Løsningsforslag eksamen S2 våren 2019

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=5x^4-10+e^x \Rightarrow f'(x)=5\cdot 4x^{4-1}-0+e^x=\underline{\underline{20x^3+e^x}}$

b) $g(x)=2x\cdot \ln x \Rightarrow g'(x)=2\cdot \ln x+2x\cdot \frac{1}{x}=\underline{\underline{2\ln x+2}}$

c) $h(x)=\frac{8}{1+e^{-2x}}=8\left(1+e^{-2x}\right)^{-1} \Rightarrow h'(x)=-8\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=\underline{\underline{\frac{16e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}}}$

Oppgave 2

$P(x)=x^3-6x^2+9x-4$

a) $P(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1-4=1-6+9-4=0$

Når $x=1$ er nullpunkt for *P*, vet vi at $\left(x-1\right)$ er faktor i *P*.

Det betyr at $P(x)$ er delelig med $\left(x-1\right)$, <u>som skulle grunngis.</u>

b)

$$\left(x^3-6x^2+9x-4\right):\left(x-1\right)=x^2-5x+4$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3-x^2} \\
\quad -5x^2+9x-4 \\
\quad \underline{-5x^2+5x} \\
\qquad\qquad 4x-4 \\
\qquad\qquad \underline{4x-4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$P(x)=\left(x-1\right)\left(x^2-5x+4\right)$$

"Sum og produkt" gir: $x^2-5x+4=\left(x-1\right)\left(x-4\right)$

$$P(x)=\underline{\underline{\left(x-4\right)\left(x-1\right)^2}}$$

Oppgave 3

$Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + -12$

a) Når $(x+1)$, $(x-1)$ og $(x-2)$ er faktorer i $Q(x)$, har vi $Q(-1) = 0$, $Q(1) = 0$ og $Q(2) = 0$.

$$Q(-1) = 0$$
$$gir$$
$$\begin{aligned} (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) - 12 &= 0 \\ 1 - a + b - c - 12 &= 0 \\ -a + b - c &= 12 - 1 \\ -a + b - c &= 11 \\ a - b + c &= -11 \end{aligned}$$

$$Q(1) = 0$$
$$gir$$
$$\begin{aligned} 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 - 12 &= 0 \\ 1 + a + b + c - 12 &= 0 \\ a + b + c &= 12 - 1 \\ a + b + c &= 11 \end{aligned}$$

$$Q(2) = 0$$
$$gir$$
$$\begin{aligned} 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 - 12 &= 0 \\ 16 + 8a + 4b + 2c - 12 &= 0 \\ 8a + 4b + 2c &= 12 - 16 \\ 8a + 4b + 2c &= -4 \end{aligned}$$

Vi har da likningssystemet

$$\begin{aligned} a - b + c &= -11 \quad \text{(I)} \\ a + b + c &= 11 \quad \text{(II)} \\ 8a + 4b + 2c &= -4 \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>

b) Trekker likning I fra likning II én gang og trekker likning I fra likning III to ganger. Da får jeg disse to likningene:

$$\begin{aligned} 2b &= 22 \quad \text{(IV)} \\ 6a + 6b &= 18 \quad \text{(V)} \end{aligned}$$

Likning IV gir oss at $b=11$, som innsatt i likning V gir:

$$
\begin{aligned}
6a+6\cdot 11&=18\\
6a&=18-66\\
6a&=-48\\
a&=-8
\end{aligned}
$$

Setter $a=-8$ og $b=11$ inn i likning II og får:

$$
\begin{aligned}
-8+11+c&=11\\
c&=11-11+8\\
c&=8
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{a=-8\wedge b=11\wedge c=8}}$$

Oppgave 4

a) Den faste differansen er 6 og $a_1=1$. Bruker dette for å finne ut hvor mange ledd det er i rekka.

$$
\begin{aligned}
1+(n-1)\cdot 6&=295\\
6n-6&=295-1\\
6n&=294+6\\
n&=\frac{300}{6}\\
n&=50
\end{aligned}
$$

Det er altså 50 ledd i rekka.

$$S_{50}=\frac{1+295}{2}\cdot 50=\frac{296}{2}\cdot 50=148\cdot 50=74\cdot 100=7400$$

så

$$1+7+13+19+\cdots+295=\underline{\underline{7400}}$$

b) Bruker den øverste likningen til å bestemme *d*.

$$
\begin{aligned}
a_5-a_2&=12\\
a_2+3d-a_2&=12\\
3d&=12\\
d&=4
\end{aligned}
$$

Når jeg har funnet *d*, bruker jeg den nederste likningen til å bestemme a_1

$$a_1 + a_2 + a_3 = 18$$
$$a_1 + a_1 + 4 + a_1 + 2 \cdot 4 = 18$$
$$3a_1 = 18 - 4 - 8$$
$$a_1 = \frac{6}{3}$$
$$a_1 = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = \underline{\underline{4n-2}}$$

Oppgave 5

Alle "oppsprettene" danner ei geometrisk rekke som ser slik ut:

$$6{,}0 + 6{,}0 \cdot 0{,}6 + 6{,}0 \cdot 0{,}6^2 + \cdots$$

Dette er ei uendelig geometrisk rekke der $a_1 = 6{,}0$ og $k = 0{,}6$.

Summen av denne rekka er $S = \dfrac{6}{1-0{,}6} = \dfrac{6}{0{,}4} = \dfrac{60}{4} = 15$

Når ballen har sprettet opp fra bakken, vil den falle tilsvarende distanse ned igjen, før den gjør neste sprett opp. Den totale distansen til ballen er da gitt ved $10 + 2 \cdot S$.

$$10 + 2 \cdot S = 10 + 2 \cdot 15 = 10 + 30 = 40$$

<u>Ballen tilbakelegger en distanse på 40 meter fra den slippes til den faller til ro</u>

Oppgave 6

$f(x) = (x-1)^2(x-4) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (samme som $P(x)$ i oppgave 2)

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$

$f'(x) = 0$ gir $x = 1 \lor x = 3$.

Bruker andrederiverttesten:

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

så

$f''(1) = 6(1-2) = 6(-1) = -6$ og $f''(3) = 6(3-2) = 6 \cdot 1 = 6$

$f(1) = 0$ og $f(3) = (3-1)^2(3-4) = 2^2(-1) = -4$

<u>Grafen til *f* har toppunkt i (1,0) og bunnpunkt i (3,-4)</u>

b)

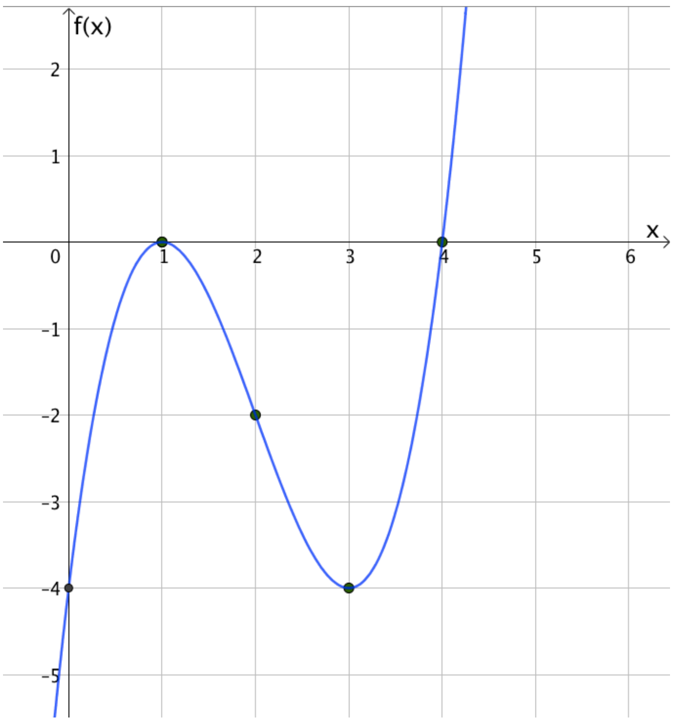
$$f''(x)=0$$
$$6(x-2)=0$$
$$x=2$$

Siden grafen til *f''* er ei rett linje, må *f''* skifte fortegn i nullpunktet, slik at $(2,f(2))$ er et vendepunkt på grafen til *f*.

$$f(2)=(2-1)^2(2-4)=1^2(-2)=-2$$

<u>(2, -2) er vendepunkt på grafen til *f*.</u>

c) Markerer nullpunktene, skjæringspunkt med *y*-aksen, topp- og bunnpunktene og vendepunktet i et koordinatsystem og tegner en jevn kurve gjennom disse:



d)

$$g(x)=-2\cdot f(x)+3 \Rightarrow g'(x)=-2\cdot f'(x)=-2\cdot 3(x-3)(x-1)=-6(x-3)(x-1)$$

$g'(x)$ har samme nullpunkter som $f'(x)$, men motsatt fortegn i alle punkter.
Det betyr at $(1,g(1))$ er et *bunnpunkt* på grafen til *g*, mens $(3,g(3))$ er et *toppunkt* på grafen til *g*.

$g(1)=-2\cdot f(1)+3=-2\cdot 0+3=3$ og $g(3)=-2\cdot f(3)+3=-2(-4)+3=8+3=11$

<u>Grafen til *g* har bunnpunkt i (1,3) og toppunkt i (3,11)</u>

Oppgave 7

a) Vi kan få summen 8 på to måter, nemlig at den vanlige terningen viser 5 eller 6, mens den andre da viser henholdsvis 3 eller 2.
Siden summen av sannsynlighetene i sannsynlighetsfordelingen skal være 1, kan vi da greit regne oss frem til at vi må ha $P(X=6)=\frac{6}{36}$

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\cdot\frac{4}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{6}{36}+5\cdot\frac{6}{36}+6\cdot\frac{6}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{2}{36}+9\cdot\frac{1}{36} \\ &= \frac{8}{36}+\frac{15}{36}+\frac{24}{36}+\frac{30}{36}+\frac{36}{36}+\frac{42}{36}+\frac{16}{36}+\frac{9}{36} \\ &= \frac{180}{36} \\ &= 5 \end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>

c)

$$P(Y=0)=P(X\le 5)=\frac{4}{36}+\frac{5}{26}+\frac{6}{36}+\frac{6}{36}=\frac{21}{36}$$

$$P(Y=72)=P(6\le X\le 8)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{14}{36}$$

$$P(Y=360)=P(X=9)=\frac{1}{36}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{21}{36}+72\cdot\frac{14}{36}+360\cdot\frac{1}{36}=2\cdot 14+10=28+10=38$$

Siden forventet gevinst i det lange løp er lavere enn prisen per spill, kan jeg *ikke* forvente å gå i overskudd i det lange løp.

Oppgave 8

a)

$$P(2 < X < 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2)$$

$$= P\left(Z \le \frac{3-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{2-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{3-1}{2}\right) - P\left(Z \le \frac{2-1}{2}\right)$$

$$= P(Z \le 1) - P\left(Z \le \frac{1}{2}\right)$$

Tabell over standard normalfordeling gir da

$$P(2 < X < 3) = 0{,}8413 - 0{,}6915 = \underline{\underline{0{,}1498 \approx 15\%}}$$

b) Bruker tabellen over standard normalfordeling og finner at:

$$P(Y \le 0{,}92) = 0{,}0228 = P(Z \le -2{,}00)$$

og

$$P(Y < 1{,}41) = 1 - P(Y \ge 1{,}41) = 1 - 0{,}0668 = 0{,}9332 = P(Z \le 1{,}50)$$

Dette gir:

$$\frac{0{,}92-\mu}{\sigma} = -2{,}00 \Rightarrow \mu = 0{,}92 + 2{,}00\sigma \quad \text{(I)}$$

og

$$\frac{1{,}41-\mu}{\sigma} = 1{,}50 \Rightarrow \sigma = \frac{1{,}41-\mu}{1{,}50} \quad \text{(II)}$$

Setter (I) inn i (II):

$$\sigma = \frac{1{,}41 - (0{,}92 + 2{,}00\sigma)}{1{,}50}$$

$$\sigma = \frac{0{,}49 - 2{,}00\sigma}{1{,}50}$$

$$1{,}50\sigma = 0{,}49 - 2{,}00\sigma$$

$$3{,}50\sigma = 0{,}49$$

$$\sigma = \frac{0{,}49}{3{,}50}$$

$$\sigma = 0{,}14$$

Setter $\sigma = 0{,}14$ inn i (II):

$$\mu = 0{,}92 + 2{,}00 \cdot 0{,}14 = 0{,}92 + 0{,}28 = 1{,}20$$

$$\underline{\underline{\mu = 1{,}20 \wedge \sigma = 0{,}14}}$$

Del 2

Oppgave 1

a) Lar x være antall enskillingsmynter, lar y være antallet femskillingsmynter og lar z være antallet tiskillingsmynter.

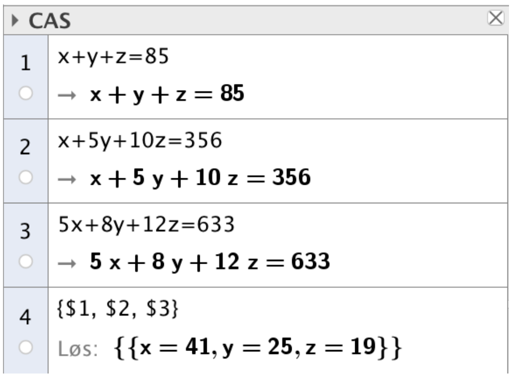
Opplysningene om sjørøverskatten gjør at vi kan sette opp følgende likningssett:

I. $x+y+z=85$

II. $x+5y+10z=356$

III. $5x+8y+12z=633$

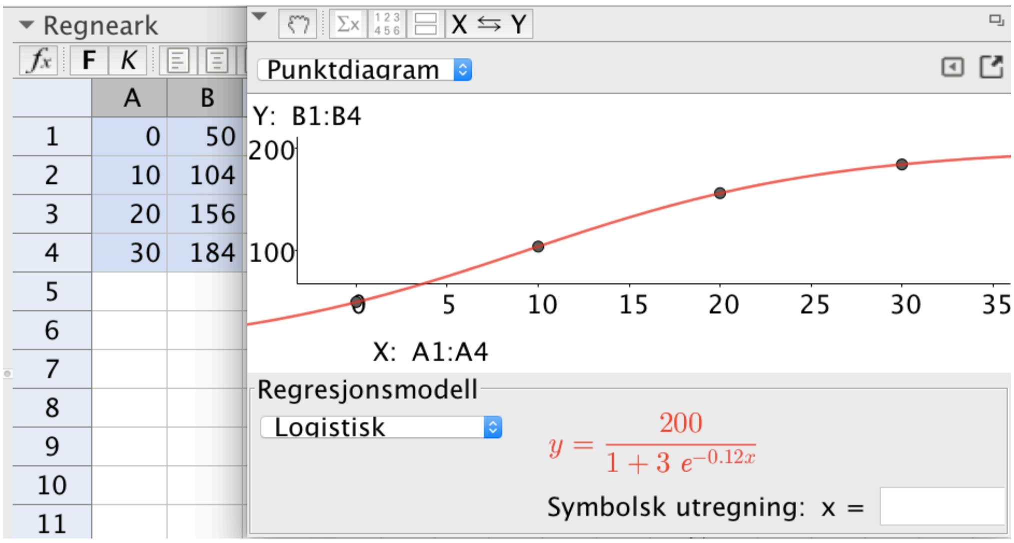
b)



Sjørøverskatten inneholder 41 enskillingsmynter, 25 femskillingsmynter og 19 tiskillingsmynter.

Oppgave 2

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra, velger regresjonsanalyse og logistisk modell.

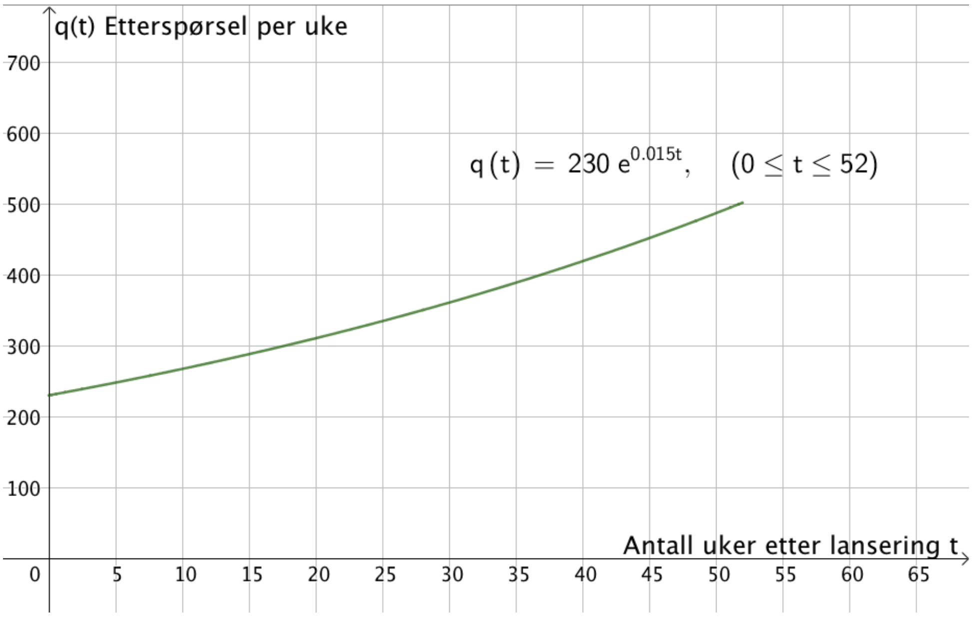


$$\underline{\underline{N=200 \wedge a=3 \wedge k=0{,}12}}$$

b) Tallet *N* representerer bæreevnen, altså det antallet individer som kan leve i et område over lengre tid. I denne situasjonen forteller *N* at det kan leve 200 kaniner på øya over lengre tid. Vi kan derfor gå ut i fra veksten vil fortsette å avta etter 30 uker, slik at bestanden etter hvert stabiliserer seg på 200 individer.

Oppgave 3

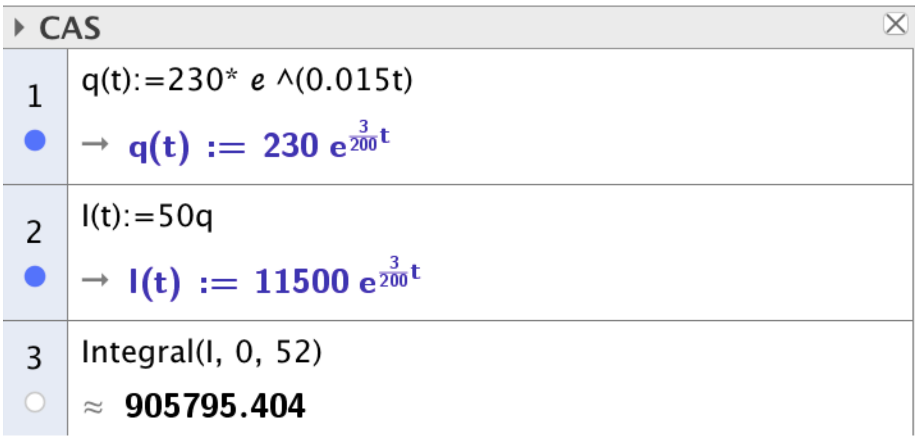
a)



b) Bruker CAS

<u>Inntekten er omtrent 20 954 kroner i uke 40 etter lanseringen</u>

c)



<u>Den samlede inntekten er omtrent 905 795 kroner de første 52 ukene</u>

d)

CAS	
1	p(x):=-0.01x+60 $\rightarrow\ p(x) := -\frac{1}{100}x + 60$
2	Finner et uttrykk for inntekt avhengig av etterspørsel
3	I(x):=x*p $\rightarrow\ I(x) := -\frac{1}{100}x^2 + 60x$
4	K'(x):=0.02x+25 $\rightarrow\ K'(x) := \frac{1}{50}x + 25$
5	Setter grenseinntekt lik grensekostnad
6	I'(x)=K'(x) Løs: $\{x = 875\}$
7	Overskuddet er størst når etterspørselen er 875 enheter
8	p(875) $\approx$ 51.25

<u>Enhetsprisen må være 51,25 kroner for at overskuddet skal bli størst mulig</u>

Oppgave 4

a) Den geometriske rekka vil være summen av nåverdiene til de 30 terminbeløpene. Den vil da se slik ut:

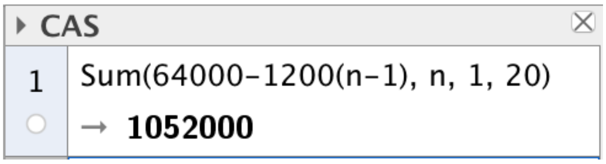
$$\frac{x}{1{,}03} + \frac{x}{1{,}03^2} + \frac{x}{1{,}03^3} + \cdots + \frac{x}{1{,}03^{20}}$$

Rekka har 20 ledd og summen skal være 800 000.

CAS	
1	Sum(x/1.03^n, n, 1, 20)=800000 NLøs: $\{x = 53772.57\}$

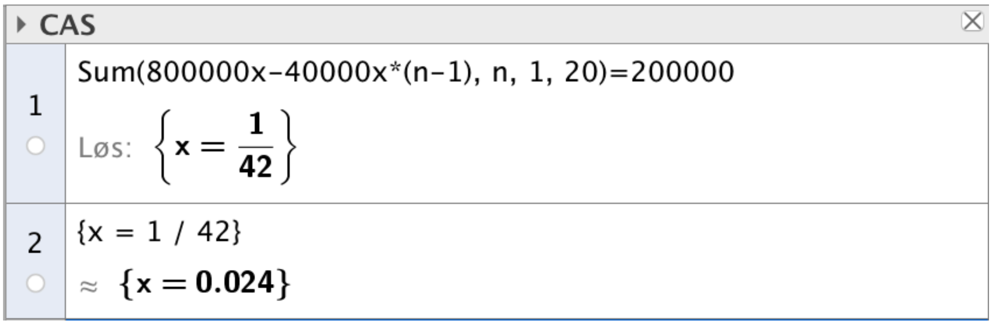
<u>Terminbeløpet blir 53 772,57 kroner</u>

b) Siden det faste avdraget er 40 000, vil restlånet minke med 40 000 hver termin. Det betyr at rentene vil minke med 3% av 40 000, altså 1200 kroner, hver termin. Dette fører til at terminbeløpene vil danne en aritmetisk følge, der $a_1 = 64000$ og $d = -1200$.



<u>Summen av de 20 terminbeløpene er 1 052 000</u>

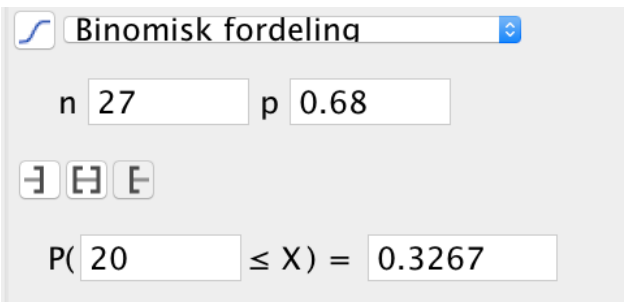
c) Pia må betale totalt 200 000 kroner i renter. Vi lar x være rentesatsen.
Rentene hver termin danner en aritmetisk følge der $a_1 = 800000x$.
Siden de faste avdragene er 40000, vil rentene avta med $40000x$ hver termin. Vi har derfor $d = -40000x$.



<u>Den faste rentesatsen for dette lånet er 2,4 %</u>

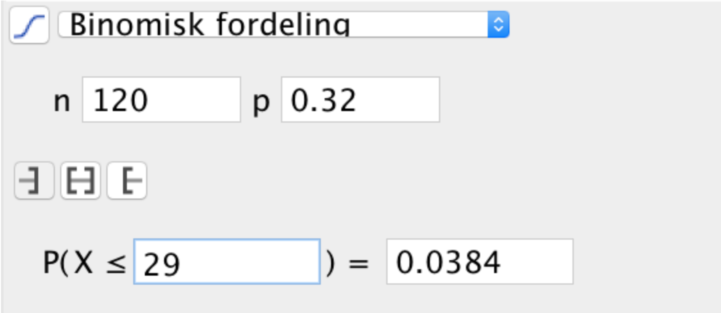
Oppgave 5

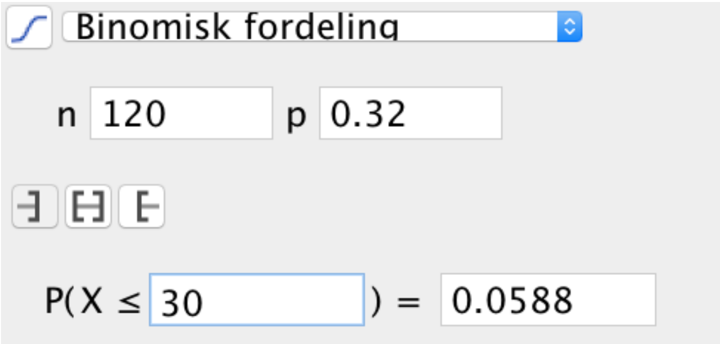
a) Her har vi en binomisk sannsynlighetsmodell. Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.
NB! Dersom sannsynligheten er 0,32 for at en tilfeldig elev hadde én eller flere timer fravær i russetiden, er sannsynligheten 0,68 for at en tilfeldig elev ikke hadde fravær i russetiden.



<u>Sannsynligheten for at minst 20 av de 27 elevene som ble trukket ut ikke hadde fravær i russetiden er 32,7%</u>

b) Prøver meg frem med ulike verdier i sannsynlighetskalkulatoren, til jeg ser at $P\left(x \le X\right)$ passerer 5%.





<u>Det høyeste antallet elever som kan ha fravær i russetiden, for at H_0 skal forkastes, er 29</u>