Løsningsforslag til eksamen i Matematikk S2 V2013

Del 1

Oppgave 1

a) Vi bruker produktregelen.

$$f'(x) = (x)' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})' = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = \underline{\underline{(2x+1)e^{2x}}}$$

b) Vi bruker brøkregelen.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x-1)' \cdot (x^2-3) - (x-1) \cdot (x^2-3)'}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2-3) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 3 - 2x^2 + 2x}{(x^2-3)^2} = \underline{\underline{-\frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2-3)^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vi setter $x^3 - 1 = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ for å få et mer oversiktlig oppsett.

$$\begin{array}{l} (x^3 + 0x^2 + 0x - 1) : (x-1) = \underline{\underline{x^2 + x + 1}} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \quad\quad x^2 + 0x - 1 \\ \quad\quad \underline{x^2 - x} \\ \quad\quad\quad\quad x - 1 \\ \quad\quad\quad\quad \underline{x - 1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

b) Divisjonen går opp hvis dividenden blir null når $x = 3$.

$$\begin{aligned} (3)^2 - 2(3) + a &= 0 \\ 9 - 6 + a &= 0 \\ a &= 6 - 9 = \underline{\underline{-3}} \end{aligned}$$

c) Divisjonen går opp hvis $x = b$ er et nullpunkt for dividenden.

$$\begin{aligned} b^2 - 3b - 4 &= 0 \\ b &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ b &= \frac{3 \pm 5}{2} \\ b = \underline{\underline{4}} \quad &\vee \quad b = \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Kvotienten i rekken er $k = -0{,}1$, dermed vil rekken konvergere siden k ligger mellom -1 og 1.

Summen blir $S = \dfrac{a_1}{1-k} = \dfrac{11}{1-(-0{,}1)} = \dfrac{11}{1{,}1} = \underline{\underline{10}}$.

Oppgave 4

Vi omformer den første likningen til $x = -y + z + 13$ og setter inn i den andre likningen.

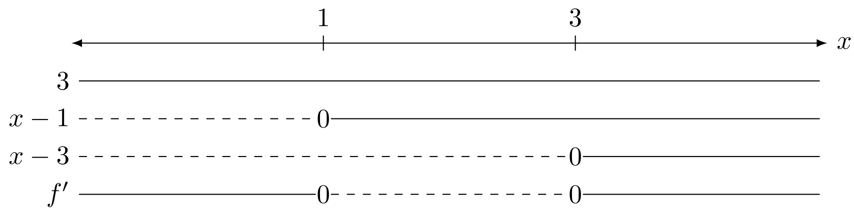
$$\begin{aligned}
2(-y+z+13)+y+z &= 27\\
-2y+2z+26+y+z &= 27\\
-y+3z &= 27-26\\
y &= 3z-1
\end{aligned}$$

Deretter setter vi begge disse uttrykkene inn i den tredje likningen.

$$\begin{aligned}
(-(3z-1)+z+13)-3(3z-1)-2z &= -9\\
-3z+1+z+13-9z+3-2z &= -9\\
-13z &= -26\\
z &= \underline{\underline{2}}\\
y &= 3(2)-1 = \underline{\underline{5}}\\
x &= -(5)+(2)+13 = \underline{\underline{10}}
\end{aligned}$$

Oppgave 5

a) Den deriverte blir $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$. Vi tegner fortegnslinjen til f'.



Vi regner deretter ut funksjonsverdiene i ekstremalpunktene:

$$\begin{aligned}
f(1) &= (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5\\
f(3) &= (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1
\end{aligned}$$

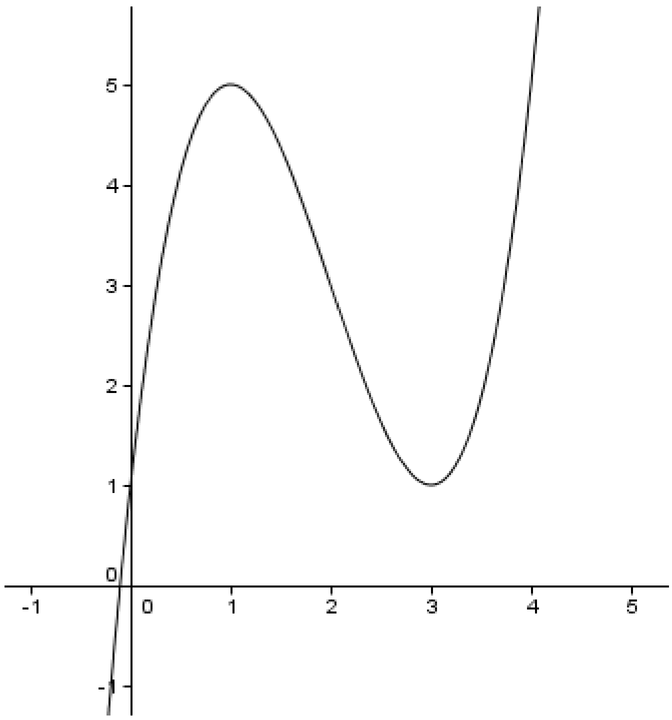
Vi har dermed et toppunkt i $\underline{\underline{(1,5)}}$ og et bunnpunkt i $\underline{\underline{(3,1)}}$.

b) Den dobbeltderiverte blir $f''(x) = 6x - 12$. Vi ser lett at denne funksjonen skifter fortegn i $x = 2$. Vi finner funksjonsverdien i dette punktet.

$$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 1 = 3$$

Vi har dermed et vendepunkt i $\underline{\underline{(2,3)}}$.

c) Skisse av f:



Oppgave 6

a) Summen av sannsynlighetene i en sannsynlighetsfordeling er alltid 1.

$$\begin{aligned} 2p + p + 3p + 0{,}3 + p &= 1 \\ 7p &= 0{,}7 \\ p &= \underline{\underline{0{,}1}} \end{aligned}$$

b) Vi beregner forventningsverdien og variansen ut i fra definisjonene.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 \\ &= 0 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}4 = \underline{\underline{2}} \\ \mathrm{Var}(X) &= (0-2)^2 \cdot 0{,}2 + (1-2)^2 \cdot 0{,}1 + (2-2)^2 \cdot 0{,}3 + (3-2)^2 \cdot 0{,}3 + (4-2)^2 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}8 + 0{,}1 + 0 + 0{,}3 + 0{,}4 = \underline{\underline{1{,}6}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

a) En normalfordelingskurve vil ha et toppunkt ved forventningsverdien. Den vil også være bredere og lavere jo høyere standardavvik den har. Ut i fra dette kan vi enkelt se at

- (1) illustrerer X_4,
- (2) illustrerer X_3,
- (3) illustrerer X_2 og
- (4) illustrerer X_1.

b) For det første må $\mathrm{E}(X)$ være lik 10, for et intervall der både start- og sluttverdi er større en forventningsverdien kan aldri ha en større sannsynlighet enn 0,5.

Hvis $\mathrm{SD}(X) = 1$ vil intervallet fra 7 til 13 være et intervall med forventningsverdien i sentrum og med en avstand på tre standardavvik fra sentrum til intervallgrensene. Sannsynligheten for et slikt intervall vet vi er over 0,99. Siden intervallet vi ser på er større enn dette igjen ser vi at et slikt standardavvik ikke stemmer med den oppgitte verdien.

Dermed står vi kun igjen med $\underline{\underline{X_3}}$ som en reell kandidat.

Del 2

Oppgave 1

a) Vi omformer uttrykket $x = E(p)$ for å få et uttrykk for prisen gitt ved antall solgte varer.

$$\begin{aligned} x &= 6000 - 4p \\ 4p &= 6000 - x \\ p &= 1500 - 0{,}25x \end{aligned}$$

Inntekten er gitt ved prisen ganger antall solgte varer slik at

$$I(x) = x \cdot p = x \cdot (1500 - 0{,}25x) = 1500x - 0{,}25x^2$$

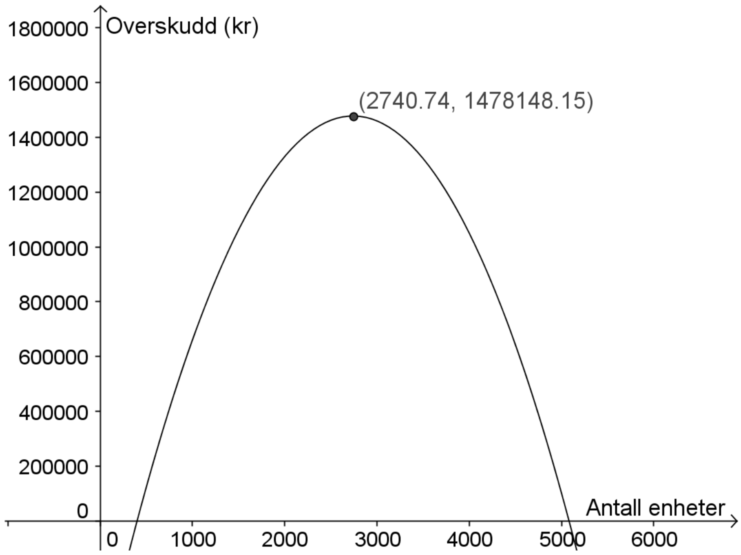
Dermed blir grenseinntekten

$$I'(x) = 1500 - 0{,}25 \cdot 2x = \underline{\underline{1500 - 0{,}5x}}$$

b) Overskuddsfunksjonen blir

$$O(x) = I(x) - K(x) = (1500x - 0{,}25x^2) - (0{,}02x^2 + 20x + 550000) = -0{,}27x^2 + 1480x - 550000$$

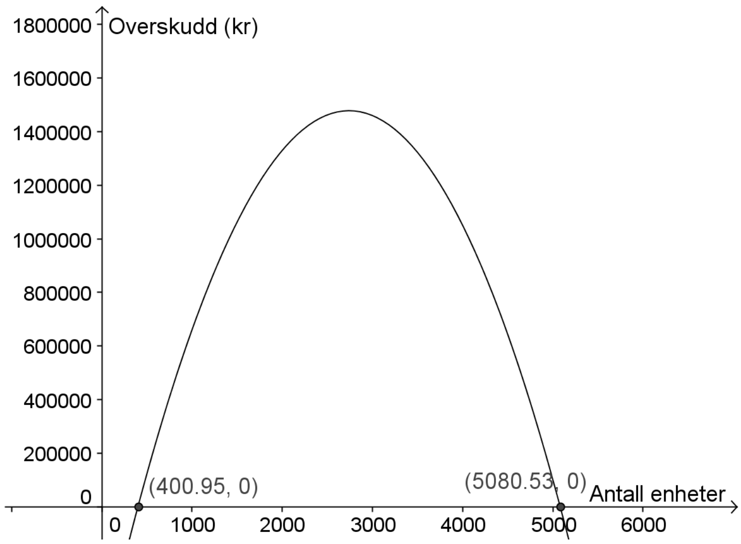
Vi tegner funksjonen i Geogebra og finner ved kommanden `Ekstremalpunkt[O]` toppunktet $(2740{,}74, 1478148{,}15)$.



Bedriften må produsere $\underline{\underline{\text{2741 enheter}}}$ for å få størst mulig overskudd. Prisen per enhet er da

$$p = 1500 - 0{,}25(2741) = \underline{\underline{814{,}75 \text{ kr}}}$$

c) Vi ser at dess lavere prisen er, jo flere varer vil vi produsere. Ved å bruke kommandoen `Nullpunkt[O]` i Geogebra finner vi at det nullpunktet til O der x er størst mulig er $(5080{,}53, 0)$.



Vi kan altså produsere maksimalt 5080 enheter før vi begynner å tape penger. Prisen per enhet er da

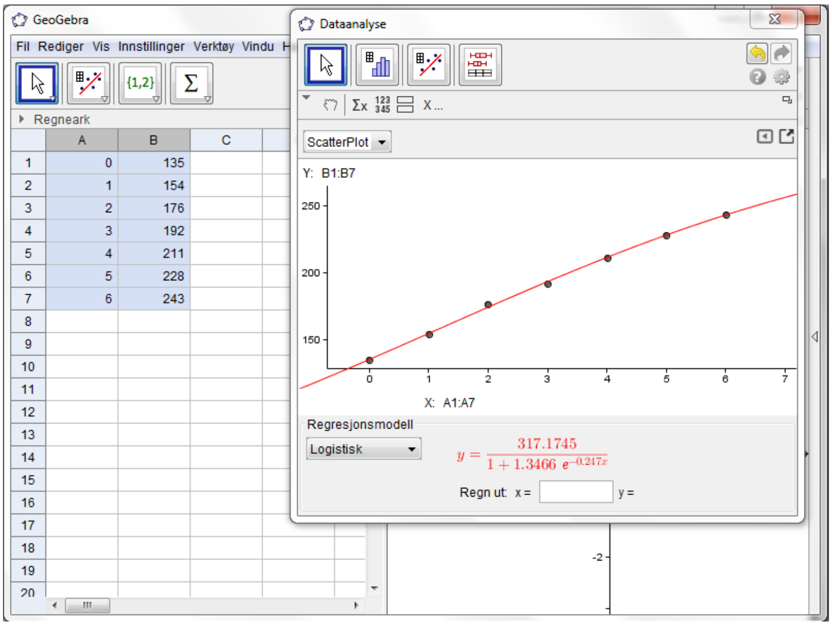
$$p = 1500 - 0{,}25(5080) = \underline{\underline{230 \text{ kr}}}$$

Oppgave 2

a) 2012 er seks år etter 2006, så $x = 6$. Da solgte firmaet i følge modellen

$$f(6) = \frac{333}{1 + 1{,}45\mathrm{e}^{-0{,}23(6)}} = \underline{\underline{244 \text{ enheter}}}$$

b) Vi skriver dataene inn i Geogebra og gjennomfører en regresjonsanalyse.



Ut i fra denne får vi at antall solgte enheter per år i firma B er gitt ved funksjonen

$$\underline{\underline{g(x) = \frac{317}{1 + 1{,}35\mathrm{e}^{-0{,}25x}}}}$$

c) En logistisk funksjon på formen $f(x) = \dfrac{C}{1 + ae^{-bx}}$ vil alltid gå mot C når x øker (siden eksponentialfunksjonen i nevneren vil nærme seg null).

Dermed vil firma A selge flest enheter i det lange løp, 333 enheter i året.

d) Vi kan estimere antall solgte enheter ved å integrere f og g fra $x = 0$ (starten av 2006) til $x = 10$ (slutten av 2015).

Kommandoene `Integral[f,0,10]` og `Integral[g,0,10]` gir at firma A selger <u>2229 enheter</u> og firma B selger <u>2220 enheter</u> i perioden fra og med 2006 til og med 2015.

Oppgave 3

a) Nåverdiene til terminbeløpene til et annuitetslån vil til sammen være det gjenstående lånebeløpet. Siden nåverdiene til terminbeløpene er gitt ved

$$\frac{x}{1{,}035} + \frac{x}{1{,}035^2} + \frac{x}{1{,}035^3} + \ldots + \frac{x}{1{,}035^{20}}$$

der x er størrelsen på terminbeløpene, får vi den ønskede likningen.

Uttrykket i parentesen er en geometrisk rekke, så likningen kan skrives som

$$\frac{x}{1{,}035} \cdot \frac{1{,}035^{-20} - 1}{1{,}035^{-1} - 1} = 600000$$

Likningen kan løses i CAS-verktøyet i Geogebra ved å skrive inn

```
(x/1.035)*(1.035^(-20) - 1)/(1.035^(-1) - 1)=600000
```

og bruke verktøyet *Løs numerisk*. Dette gir oss løsningen $x = 42216{,}65$.

Terminbeløpet er 42 217 kr.

b) Vi lar x være vekstfaktoren til renten. Ved å bruke at nåverdien til terminbeløpene er lik lånesummen får vi

$$\frac{50000}{x} + \frac{50000}{x^2} + \ldots + \frac{50000}{x^{20}} = \frac{50000}{x} \cdot \frac{x^{-20} - 1}{x^{-1} - 1} = 600000$$

Vi skriver inn

```
(50000/x)*(x^(-20) - 1)/(x^(-1) - 1)=600000
```

i CAS-verktøyet i Geogebra og løser numerisk. Vi får løsningene $x = -0{,}8544$ og $x = 1{,}0545$, der kun den siste kan fungere som vekstfaktor.

Den høyeste renten Svanhild kan ha er 5,5 % per år.

c) Igjen bruker vi at nåverdiene til terminbeløpene er lånesummen. Vi lar n være antall terminer.

$$\frac{50000}{1{,}065} + \frac{50000}{1{,}065^2} + \ldots + \frac{50000}{1{,}065^n} = \frac{50000}{1{,}065} \cdot \frac{1{,}065^{-n} - 1}{1{,}065^{-1} - 1} = 600000$$

Vi skriver inn

```
(50000/1.065)*(1.065^(-n) - 1)/(1.065^(-1) - 1)=600000
```

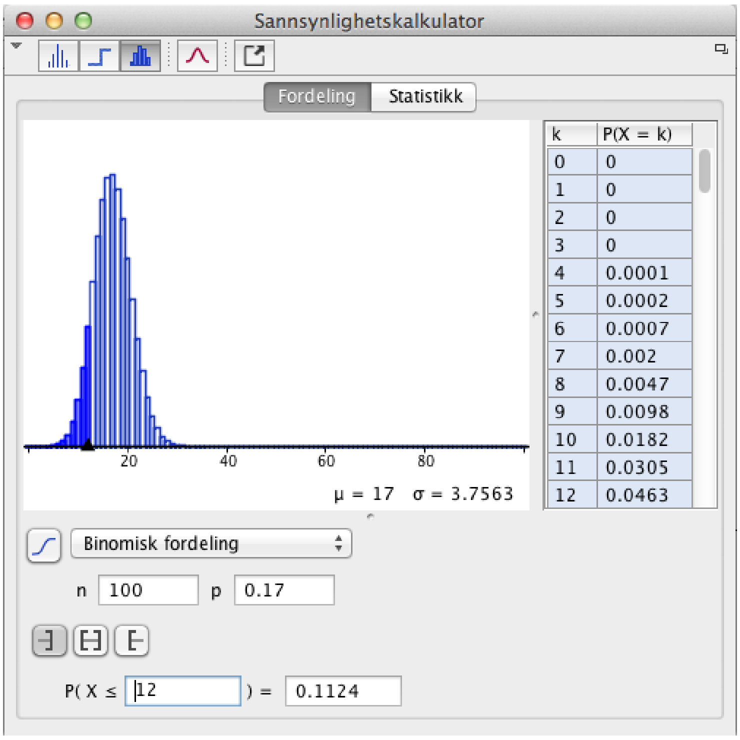
i CAS-verktøyet i Geogebra og løser numerisk. Vi får løsningen $n = 24{,}04$.

Hvis vi antar at Svanhild kan klare terminbeløp på 50 039 kr så kan vi klare oss med 24 terminer. Hvis terminbeløpet skal være under 50 000 kr må vi betale 25 terminbeløp.

Oppgave 4

a) H_0: Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person røyker er 17 %.
H_A: Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person røyker er $<$ 17 %.

b) Vi antar at nullhypotesen er sann. P-verdien til forsøket blir da sannsynligheten for at 12 eller færre personer av de 100 valgte personene røyker. Vi finner denne sannsynligheten i sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra.



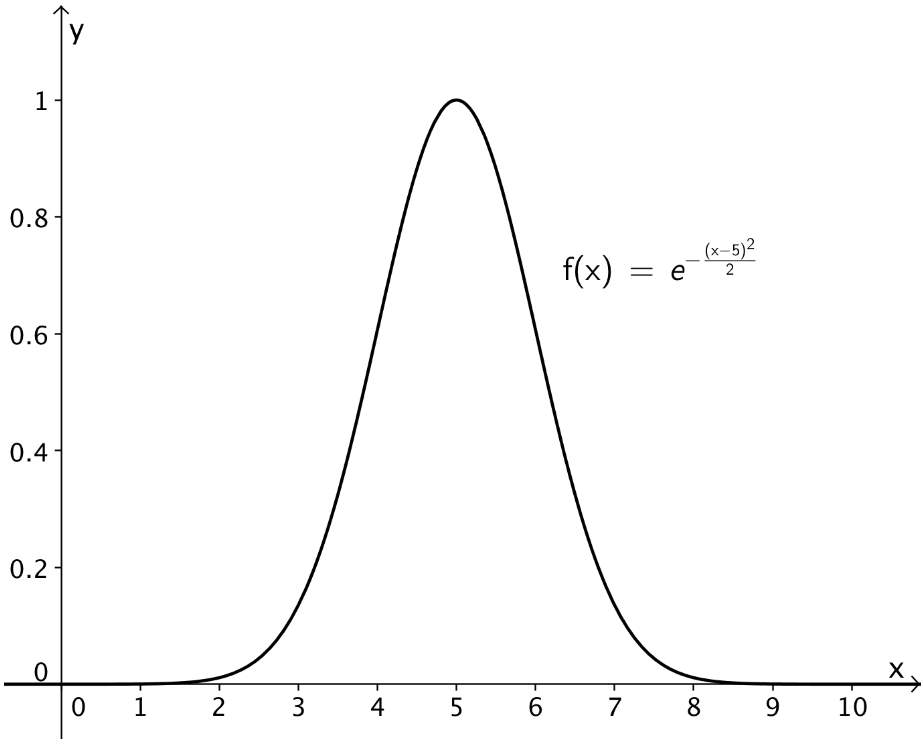
Siden P-verdien er 11,2 %, som er over signifikansnivået, kan vi ikke forkaste nullhypotesen. Vi kan altså ikke konkludere at kampanjen har hatt noen effekt.

Oppgave 5

a) Vi tegner grafen i Geogebra. (Se neste side.)

b) For å finne den førstederiverte bruker vi kjerneregelen.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \cdot \left(-\frac{(x-5)^2}{2}\right)' = \underline{\underline{(5-x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}}}}$$



For å finne den andrederiverte bruker vi produktregelen og resultatet over.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (5-x)' \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}} + (5-x) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}}\right)' \\
&= -\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}} + (5-x) \cdot (5-x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \\
&= (-1 + (5-x)^2)\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \\
&= \underline{\underline{(x^2 - 10x + 24)\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2}}}}
\end{aligned}
$$

Siden eksponentialfunksjonen alltid er positiv vil vi ha vendepunkter der andregradspolynomet skifter fortegn. Vi skriver inn `x^2-10x+24=0` i CAS-verktøyet i Geogebra og bruker verktøyet *Løs*. Dette gir oss løsningene $x = 4$ og $x = 6$. Siden et andregradspolynom med to nullpunkter alltid skifter fortegn i disse nullpunktene gir begge disse løsningene oss vendepunkter. Vi finner funksjonsverdiene.

$$
\begin{aligned}
f(4) &= \mathrm{e}^{-\frac{(4-5)^2}{2}} = 0{,}607 \\
f(6) &= \mathrm{e}^{-\frac{(6-5)^2}{2}} = 0{,}607
\end{aligned}
$$

Vi har altså vendepunkter i $\underline{\underline{(4, 0{,}607)}}$ og $\underline{\underline{(6, 0{,}607)}}$.

c) Vi beregner $P(a < X < b)$ ved kommandoen

```
1/sqrt(2 pi) * Integral[f,4,6]
```

i Geogebra, og får verdien $\underline{\underline{0{,}683}}$.

Oppgave 6

a) Vi ser at ved å trekke linjene DE, DF og EF deler vi ΔABC inn i fire like store trekanter. Arealet T_1 må derfor være en fjerdedel av arealet T.

På samme måte deler linjene GH, GI og HI trekanten CDE i fire like store biter, slik at T_2 blir en fjerdel av T_1, altså en sekstendedel av T.

Vi kan fortsette med samme argument for $T_3, T_4, \ldots$ Altså er $T_n = \dfrac{T}{4^n}$.

b) Vi ser at rekken i oppgave a er en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \dfrac{T}{4}$ og $k = \dfrac{1}{4}$. Summen av rekken er da

$$S = \frac{\frac{T}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{T}{4 - 1} = \underline{\underline{\frac{T}{3}}}$$

c) Sidenen i trekanten med areal T_1 har alle samme lengde, halvparten av sidelengdene i ΔABC. Dermed blir omkretsen også halvparten. På samme måte vil omkretsen til trekanten med areal T_2 være halvparten av omkretsen til trekanten med areal T_1 og så videre.

Omkretsene danner en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \dfrac{3}{2}$ og $k = \dfrac{1}{2}$. Summen av denne rekken blir

$$S = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2 - 1} = \underline{\underline{3}}$$