# Løsningsforslag eksamen S1 høsten 2020

## Del 1

### Oppgave 1

a)

$$2(3x+2)=2x(x+2)+4 \quad |\cdot\frac{1}{2}$$
$$3x+2=x(x+2)+2$$
$$3x+2=x^2+2x+2$$
$$x^2+2x+2-3x-2=0$$
$$x^2-x=0$$
$$x(x-1)=0$$
$$\underline{\underline{x=0 \vee x=1}}$$

b)

$$3^x\cdot 3^2=\frac{1}{3^5}$$
$$3^{x+2}=3^{-5}$$
$$x+2=-5$$
$$x=-5-2$$
$$\underline{\underline{x=-7}}$$

c)

$$\lg(3x-2)=2\lg x$$
$$\lg(3x-2)=\lg x^2$$
$$3x-2=x^2$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$\underline{\underline{x=1 \vee x=2}}$$

*Faktoriserer ved hjelp av "sum og produkt".*

*(Sjekker kjapt at begge løsningene er gyldige)*

## Oppgave 2

a)

$$\frac{4a^3\left(a^{-2}b^3\right)^2}{\left(2^{-1}\right)^{-2}ab^4}=\frac{4a^3\cdot a^{-4}\cdot b^6}{2^2ab^4}=a^{3-4-1}\cdot b^{6-4}=a^{-2}\cdot b^4=\underline{\underline{\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

b)

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}+1=\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x+1-2x+x^2-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x}{x+1}}}$$

## Oppgave 3

$x^2-3x+2\le 0$

Har fra oppgave 1c) at uttrykket på venstre side har nullpunktene $x=1$ og $x=2$.
Grafen til uttrykket på venstre side er en parabel som vender den hule siden opp ("smilemunn"), så det betyr at grafen ligger under *x*-aksen mellom nullpunktene.

$\underline{\underline{x^2-3x+2\le 0 \text{ når } 1\le x\le 2}}$

## Oppgave 4

Lar *x* være antall gullmedaljer og lar *y* være antall sølvmedaljer.
Da kan jeg sette opp følgende likningssett:

$I.\quad x+y=16$

$II.\quad 7x+5y=102$

Likning *I.* kan skrives om til $y=16-x$. Setter dette inn i likning *II.*:

$$7x+5(16-x)=102$$

$$7x+80-5x=102$$

$$2x=102-80$$

$$x=\frac{22}{2}$$

$$x=11$$

<u>Norge tok 11 gullmedaljer under vinter-OL i 2014</u>

## Oppgave 5

a) To kuler med samme farge kan skje på to måter – to blå eller to røde.

$$2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken er }\frac{1}{3}}}$$

b) To kuler med ulik farge kan skje på to måter – Rød, så blå, eller omvendt.
Vi tar utgangspunkt i at sannsynligheten for to kuler med ulik farge minker etter hvert som vi legger til kuler som har den ene av de to fargene.
Lar *x* være antall røde kuler som legges til i krukka og setter opp en likning der sannsynligheten for ulik farge skal være 50%.

$$\frac{2+x}{4+x}\cdot\frac{2}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{2+x}{3+x}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{4(4+2x)}{(4+x)(3+x)}=1$$

$$16+8x=(4+x)(3+x)$$

$$16+8x=12+4x+3x+x^2$$

$$x^2+7x+12-8x-16=0$$

$$x^2-x-4=0$$

$$gir$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vi velger den positive løsningen $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Denne verdien ligger mellom 2 og 3, så vi runder opp til 3.
Vi må altså legge til minst 3 røde kuler for at sannsynligheten for to ulike farger skal være under 50%.

<u>Det må ligge minst 5 røde kuler i krukka for at sannsynligheten for ulik farge er mindre enn 50 %</u>

*Slik denne løsningen utviklet seg, vil jeg si det egentlig er enklere å bare "prøve seg frem", altså å legge til røde kuler og bestemme den nye sannsynligheten, til denne er under 50 %. Eller det kan hende det finnes en enklere metode enn det jeg kom på i farten.*

## Oppgave 6

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$$

- Den vertikale asymptoten forteller at $x+c=0$ når $x=3$, så vi har $c=-3$.
- Når vi lar $x\to\infty$, kan vi si at $\frac{ax+b}{x+c}\approx\frac{ax}{x}=a$.
  Da forteller den horisontale asymptoten at vi må ha $a=-2$.
- $f(2)=0$, så $a\cdot 2+b=0$.
  Når vi da setter inn $a=-2$, får vi $b=4$.

$$\underline{\underline{a=-2\wedge b=4\wedge c=-3}}$$

## Oppgave 7

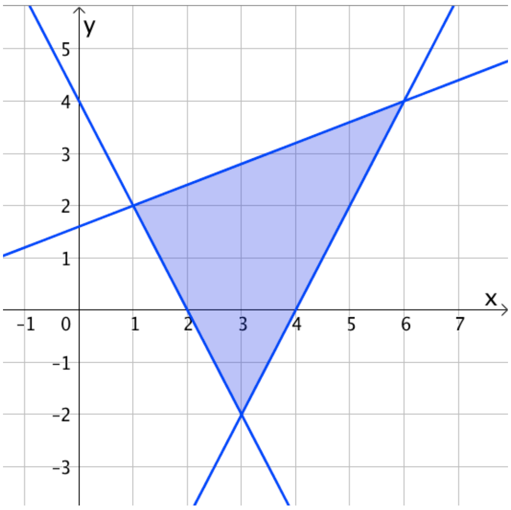
a) Ordner ulikhetene slik at jeg får $y$ alene på venstre side:

$$-2x+5y\le 8 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad 2x-y\le 8$$

$$5y\le 2x+8 \quad \text{og} \quad y\ge -2x+4 \quad \text{og} \quad -y\le -2x+8$$

$$y\le\frac{2}{5}x+\frac{8}{5} \qquad\qquad y\ge 2x-8$$

Tegner linjene jeg får likningen til når jeg erstatter ulikhetstegnene med likhetstegn i ulikhetene over og skraverer i henhold til ulikhetene.




b) Regner ut verdien av $-2x+3y$ når vi setter inn koordinatene til de ulike hjørnene.

Hjørnet $(1,2)$ gir $-2\cdot 1+3\cdot 2=-2+6=4$.

Hjørnet $(3,-2)$ gir $-2\cdot 3+3\cdot(-2)=-6-6=-12$

Hjørnet $(6,4)$ gir $-2\cdot 6+3\cdot 4=-12+12=0$

<u>Alle verdiene til uttrykket $-2x+3y$ ligger i intervallet $[-12,4]$ når $(x,y)$ ligger i $M$</u>

## Oppgave 8

$$g(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$$

a)

$$\frac{g\left(2\right)-g\left(\frac{3}{2}\right)}{2-\frac{3}{2}}=\frac{2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{8-6-0}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$\underline{\underline{\text{Den gjennomsnittlige vekstfarten til } g \text{ i intervallet } \left[\frac{3}{2},2\right] \text{ er } 4}}$$

b)

$$g'(x)=3x^2-3x$$

$$så$$

$$g'(2)=3\cdot 2^2-3\cdot 2=12-6=\underline{\underline{6}}$$

c) Vi har i fra b) at den ene tangenten tangerer grafen til $g$ i punktet $\left(2,g(2)\right)$.
Setter den deriverte lik 6 for å finne $x$-koordinaten til det andre tangeringspunktet.

$$3x^2-3x=6$$

$$x^2-x=2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$så$$

$$x=2 \vee x=-1$$

$$g(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2=8-6=2$$

$$g(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2=-1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Punktene } A \text{ og } B \text{ har koordinater } \left(-1,-\frac{5}{2}\right) \text{ og } \left(2,2\right)}}$$

## Oppgave 9

a) Omkretsen av rektangelet er 96 cm og sidene er *x* cm og *y* cm.
Da kan vi si at:

$$2x+2y=96$$
$$x+y=48$$
$$y=48-x$$

<u>Som skulle forklares.</u>

b) Volumet av sylinderen er $V=G\cdot h=\pi\cdot r^2\cdot h$, der *G* er en sirkel med omkrets *x*.

Da er radius i sirkelen $\frac{x}{2\pi}$.

$h=y=48-x$.

Dette gir

$$V(x)=\pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2(48-x)=\frac{\pi\cdot x^2}{4\pi^2}(48-x)=\frac{1}{4\pi}\cdot x^2(48-x)=\frac{1}{4\pi}\left(48x^2-x^3\right)$$

<u>Som skulle vises.</u>

c)

$$V(x)=\frac{48x^2}{4\pi}-\frac{x^3}{4\pi}=\frac{12}{\pi}x^2-\frac{1}{4\pi}x^3$$

*så*

$$V'(x)=\frac{24}{\pi}x-\frac{3}{4\pi}x^2$$

Setter den deriverte lik null.

$$V'(x)=0$$
$$\frac{24}{\pi}x-\frac{3}{4\pi}x^2=0 \quad |\cdot 4\pi$$
$$96x-3x^2=0 \quad |\cdot\frac{1}{3}$$
$$32x-x^2=0$$
$$x(32-x)=0$$

*så*

$$x=0 \vee x=32$$

Grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), så den er positiv mellom nullpunktene. Det betyr at den deriverte skifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet $x=32$.

Det forteller oss at $(32,V(32))$ er et toppunkt på grafen til *V*.

<u>Volumet av sylinderen blir størst mulig når *x* = 32</u>