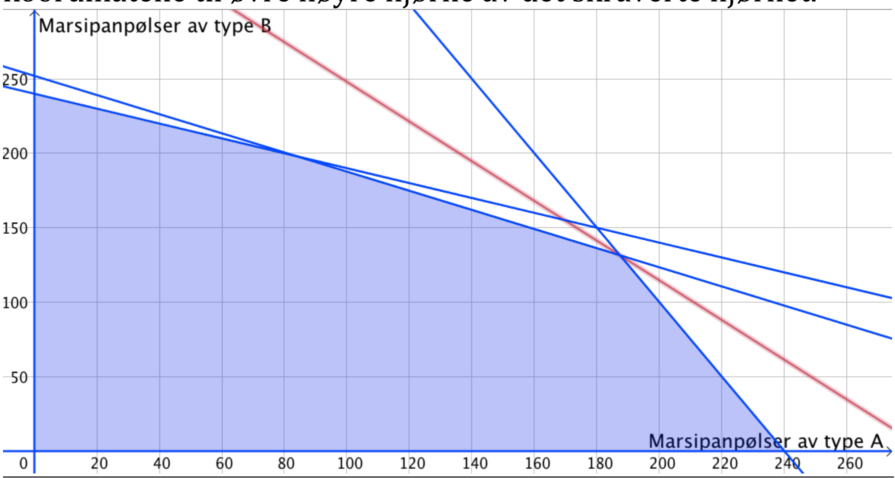
$$x + 2y \leq 480$$

Som skulle forklares.

b)

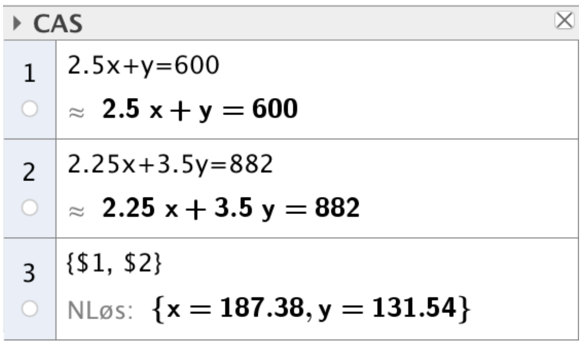


c) Nivålinja gitt ved $20x+15y=0$, viser at fortjesten er størst når konditoriet produserer et antall marsipanpølser av hver type som samsvarer med koordinatene til øvre høyre hjørne av det skraverte hjørnet.



Dette hjørnet er skjæringspunktet mellom linjene $2{,}5x+y=600$ og $2{,}25x+3{,}5y=882$.

Bruker CAS til å finne koordinatene til dette punktet.



Tar utgangspunkt i at konditoriet produserer et helt antall marsipanpølser per dag. Dersom de produserer 188 av type *A*, kan de kun produsere 130 av type *B*. Dersom de produserer 187 av type *A*, kan de produsere 131 av type *B*. Dersom de produserer 132 av type *B*, kan de kun produsere 186 av type *A*.

(Dette ser jeg ved å se nøye på det skraverte området i GeoGebra).

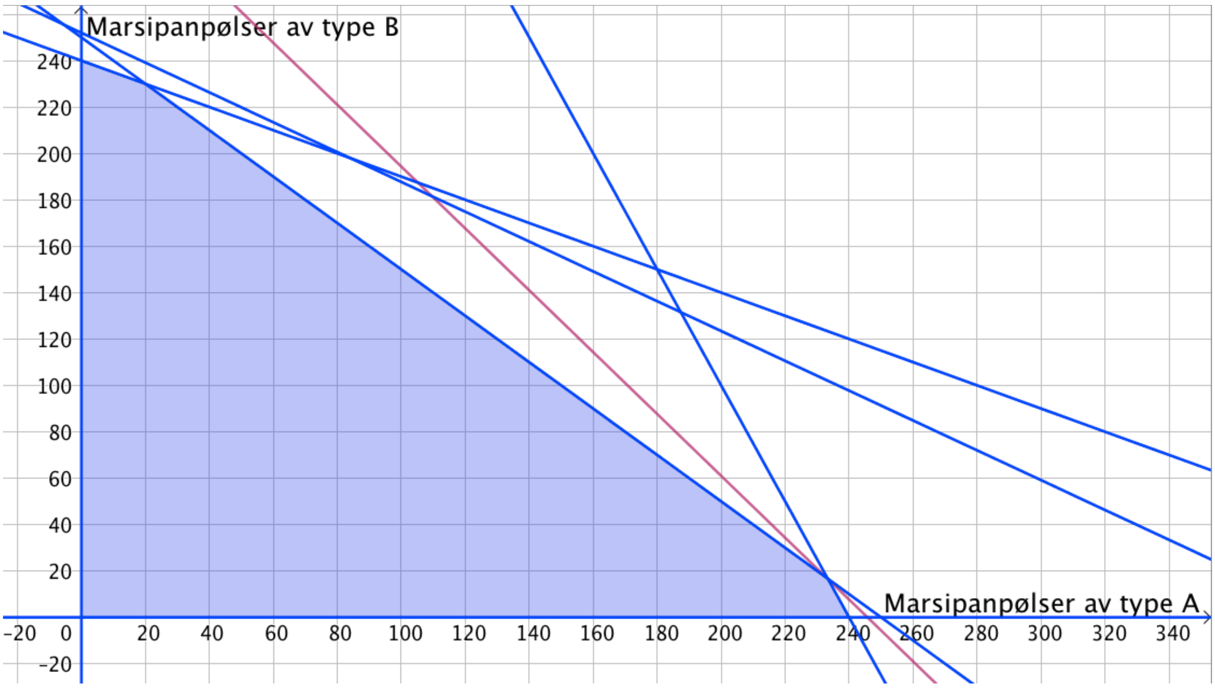
188 av type *A* og 130 av type *B* gir følgende fortjeneste:
$188 \cdot 20kr + 130 \cdot 15kr = 5710$

187 av type *A* og 131 av type *B* gir følgende fortjeneste:
$187 \cdot 20kr + 131 \cdot 15kr = 5705$

132 av type *B* og 186 av type *A* gir følgende fortjeneste:
$186 \cdot 20kr + 132 \cdot 15kr = 5700$

Konditoriet må produsere 188 marsipanpølser av type *A* og 130 av type *B* for størst mulig fortjeneste. Da er fortjenesten 5710 kroner.

d) Skriver inn ulikheten $x + y \leq 250$ sammen med de andre ulikhetene.



Når jeg ser nøye i GeoGebra, ser jeg at det punktet med heltallige koordinater som gir størst fortjeneste er punktet $(233,17)$..

$233 \cdot 20kr + 17 \cdot 15kr = 4915kr$

Den største fortjesten konditoriet kan få per dag denne uka er 4915 kroner