Løsningsforslag
Matematikk R2

Krister J. Trandal
Kirkeparken videregående skole

24. mai 2019

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = 3\sin(4x+1) + x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{12\cos(4x+1)+1}}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) = 4\sin x \cdot \cos x \Rightarrow g'(x) &= 4(\sin x)' \cdot \cos x + 4\sin x \cdot (\cos x)' \\ &= 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = \underline{\underline{4\cos(2x)}} \end{aligned}$$

Vi har brukt at $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ for å komme til siste svar.

Oppgave 2

a)

$$\int (x^4 - x^2)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + C}}$$

b) Bruker substitusjonsmetoden (variabelskifte):
La $u = -x^2$. Da er $du = -2xdx$, og

$$\int 4x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int 4x \cdot \mathrm{e}^u \,\frac{du}{-2x} = -2\int \mathrm{e}^u\,du = -2\mathrm{e}^u + C = \underline{\underline{-2\mathrm{e}^{-x^2} + C}}$$

c) Faktoriserer nevneren i brøken, og spalter brøken i to nye brøker med lineære nevnere (delbrøkoppspalting):

$$\frac{4}{x^2-2x-3} = \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad \Big| \cdot (x+1)(x-3)$$
$$4 = A(x-3) + B(x+1)$$

$x = 3$ gir $4 = 4B \Leftrightarrow B = 1$.
$x = -1$ gir $4 = -4A \Leftrightarrow A = -1$.
Nå er

$$\int \frac{4}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right) dx$$
$$= -\ln|x+1| + \ln|x-3| + C = \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C}}$$

Oppgave 3

a) Vi har at differansen $d = 4$, og $a_1 = 1$. Videre er

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 4$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{a_n - 1}{4} + 1 = \frac{157-1}{4} + 1 = 40$$

Summen blir

$$s_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2}\cdot 40 = \frac{1+157}{2}\cdot 40 = \underline{\underline{3160}}$$

b) Vi har at

$$a_6 = a_3 \cdot k^3$$
$$\frac{1}{27} = 1\cdot k^3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Den uendelige rekka konvergerer ettersom $-1 < k < 1$.
Vi finner at $a_1 = \frac{a_3}{k^2} = 9$, og summen blir

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{27}{2}}}$$

Oppgave 4

Punktet B har koordinater $B(a,0)$, ettersom nullpunktet til f på positiv x-akse er $x = a$. Toppunktet har x-koordinat som tilfredsstiller $f'(x) = -2x = 0$, altså $x = 0$. Så D har koordinater $D(0,a^2)$. Rektangelet har altså bredde a og høyde a^2, som gir arealet a^3.
Arealet av det fargelagte området er gitt ved

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

Altså er arealet av det fargelagte området $\frac{2}{3}$ av rektangelets areal. ∎

Oppgave 5

a)

Det holder å vise at koordinatene til hvert punkt tilfredsstiller likningen for planet.
Punkt A:

$$3 - 4 \cdot 1 + 0 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

Punkt B:

$$3 - 4 \cdot 2 + 4 + 1 = 3 - 8 + 4 + 1 = 0$$

Punkt C:

$$-1 - 4 \cdot 1 + 4 + 1 = -1 - 4 + 4 + 1 = 0$$

Så punktene A, B og C ligger i planet α. ∎

b) Vektoren $n_\alpha = [1,-4,1]$ er en normalvektor for planet α. Dette vil også være en retningsvektor $\overrightarrow{r}$ for linja l, altså $\overrightarrow{r} = [1,-4,1]$. Siden linja går gjennom punktet A, får vi parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

c) Siden kuleflaten tangerer i A, tangerer den også planet α. Vi kaller sentrum til kuleflaten for $S(x_0, y_0, z_0)$. Vektoren $\overrightarrow{SA}$ vil være parallell med $\overrightarrow{n_\alpha}$, og med $\overrightarrow{r}$. Punktet S vil altså ligge langs linja l, og vil derfor ha koordinater gitt ved parameterframstillingen i oppgave b), altså $S(3+t, 1-4t, t)$. Det gir

$$\overrightarrow{SA} = [-t, 4t, -t]$$
$$\Downarrow$$
$$r = \left|\overrightarrow{SA}\right| = \sqrt{(-t)^2 + (4t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{18t}$$

Likningen for kuleflaten blir

$$\begin{aligned}(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 &= r^2 \\ (x-(3+t))^2 + (y-(1-4t))^2 + (z-t)^2 &= \left(\sqrt{18t}\right)^2 \\ (x-3-t)^2 + (y-1+4t)^2 + (z-t)^2 &= 18t\end{aligned}$$

d) Hvis punktet P ligger på kuleflaten, må koordinatene til P tilfredsstille kulelikningen:

$$\begin{aligned}(4-3-t)^2 + (1-1-4t)^2 + (1-t)^2 &= 18t^2 \\ (1-t)^2 + (-4t)^2 + (1-t)^2 &= 18t^2 \\ 1 - 2t + t^2 + 16t^2 + 1 - 2t + t^2 &= 18t^2 \\ -4t + 2 &= 0 \\ t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dette gir

$$S(3+t, 1-4t, t) = \underline{\underline{S\left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)}}$$

Oppgave 6

a)

$$\sin(2x) = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}2x &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$k = 0$ gir $x = \frac{\pi}{4}$, og $k = 1$ gir $x = \frac{5\pi}{4}$ (ingen andre k gir løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$)
Løsningene er

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}}}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi x) + \sqrt{3}\cos(\pi x) &= 0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\cos(\pi x)} \\
\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} + \sqrt{3}\,\frac{\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} &= 0 \\
\tan(\pi x) &= -\sqrt{3} \\
&\Updownarrow \\
\pi x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi \quad &\vee \quad \pi x = \frac{5\pi}{3} + k\cdot\pi \\
x = \frac{2}{3} + k \quad &\vee \quad x = \frac{5}{3} + k, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Løsningene som ligger innenfor intervallet $[0,2]$ er

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right\}}}$$

Oppgave 7

Når $x > 0$, er $y' = 2x > 0$. I retningsdiagram A har alle tangentene positiv stigning ($y' > 0$) i første og fjerde kvadrant (dvs. der $x > 0$). Det betyr at retningsdiagram A hører til likning 3. Hvis vi ser på retningsdiagram B for en konstant x-verdi, ser vi at tangentene får lavere stigningstall (i absoluttverdi) når y går mot null (dvs. når vi nærmer oss x-aksen). I likning 2 vil y' gå mot null når y går mot null (og x holdes konstant). Altså hører retningsdiagram B til likning 2, og retningsdiagram C til likning 1.

Oppgave 8

Steg 1. Først må vi vise at påstanden er sann for $n = 1$:
Påstanden er da at

$$
\begin{aligned}
3\cdot 4 &= 1\cdot(1+1)\cdot(1+5) \\
12 &= 1\cdot 2\cdot 6
\end{aligned}
$$

Påstanden er altså sann for $n = 1$.
Steg 2. Så må vi vise at *dersom* påstanden er sann for $n = k \geq 1$, så vil den også være sann for $n = k+1$:
Anta at påstanden er sann for $n = k$, dvs. anta at

$$3\cdot 4 + 6\cdot 5 + 9\cdot 6 + \cdots + (3k)\cdot(k+3) = k\cdot(k+1)\cdot(k+5) \qquad \Big| + (3(k+1))\cdot(k+1+3)$$

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 4 + 6\cdot 5 + 9\cdot 6 + \cdots + (3k)\cdot(k+3) + (3(k+1))\cdot(k+1+3) \\
&= k(k+1)(k+5) + 3(k+1)(k+1+3) = (k+1)(k^2+5k+3k+12) = (k+1)(k^2+8k+12) \\
&= (k+1)(k+2)(k+6) = (k+1)(k+1+1)(k+1+5)
\end{aligned}
$$

Så dersom påstanden er sann for $n = k$, vil den også være sann for $n = k+1$.
Påstanden er derfor sann for alle $n \in \mathbb{N}$, ved induksjon. ■

Oppgave 9

a) **Alternativ I**

$$y' = k \cdot \sqrt{y}$$

hvor $y > 0$, siden y representerer en høyde. Slik vi har skrevet likningen krever vi at $k < 0$, ettersom høyden skal *avta* (vannet lekker ut).

Alternativ II

$$y' = -k \cdot \sqrt{y}$$

hvor $y > 0$, siden y representerer en høyde. Slik vi har skrevet likningen krever vi at $k > 0$ (som betyr at $-k < 0$), ettersom høyden skal *avta* (vannet lekker ut).

b) **Alternativ I**
Likningen løses som en separabel differensiallikning:

$$\begin{aligned} y' &= k\sqrt{y} \\ \frac{dy}{dt} &= ky^{\frac{1}{2}} \\ y^{-\frac{1}{2}}\,dy &= k\,dt \\ \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy &= \int k\,dt \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= kt + C \\ \sqrt{y} &= \frac{1}{2}kt + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Det første kravet er at $y = 100$ når $t = 0$. Det gir

$$\begin{aligned} \sqrt{100} &= \frac{1}{2}k \cdot 0 + \frac{C}{2} \\ 10 &= \frac{C}{2} \\ C &= 20 \\ &\Downarrow \\ \sqrt{y} &= \frac{1}{2}kt + 10 \end{aligned}$$

Det andre kravet er at $y = 81$ når $t = 2$. Det gir

$$\begin{aligned} \sqrt{81} &= \frac{1}{2}k \cdot 2 + 10 \\ 9 &= k + 10 \\ k &= -1 \\ &\Downarrow \\ \sqrt{y} &= 10 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Tanken er tom når $y = 0$, som gir

$$\begin{aligned} 0 &= 10 - \frac{1}{2}t \\ t &= 20 \end{aligned}$$

<u>Tanken er tom etter 20 timer.</u>
Alternativ II
Samme fremgangsmåte som over, men hvor vi får

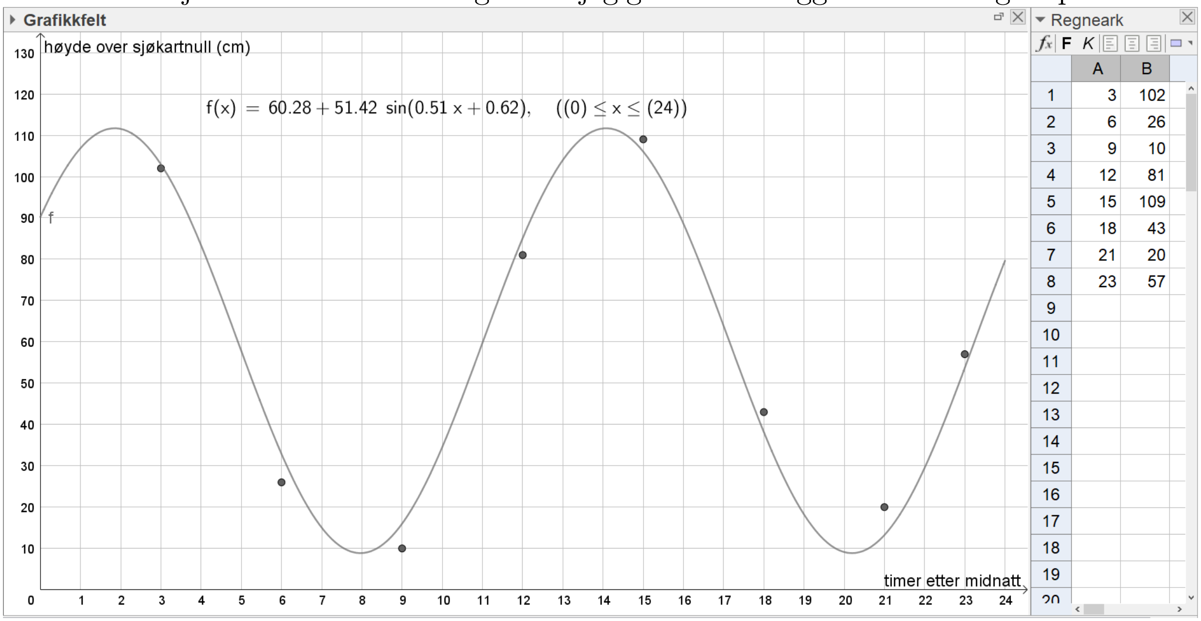
$$\sqrt{y} = -\frac{1}{2}kt + 10$$

Kravet om at $y(2) = 81$ gir $k = 1$, og løsningen blir som over.

Del 2

Oppgave 1

a) Jeg la inn dataene i et regneark i GeoGebra, og brukte regresjonsanalyse hvor jeg valgte en sinusfunksjon som modell. Så avgrenset jeg grafen til å ligge mellom 0 og 24 på x-aksen:



Vi ser av utklippet at en god modell som beskriver vannstanden i dette tidsrommet er gitt ved

$$\underline{\underline{f(x) = 51,42 \cdot \sin(0,51x + 0,62) + 60,28}}$$

b) Vi har et funksjonsuttrykk på formen

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \phi) + d$$

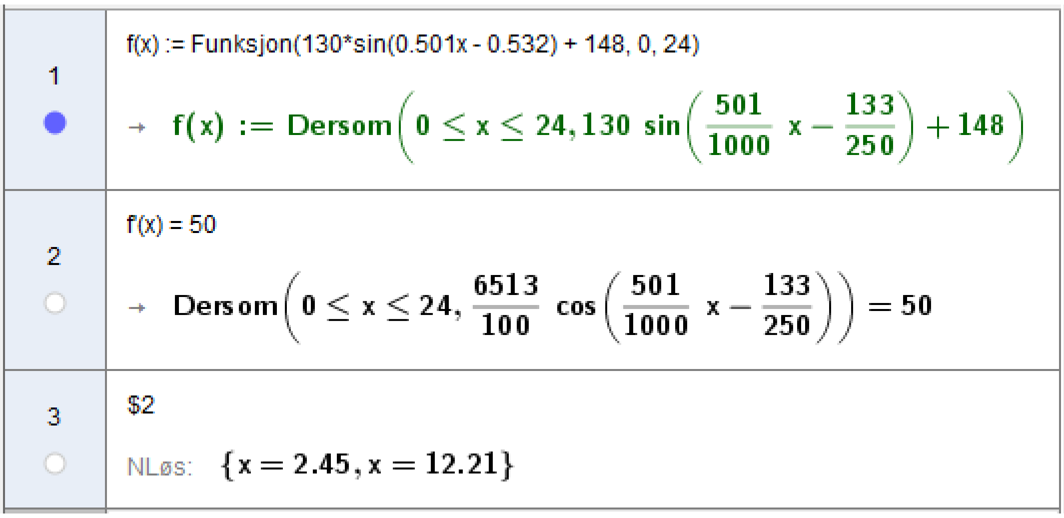
Perioden T er gitt ved

$$T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{0,501} \approx 12,5$$

Perioden forteller at det tar omtrent 12,5 timer mellom hver gang vannstanden er like høyt over sjøkartnull og samtidig er på vei enten opp eller ned (tidevann).

c) $y = d = 148$ er bølgens likevektslinje, eller høyden en rolig vannstand uten bølgeutslag har over sjøkartnull.
Tallet $A = 130$ er bølgens amplitude eller maksimale utslag over likevektslinja.

d) Løser likningen $f'(x) = 50$ i CAS:



Vannstanden øker med 50 cm per time 2,45 timer og 12,21 timer etter midnatt.

Oppgave 2

a) Med punktene $O(0,0,0)$, $P(2,4,-3)$ og $Q(0,0,1)$ får vi at

$$\overrightarrow{OP} = [2,4,-3], \quad \overrightarrow{PQ} = [-2,-4,4]$$

Hvis kulas sentrum er S og kulas radius er r, har vi at

$$r = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

og

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = [2,4,-3] + \frac{1}{2}[-2,-4,4] = [1,2,-1]$$

Så kula har sentrum i $S(1,2,-1)$. Det gir likningen

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = 3^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

b) Punktet på kuleflaten som ligger nærmest planet (og punktet som ligger lengst unna) må ligge på linja l som står normalt på planet α og går gjennom sentrum $S(1,2,-1)$. Planet α har normalvektor $n_\alpha = [1,-1,1]$, og siden linja går i gjennom S, får vi at

$$l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Setter koordinatene fra parameterframstillingen inn i likningen for kula:

$$\begin{aligned} (1+t-1)^2 + (2-t-2)^2 + (-1+t+1)^2 &= 9 \\ 3t^2 &= 9 \\ t &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Avstanden mellom et punkt på linja l og planet α er gitt ved

$$D(t) = \frac{|1 \cdot (1+t) - 1 \cdot (2-t) + 1 \cdot (-1+t) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|3t-9|}{\sqrt{3}} = \frac{3\,|t-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,|t-3|$$

Det er verdien $t = \sqrt{3}$ som gir den minste verdien for $D(t)$. Så den minste avstanden mellom K og α er $\sqrt{3}\left|\sqrt{3}-3\right| = \sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{3\sqrt{3}-3}}$.

c)

Vi ser av likningen for β at en normalvektor for planet β er $\overrightarrow{n_\beta} = [2,1,t]$. Vi skriver likningen om til $2x + y + tz + (1-3t) = 0$, og bruker igjen avstandsformelen for punkt til plan:

$$d(t) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + t \cdot (-1) + 1 - 3t|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + t^2}} = \frac{|5-4t|}{\sqrt{5+t^2}}$$

■

d) Planet β tangerer kuleflaten K når avstanden fra sentrum S til planet β er lik kulas radius. Altså må vi ha at

$$\begin{aligned} d(t) = \frac{|5-4t|}{\sqrt{5+t^2}} &= 3 \\ |5-4t| &= 3\sqrt{5+t^2} \\ |5-4t|^2 &= \left(3\sqrt{5+t^2}\right)^2 \\ 25 - 40t + 16t^2 &= 9(5+t^2) \\ 7t^2 - 40t - 20 &= 0 \end{aligned}$$

Andregradsformelen (abc-formelen) gir at

$$\underline{\underline{t = \frac{20+6\sqrt{15}}{7} \quad \vee \quad t = \frac{20-6\sqrt{15}}{7}}}$$

Oppgave 3

a) Vi ser at hvert rektangel har bredde 1. Hvert rektangel har en høyde gitt ved $\dfrac{1}{k^2}$, hvor k er den x-verdien som ligger lengst til høyre (endepunktet) innenfor for hvert intervall (rektangel). Hvis A_k er arealet av rektangel nummer k, er

$$A_1 = 1 \cdot \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1^2}, \quad A_2 = 1 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}, \quad \ldots, \quad A_k = 1 \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Ettersom $\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx$ representerer arealet under grafen fra $x = 1$ til $x = k$, er det klart fra figuren at

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

b) La

$$S_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}$$

Da er

$$S_k \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^k = 2 - \frac{1}{k} < 2 \quad (\text{når}\, k \geq 1)$$
$$\Downarrow$$
$$S_k < 2$$
$$\Downarrow$$
$$S = \lim_{k\to\infty} S_k < \lim_{k\to\infty} 2$$
$$S < 2$$

c) Utregninger fra CAS:

1	Sum(1/x^2, x, 1, inf) ✓ $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$
2	\$1 → $\frac{1}{6}\pi^2$

Altså er $\underline{\underline{S = \frac{\pi^2}{6}}}$.

Oppgave 4

a) Likningen for sirkelen blir

$$
\begin{aligned}
(x-0)^2 + (y-5)^2 &= 2^2 \\
x^2 + (y-5)^2 &= 2^2
\end{aligned}
$$

Vi skriver om denne likningen:

$$
\begin{aligned}
(y-5)^2 &= 4 - x^2 \\
\sqrt{(y-5)^2} &= \sqrt{4-x^2} \\
y - 5 &= \pm\sqrt{4-x^2} \\
y &= 5 \pm \sqrt{4-x^2}
\end{aligned}
$$

Vi får altså to funksjoner, $f(x) = 5 + \sqrt{4-x^2}$ og $g(x) = 5 - \sqrt{4-x^2}$, som beskriver henholdsvis øvre og nedre halvdel av sirkelen.

b) Volumet av omdreininglegemet blir

$$V_1 - V_2 = \int_{-2}^{2} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx - \int_{-2}^{2} \pi \cdot (g(x))^2 \, dx$$

Integrasjonsgrensene er løsningene av likningen

$$4 - x^2 = 0$$

Utregninger fra CAS:

1	f(x) := 5 + sqrt(4 - x^2) → $f(x) := \sqrt{-x^2+4} + 5$
2	g(x) := 5 - sqrt(4 - x^2) → $g(x) := -\sqrt{-x^2+4} + 5$
3	V_1 := Integral(pi*f^2, -2, 2) → $V_1 := \frac{60\pi^2 + 332\pi}{3}$
4	V_2 := Integral(pi*g^2, -2, 2) → $V_2 := \frac{-60\pi^2 + 332\pi}{3}$
5	V_1 - V_2 → $40\pi^2$

Volumet av omdreiningslegemet er $40\pi^2$

c) Utledningen er som i oppgave a, men nå er funksjonene f og g gitt som

$$f(x) = 7 + \sqrt{3^2 - (x-2)^2}$$
$$g(x) = 7 - \sqrt{3^2 - (x-2)^2}$$

Integrasjonsgrensene er løsningene av likningen

$$\begin{aligned} 3^2 - (x-2)^2 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 9 \\ x = 5 \quad &\vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Volumet av omdreiningslegemet blir

$$V_1 - V_2 = \int_{-1}^{5} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx - \int_{-1}^{5} \pi \cdot (g(x))^2 \, dx$$

Utregninger fra CAS:

1	f(x) := 7 + sqrt(9 - (x-2)^2) → $f(x) := \sqrt{-x^2 + 4x + 5} + 7$
2	g(x) := 7 - sqrt(9 - (x-2)^2) → $g(x) := -\sqrt{-x^2 + 4x + 5} + 7$
3	V_1 := Integral(pi*f^2, -1, 5) → $V_1 := 63\pi^2 + 330\pi$
4	V_2 := Integral(pi*g^2, -1, 5) → $V_2 := -63\pi^2 + 330\pi$
5	V_1 - V_2 → $126\pi^2$

Volumet av omdreiningslegemet er $126\pi^2$