# Løsningsforslag
# Matematikk R2
# Våren 2020

Krister J. Trandal
Kirkeparken videregående skole

## Del 1

### Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sin x \\ \Rightarrow f'(x) &= (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \underline{\underline{\sin x + x \cdot \cos x}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos(x^2)}{x} \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{(\cos(x^2))' \cdot x - \cos(x^2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-\sin(x^2) \cdot (x^2)' \cdot x - \cos(x^2) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{-2x^2 \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2)}{x^2} = \underline{\underline{-2\sin(x^2) - \frac{\cos(x^2)}{x^2}}} \end{aligned}$$

### Oppgave 2

a)

$$\int (x^2 + 3 + \mathrm{e}^{2x})\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C}}$$

b) Bruker substitusjonsmetoden (variabelskifte):
La $u = x^2$. Da er $du = 2xdx$, eller $dx = \dfrac{du}{2x}$, og

$$\int 6x \cdot \sin(x^2)\, dx = \int 6x \cdot \sin u \, \frac{du}{2x} = 3\int \sin u \, du = -3\cos u + C = \underline{\underline{-3\cos(x^2) + C}}$$

c) Bruker delvis integrasjon:
La $u = \ln x$ og $v' = x$. Da er $u' = \dfrac{1}{x}$ og $v = \dfrac{1}{2}x^2$. Det gir

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x \cdot \ln x \, dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\, dx = \frac{1}{2}\left[x^2 \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^2 \cdot \ln \mathrm{e} - 1^2 \cdot \ln 1\right] - \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^2 - 1^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

## Oppgave 3

a) For en aritmetisk rekke med differanse $d$ har vi at

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ s_n &= 1 + \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 3$, $n = 5$ og $s_5 = 55$ gir

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 \\ 55 &= \frac{3 + a_5}{2} \cdot 5 \\ 22 &= 3 + a_5 \\ a_5 &= 19 \end{aligned}$$

Det gir

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1)\cdot d \\ 19 &= 3 + 4 \cdot d \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Nå er

$$a_{10} = a_1 + (10-1)\cdot d = 3 + 9 \cdot 4 = 39$$

og

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{3 + 39}{2} \cdot 10 = 210$$

$\underline{\underline{\text{Summen av de 10 første leddene er 210.}}}$

b) Dette er en uendelig geometrisk rekke med kvotient

$$k = \frac{7/4}{7/2} = \frac{7/2}{7} = \frac{1}{2}$$

(to påfølgende ledd delt på hverandre). Ettersom $-1 < k < 1$, konvergerer rekken. Summen, eller grenseverdien rekken konvergerer mot, er gitt ved

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$$

$\underline{\underline{\text{Summen av rekken er 14.}}}$

## Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin(\pi x + \pi) \\ \Rightarrow f'(x) &= 2\cos(\pi x + \pi) \cdot (\pi x + \pi)' \\ f'(x) &= 2\pi \cos(\pi x + \pi) \end{aligned}$$

Topp- og bunnpunktene har x-koordinater som er løsninger av likningen $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2\pi\cos(\pi x + \pi) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \cos(\pi x + \pi) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \pi x + \pi &= \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x + 1 &= \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= k - \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, 3$ gir henholdsvis løsningene $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.
Andre k-verdier gir x-verdier utenfor intervallet $\langle 1, 3 \rangle$.

De tilhørende funksjonsverdiene er $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = -3$.

$\underline{\underline{\text{Toppunkter: } \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right)}}$

$\underline{\underline{\text{Bunnpunkter: } \left(\frac{1}{2}, -3\right), \left(\frac{5}{2}, -3\right)}}$

b) Skjæringspunktene mellom grafen og x-aksen har y-koordinat $y = 0$, og x-koordinater som er løsninger av likningen $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2\sin(\pi x + \pi) - 1 &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \sin(\pi x + \pi) &= \frac{1}{2} \\ &\Updownarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi x + \pi = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad &\vee \quad \pi x + \pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x + 1 = \frac{1}{6} + 2 \cdot k \quad &\vee \quad x + 1 = \frac{5}{6} + 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5}{6} + 2 \cdot k \quad &\vee \quad x = -\frac{1}{6} + 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$k = 0$ gir

$$x = -\frac{5}{6} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{6}$$

$k = 1$ gir

$$x = \frac{7}{6} \quad \vee \quad x = \frac{11}{6}$$

Andre k-verdier gir x-verdier utenfor $\langle 1, 3 \rangle$.

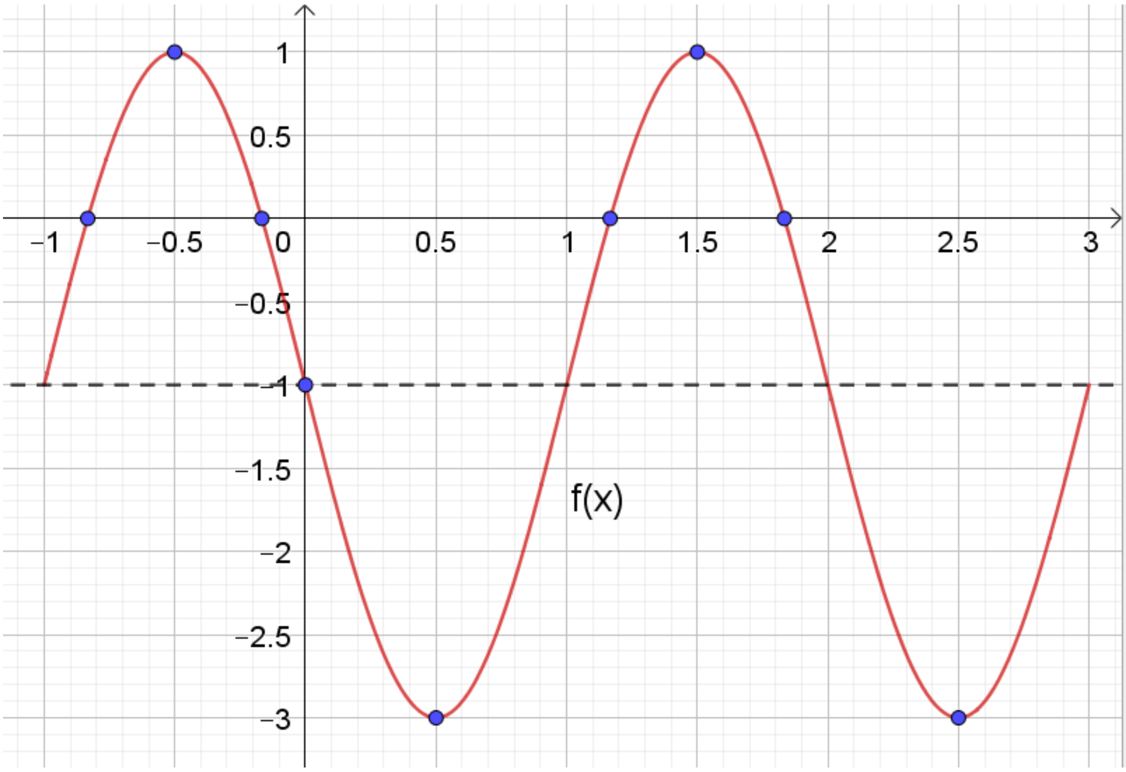
Skjæringspunktene mellom grafen og x-aksen er $\left(-\frac{5}{6}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{6}, 0\right)$, $\left(\frac{11}{6}, 0\right)$.

Skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen har x-koordinat $x = 0$, og y-koordinat gitt ved

$$y = f(0) = 2\sin(\pi \cdot 0 + \pi) - 1 = -1$$

Skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen er $(0, -1)$.

c) Skisse av grafen til $f$ sammen med likevektslinja $y = -1$:




## Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{AB} = [2-(-1), 2-3, 1-2] = \underline{\underline{[3, -1, -1]}}$$

$$\overrightarrow{AC} = [0-(-1), 1-3, 0-2] = \underline{\underline{[1, -2, -2]}}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \left[ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [2-2, -(-6+1), -6-(-1)] = \underline{\underline{[0, 5, -5]}}$$

b) Vi har at

$$\overrightarrow{AT} = [5-(-1), 3-3, 8-2] = [6, 0, 6]$$

Volumet av pyramiden (tetraederet) $ABCT$ er gitt ved

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{6}\left|[0, 5, -5] \cdot [6, 0, 6]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|0 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + (-5) \cdot 6\right| = \frac{1}{6}\left|-30\right| = 5$$

$\underline{\underline{\text{Volumet av pyramiden } ABCT \text{ er } 5.}}$

c) Likningen for et plan med normalvektor $\overrightarrow{n} = [a, b, c]$ gjennom et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ er gitt ved

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

En normalvektor for planet gjennom punktene $A$, $B$ og $C$ vil være $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Siden punktet $C(0, 1, 0)$ ligger i planet, blir likningen

$$\begin{aligned} 0 \cdot (x - 0) + 5 \cdot (y - 1) - 5 \cdot (z - 0) &= 0 \\ 5y - 5 - 5z &= 0 \\ y - z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Likningen for planet er $y - z - 1 = 0$, eventuelt $y - z = 1$.

## Oppgave 6

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med kvotient

$$k(x) = \frac{(\ln x)^2/2}{\ln x} = \frac{\ln x}{2}$$

Rekken konvergerer når $-1 < k(x) < 1$, altså

$$\begin{gathered} -1 < \frac{\ln x}{2} < 1 \\ \Updownarrow \\ -2 < \ln x < 2 \\ \Updownarrow \\ \mathrm{e}^{-2} < x < \mathrm{e}^{2} \end{gathered}$$

Rekken konvergerer når $x \in \langle \mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^{2} \rangle$.

b) Summen $s$ av en konvergent uendelig geometrisk rekke er

$$s = \frac{a_1}{1 - k}$$

hvor $a_1$ er det første leddet i rekken. Her er $a_1 = 2$, og vi får

$$s(x) = \frac{a_1}{1 - k(x)} = \frac{2}{1 - \frac{\ln x}{2}} = \frac{4}{2 - \ln x}$$

Vi løser likningen $s(x) = 4$ for $x$:

$$\begin{aligned} s(x) &= 4 \\ \frac{4}{2 - \ln x} &= 4 \\ 4 &= 4 \cdot (2 - \ln x) \\ \ln x &= 1 \\ x &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Hvis $x = \mathrm{e}$, blir summen av rekken 4.

## Oppgave 7

Løser likningen for $y'$:

$$\begin{aligned} 2x \cdot y' - 3y &= 0 \\ y' &= \frac{3y}{2x} \end{aligned}$$

Vi kan nå bruke differensiallikningen til å finne stigningstallet til tangenten til integralkurvene i ethvert punkt i planet. Vi gjør dette for punktene $A$, $B$, $C$ og $D$.
Punkt $A(2,2)$:

$$y' = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Dette stigningstallet samsvarer **ikke** med stigningstallet (tangentretningen) på figuren.

Punkt $B(-2,2)$:

$$y' = \frac{3 \cdot (-2)}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}$$

Dette stigningstallet samsvarer med stigningstallet (tangentretningen) på figuren.

Punkt $C(-2,-2)$:

$$y' = \frac{3 \cdot (-2)}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{2}$$

Dette stigningstallet samsvarer med stigningstallet (tangentretningen) på figuren.

Punkt $D(2,-2)$:

$$y' = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (-2)} = -\frac{3}{2}$$

Dette stigningstallet samsvarer **ikke** med stigningstallet (tangentretningen) på figuren.

## Oppgave 8

La $S(x_0, y_0, z_0)$ være sentrum av kula. La $l$ være linja gjennom $S$ og $P$, og la $m$ være linja gjennom $S$ og $Q$. Da står $l$ normalt på planet $\alpha$, og $m$ står normalt på planet $\beta$. En normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha}$ for planet $\alpha$ vil derfor være en retningsvektor for linja $l$, og tilsvarende vil en normalvektor $\overrightarrow{n_\beta}$ for planet $\beta$ være en retningsvektor for linja $m$. Normalvektorene kan vi lese rett fra likningene for planene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_\alpha} &= [-2, 2, -1] \\ \overrightarrow{n_\beta} &= [-7, 4, -4] \end{aligned}$$

Parameterframstillinger for $l$ og $m$ er derfor gitt ved

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2s \\ y = 7 + 2s \\ z = -1 - s \end{cases}$$

og

$$m : \begin{cases} x = -4 - 7t \\ y = 5 + 4t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$$

Skjæringspunktet mellom linjene er sentrum av kula, og vi finner skjæringspunktet ved å sette x-koordinatene lik hverandre, og tilsvarende for y- og z-koordinatene. Da får vi likningssystemet

$$-3 - 2s = -4 - 7t \tag{1}$$
$$7 + 2s = 5 + 4t \tag{2}$$
$$-1 - s = -2 - 4t \tag{3}$$

Likning (3) kan skrives

$$s = 1 + 4t$$

og innsetting av dette inn i likning (2) gir

$$\begin{aligned} 7 + 2(1 + 4t) &= 5 + 4t \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Dette gir da

$$\begin{aligned} s &= 1 + 4 \cdot (-1) \\ s &= -3 \end{aligned}$$

Disse verdiene oppfyller også likning (1):[1]

$$\begin{aligned} -3 - 2 \cdot (-3) &= 3 \quad \text{(venstre side)} \\ -4 - 7 \cdot (-1) &= 3 \quad \text{(høyre side)} \end{aligned}$$

Setter vi $t = -1$ i parameterframstillingen for $m$, får vi $x = 3$, $y = 1$ og $z = 2$.
Sentrum av kula er derfor $S(3, 1, 2)$. Videre er

$$\overrightarrow{SP} = [-3 - 3, 7 - 1, -1 - 2] = [-6, 6, -3]$$

Kulas radius er gitt ved

$$r = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Likningen for kula blir dermed

$$\underline{\underline{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9^2}}$$

## Oppgave 9

Vi er gitt følgen definert rekursivt ved

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

samt påstanden

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} \quad \text{for alle}\, x \in \mathbb{N}$$

**Steg 1**:

[1] Det er ikke nødvendig å sjekke dette for å løse oppgaven, men er det lurt å bekrefte at alle likningene er løst og at vi faktisk har funnet skjæringspunktet.

Vis at påstanden er sann for $n = 1$. Påstanden er da at

$$a_1 = \frac{1^2 + 1 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Som vi ser er $a_1 = 2$ (som den skal være), og påstanden er dermed sann for $n = 1$.

**Steg 2 (induksjonssteget)**:
Vis at *dersom* påstanden er sann for $n = k \geq 1$, så vil den også være sann for $n = k + 1$.
Anta at påstanden er sann for $n = k$, det vil si anta at

$$a_k = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

Når $n = k + 1$, har vi fra rekursjonsformelen $a_n = a_{n-1} + n$ at

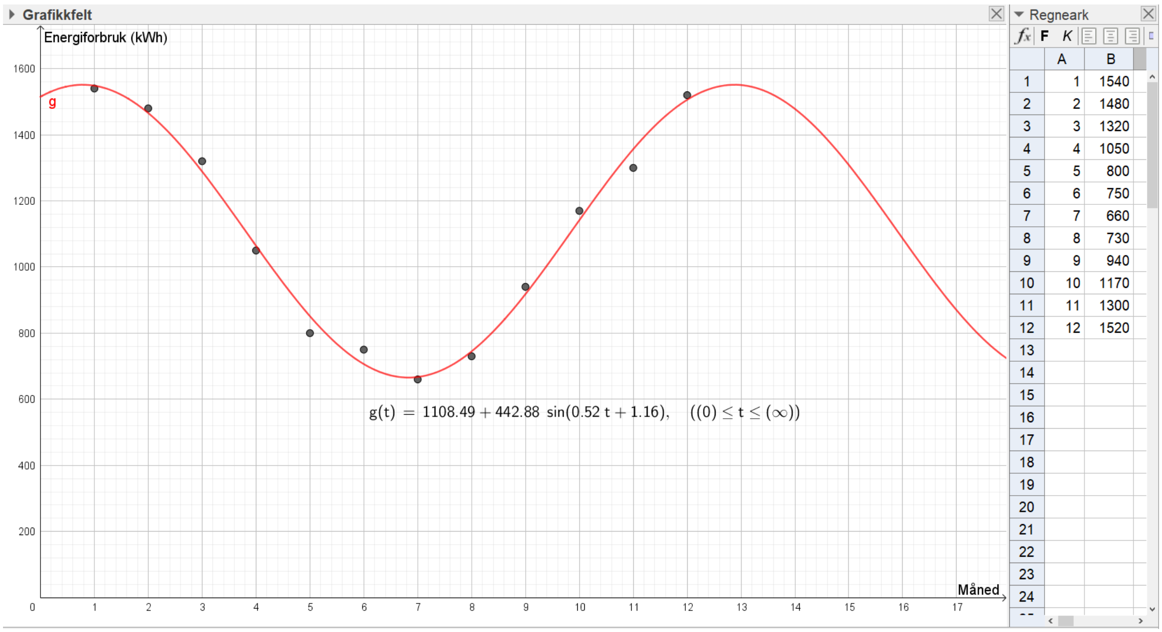
$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + (k+1) \\
a_{k+1} &= \frac{k^2 + k + 2}{2} + (k+1) \\
a_{k+1} &= \frac{k^2 + k + 2 + 2(k+1)}{2} \\
a_{k+1} &= \frac{(k^2 + 2k + 1) + (k+1) + 2}{2} \\
a_{k+1} &= \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}
\end{aligned}$$

Altså ser vi at dersom påstanden er sann for $n = k$, vil den også være sann for $n = k + 1$.
Og siden påstanden i tillegg er sann for $n = 1$, er den sann for alle $n \in \mathbb{N}$, ved induksjon. ■

# Del 2

## Oppgave 1

a) Jeg la inn dataene i et regneark i GeoGebra, og brukte regresjonsanalyse hvor jeg valgte en sinusfunksjon som modell. Grafen er tegnet for $t \geq 0$:




Vi ser av utklippet at en god modell som beskriver energiforbruket i 2019 er gitt ved

$$\underline{\underline{g(t) = 1108,49 + 442,88 \sin(0,52t + 1,16)}}$$

b) Jeg gjorde oppgaven i CAS:

| | |
|---|---|
| 1 | f(t) := 1300 + 730*sin(0.52t + 1.07) <br> ≈ **f(t) := 730 sin(0.52 t + 1.07) + 1300** |
| 2 | g(t) := f'(t) <br> ≈ **g(t) := 379.6 cos(0.52 t + 1.07)** |
| 3 | Ekstremalpunkt(g, 6, 12) <br> → **(10.03, 379.6)** |

Forbruket $f(t)$ øker raskest der $f'(t)$ er størst. Jeg fant $f'(t)$ i CAS, og brukte kommandoen **Ekstremalpunkt** til å finne hvor $f'(t)$ er størst på intervallet $[0, 12]$. I linje 3 bør det egentlig stå **Ekstremalpunkt(g, 0, 12)**, men da fant CAS bare bunnpunktet for den deriverte, og ikke toppunktet som vi er ute etter. I kommandolinja funker det derimot å skrive Ekstremalpunkt(g, 0, 12).
Vi ser at energiforbruket øker raskest når $t \approx 10,03$, altså i oktober.

c) Integralet er regnet ut i CAS:

| | |
|---|---|
| 4 | Integral(f, t, 0, 12) |
| | ≈ **15547.46** |

Det er altså et årlig forbruk på omtrent $15547,46$ kWh.

d) Hvis $f(t)$ er energiforbruk i kWh per måned, og $p(t)$ er pris i kroner per kWh, så representerer funksjonen $f(t) \cdot p(t)$ pris i kroner per måned. Den årlige energikostnaden i kroner er derfor gitt ved

$$\int_0^{12} f(t) \cdot p(t)\, dt$$

Integralet er regnet ut i CAS:

| | |
|---|---|
| 5 | p(t) := 0.85 + 0.17*sin(0.52t + 1.07) |
| | ≈ $p(t) := 0.17 \sin(0.52\, t + 1.07) + 0.85$ |
| 6 | Integral(f*p, t, 0, 12) |
| | ≈ **13941.45** |

Som vi ser er den årlige energikostnaden omtrent 13941,45 kr.

## Oppgave 2

a) Hvis $M(t)$ er massen igjen etter tiden $t$, så er $M'(t)$ den (momentane) vekstfarten ved tiden $t$. At vekstfarten $M'$ er proporsjonal med massen $M$ betyr nettopp at

$$M' = k \cdot M$$

for en konstant $k$.
Vi har at $M > 0$ (masse er alltid positivt), og siden massen *avtar*, vil $M' < 0$. Da må nødvendigvis $k < 0$ fra likningen over.

b) **Ved regning:**

Likningen $M' = k \cdot M$ er en separabel differensiallikning. Vi finner først den generelle løsningen:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= k \cdot M \\
\frac{1}{M}\,dM &= k\,dt \\
\int \frac{1}{M}\,dM &= \int k\,dt \\
\ln|M| &= kt + c_1 \\
M = \pm e^{c_1 + kt} &= \pm e^{c_1} \cdot e^{kt} = C \cdot e^{kt}
\end{aligned}$$

hvor $C = \pm e^{c_1}$. Altså er $M(t) = C \cdot e^{kt}$.
Den første betingelsen er at $M(0) = 100$. Det gir

$$M(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C = 100$$

Så $C = 100$ og $M(t) = 100 \cdot e^{kt}$.
Den andre betingelsen er at $M(6) = 97$. Det gir

$$\begin{aligned}
M(6) = 100 \cdot e^{k \cdot 6} &= 97 \\
e^{6k} &= \frac{97}{100} \\
&\Updownarrow \\
6k &= \ln(0,97) \\
k &= \tfrac{1}{6} \cdot \ln(0,97)
\end{aligned}$$

Nå er

$$M(t) = 100 \cdot e^{\frac{1}{6} \cdot \ln(0,97) \cdot t} = 100 \cdot \left(e^{\ln(0,97)}\right)^{\frac{t}{6}} = 100 \cdot 0,97^{\frac{t}{6}}.$$

Funksjonsuttrykket er altså gitt ved $M(t) = 100 \cdot 0,97^{\frac{t}{6}}$.

**Ved hjelp av CAS:**

Jeg bruker LøsODE, hvor jeg la inn likningen samt betingelsen at massen er 100 mg ved tiden $t = 0$. Så fant jeg $k$ ved å legge inn betingelsen at massen er 97 mg ved tiden $t = 6$:

| | |
|---|---|
| 1 | LøsODE(y' = k * y, (0, 100)) <br> → $y = 100\, e^{kx}$ |
| 2 | Løs(97 = 100e^(k * 6), k) <br> → $\left\{k = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{97}{100}\right)\right\}$ |
| 3 | M(t) := 100e^(1/6 * ln(97/100) * t) <br> → $M(t) := 100\, e^{\frac{1}{6} t \ln\left(\frac{97}{100}\right)}$ |

Som vi ser i linje 3 er funksjonsuttrykket $M(t) = 100 \cdot e^{\frac{1}{6} \ln\left(\frac{97}{100}\right)} = 100 \cdot 0,97^{\frac{t}{6}}$.

c) **Ved regning:**

Vi løser likningen $M(t) = 2$ for $t$:

$$
\begin{aligned}
M(t) &= 2 \\
100 \cdot 0,97^{\frac{t}{6}} &= 2 \\
0,97^{\frac{t}{6}} &= 0,02 \\
&\Updownarrow \\
\frac{t}{6} \cdot \ln(0,97) &= \ln(0,02) \\
t &= 6 \cdot \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,97)} \\
t &\approx 770,61
\end{aligned}
$$

Det tar omtrent 771 timer før massen er 2 mg.

**Ved hjelp av CAS:**

Jeg løser likningen $M(t) = 2$ i CAS:

| | |
|---|---|
| 4 | Løs(M(t) = 2, t) |
| | ≈ **{t = 770.61}** |

Det tar omtrent 771 timer før massen er 2 mg.

d) Massen minker med mindre enn 0,2 mg per time når $M'(t) > -0,2$.
Fra differensiallikningen er dette det samme som ulikheten $k \cdot M > -0,2$.

**Ved regning:**

Jeg løser ulikheten $k \cdot M > -0,2$:

$$
\begin{aligned}
k \cdot M &> -0,2 \\
\frac{1}{6}\ln(0,97) \cdot 100 \cdot 0,97^{\frac{t}{6}} &> -0,2 \\
0,97^{\frac{t}{6}} &> \frac{6 \cdot (-0,2)}{100 \cdot \ln(0,97)} \\
0,97^{\frac{t}{6}} &> \frac{-0,012}{\ln(0,97)} \\
&\Updownarrow \\
\frac{t}{6} \cdot \ln(0,97) &> \ln\left(\frac{-0,012}{\ln(0,97)}\right) \\
t &> \frac{6}{\ln(0,97)} \cdot \ln\left(\frac{-0,012}{\ln(0,97)}\right) \\
t &> 183,49
\end{aligned}
$$

Stoffet er ikke lenger helsefarlig etter omtrent 183,5 timer.

**Ved hjelp av CAS:**

Jeg løser ulikheten $k \cdot M > -0,2$ i CAS:

```
5   Løs(1/6*ln(0.97)*M > -0.2)
    ≈ {t > 183.49}
```

Stoffet er ikke lenger helsefarlig etter omtrent 183,5 timer.

## Oppgave 3

a) La $a_n$ være lengden av papiret på runde nummer $n$. Da har vi at

$$\begin{aligned}a_1 &= \pi \cdot d\\ a_2 &= \pi \cdot (d + 0,03) = \pi \cdot d + \pi \cdot 0,03\\ a_2 &= \pi \cdot (d + 0,06) = \pi \cdot d + \pi \cdot 0,06\end{aligned}$$

og så videre. Dette er en aritmetisk rekke med differanse $\delta = \pi \cdot 0,03$ (bruker $\delta$ siden $d$ og $D$ er tatt).
For en aritmetisk rekke med differanse $\delta$ har vi at

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1) \cdot \delta\\ s_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\end{aligned}$$

Lengden av papiret på runde 50 er

$$a_{50} = a_1 + (50-1) \cdot \delta = \pi \cdot d + 49 \cdot 0,03\pi = 5,00\pi + 49 \cdot 0,03\pi = 6,47\pi$$

Den totale lengden på rullen er

$$s_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{5,00\pi + 6,47\pi}{2} \cdot 50 = 286,75\pi \approx 900,85$$

Det er altså omtrent 9,01 m med papir når det er 50 runder igjen på rullen.

b) Når $D = 20,00$ cm, vil tykkelsen til alle lagene utgjøre en total tykkelse på

$$\frac{D-d}{2} = \frac{15,00\,\text{cm}}{2} = 7,50\,\text{cm}.$$

Siden papiret er $0,015$ cm tykt, vil dette tilsvare

$$\frac{7,50\,\text{cm}}{0,015\,\text{cm per runde}} = 500\,\text{runder}$$

Altså er $n = 500$, og vi har at

$$\begin{aligned}a_{500} &= a_1 + (500-1) \cdot \delta = 5,00\pi + 499 \cdot 0,03\pi = 19,97\pi\\ s_{500} &= \frac{a_1 + a_{500}}{2} \cdot 500 = \frac{5,00\pi + 19,97\pi}{2} \cdot 500 \approx 19611,39\end{aligned}$$

Når $D = 20,00$ cm, er det omtrent 196,11 m papir igjen på rullen.

c) Vi har at

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot\delta \\ s_n &= \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \\ s_n &= \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\cdot\delta}{2}\cdot n \\ s_n &= a_1\cdot n + \tfrac{1}{2}(n-1)\delta\cdot n \end{aligned}$$

Med $a_1 = 5,00\pi$, $s_n = 50000$ og $\delta = 0,03\pi$, blir dette

$$50000 = 5,00\pi\cdot n + 0,015\pi\cdot n\cdot(n-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$0,015\pi\cdot n^2 + 4,985\pi\cdot n - 50000 = 0$$

Løser denne andregradslikningen i CAS:

| | |
|---|---|
| 1 | 0.015 * pi * n^2 + 4.985 * pi * n - 50000 = 0 <br> ≈ **$0.047\, n^2 + 15.661\, n - 50000 = 0$** |
| 2 | Løs($1) <br> ≈ **$\{n = -1209.548, n = 877.215\}$** |

Så $n \approx 877$, som betyr at det tar omtrent 877 runder. Tykkelsen $D$ finner vi nå slik:

$$\frac{D-d}{2\cdot 0,015\,\text{cm}} = 877$$

$$\Updownarrow$$

$$D = 877\cdot 0,03\,\text{cm} + 5,00\,\text{cm} = 31,31\,\text{cm}$$

Når det er 500 meter med papir på rullen, er diameteren $D$ omtrent 0,31 m.

## Oppgave 4

Oppgaven er løst i CAS. Jeg begynner med å legge inn punktene $A$, $B$, $C$ og $D$:

| | |
|---|---|
| 1 | A := (-1, -1, 2) |
| | → $A := (-1, -1, 2)$ |
| 2 | B := (3, 4, -1) |
| | → $B := (3, 4, -1)$ |
| 3 | C := (5, 3, 1) |
| | → $C := (5, 3, 1)$ |
| 4 | D := (5, 6, 4) |
| | → $D := (5, 6, 4)$ |

Så finner jeg en parameterframstilling for linja $l$, og likningen for planet $\alpha$:

| | |
|---|---|
| 5 | l := Linje(A, D) |
| | → $\ell : X = (-1, -1, 2) + \lambda (6, 7, 2)$ |
| 6 | α := Plan(A, B, C) |
| | → $\alpha : x \cdot 7 + y (-14) + z (-14) = -21$ |

Altså har vi at

$$l : \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -1 + 7t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

La $S$ være sentrum av kula. Siden $S$ ligger på linja $l$, må $S$ ha koordinater gitt ved $S(-1 + 6t, -1 + 7t, 2 + 2t)$.
Siden kula har radius 8 og tangerer planet $\alpha$, må avstanden $d(t)$ fra $S$ til planet være lik 8. Vi løser så likningen $d(t) = 8$ for $t$, før vi til slutt setter inn for disse t-verdiene i $S$:

| | |
|---|---|
| 7 | S(t) := (-1 + 6t, -1 + 7t, 2 + 2t) |
| | → $S(t) := (6t - 1, 7t - 1, 2t + 2)$ |
| 8 | d(t) := Avstand(S, α) |
| | → $d(t) := 4 \lvert t \rvert$ |
| 9 | Løs(d(t) = 8, t) |
| | → $\{t = -2, t = 2\}$ |
| 10 | S(-2) |
| | → $(-13, -15, -2)$ |
| 11 | S(2) |
| | → $(11, 13, 6)$ |

Koordinatene til $S$ er derfor enten $S(-13, -15, -2)$, eller $S(11, 13, 6)$.