Løsningsforslag eksamen R2 våren 2019

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=3\sin\left(4x+1\right)+x \Rightarrow f'(x)=3\cos\left(4x+1\right)\cdot 4+1=\underline{\underline{12\cos\left(4x+1\right)+1}}$

b)

$$g(x)=4\sin x\cdot\cos x$$

$$g'(x)=4\cos x\cdot\cos x+4\sin x\left(-\sin x\right)$$

$$=\underline{\underline{4\cos^2 x-4\sin^2 x}}$$

Vi kan gjøre følgende omskrivning:

$$4\cos^2 x-4\sin^2 x=4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\underline{\underline{4\cos\left(2x\right)}}$$

Oppgave 2

a)

$$\int\left(x^4-x^2\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+C}}$$

b)

$$\int 4x\cdot e^{-x^2}dx$$

$$u=-x^2 \text{ gir } \frac{du}{dx}=-2x\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$$

så

$$\int 4x\cdot e^{-x^2}dx=\int 4x\cdot e^u\,\frac{du}{-2x}=-2\int e^u\,du=\underline{\underline{-2e^{-x^2}+C}}$$

c)

$$\int\frac{4}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{4}{\left(x-3\right)\left(x+1\right)}dx$$

Delbrøksoppspalting:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}=\frac{4}{\left(x-3\right)\left(x+1\right)}$$

$$\left(x+1\right)A+\left(x-3\right)B=4$$

$x=3$ gir $4A=4$, så $A=1$

og

$x=-1$ gir $-4B=4$, så $B=-1$

så

$$\int\frac{4}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\underline{\underline{\ln\left|x-3\right|-\ln\left|x+1\right|+C}}$$

Oppgave 3

a) Finner først ut hvor mange ledd det er i rekka. Vet at det første leddet er 1 og det siste er 157. Den faste differansen er 4.

$$1+(n-1)\cdot 4=157$$
$$4n-4=157-1$$
$$4n=156+4$$
$$n=\frac{160}{4}$$
$$n=40$$

$$S_{40}=\frac{1+157}{2}\cdot 40=\frac{158}{2}\cdot 40=158\cdot 20=1580\cdot 2=3160$$

<u>Summen av rekka er 3160</u>

b)

$$a_3\cdot k^3=a_6$$
$$k^3=\frac{a_6}{a_3}$$
$$så$$
$$k=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{27}}{1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$$

Har da vist at $-1<k<1$, så <u>rekka konvergerer</u>

$$a_1=a_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9a_3=9\cdot 1=9$$

$$S=\frac{9}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{\frac{2}{3}}=\frac{27}{2},\ \text{så } \underline{\underline{\text{summen av rekka er } \frac{27}{2}}}$$

Oppgave 4

Bestemmer x-koordinaten til B:

$$a^2-x^2=0$$

Når vi har $a>0$, får vi $x=a$

Bestemmer arealet av det fargelagte området:

$$\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=a^3-\frac{1}{3}a^3-0=\frac{2}{3}a^3$$

Funksjonsuttrykket til *f* forteller oss at symmetrilinja til grafen til *f* er $x = 0$.
Høyden rektangelet er $f(0) = a^2$ og grunnlinjen er a, så arealet av rektanglet er a^3

Har allerede vist at arealet av det fargelagte området er $\frac{2}{3}a^3$, så arealet av det fargelagte området utgjør $\frac{2}{3}$ av rektangelets areal. <u>Som skulle vises</u>

Oppgave 5

a) Setter inn koordinatene til henholdsvis *A*, *B* og *C* i likningen til planet.

$3 - 4 \cdot 1 + 0 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$, så *A* ligger i planet.
$3 - 4 \cdot 2 + 4 + 1 = 3 - 8 + 4 + 1 = 0$, så *B* ligger i planet.
$-1 - 4 \cdot 1 + 4 + 1 = -1 - 4 + 4 + 1 = 0$, så *C* ligger i planet.

Punktene *A*, *B* og *C* ligger i planet, <u>som skulle vises</u>

b) $\vec{n} = [1, -4, 1]$ er en normalvektor for planet α, og dermed også en retningsvektor for linja ℓ. Når vi bruker punktet *A* som fast punkt, får vi da følgende parameterfremstilling:

$$\underline{\underline{\ell : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}}}$$

c) Sentrum til kuleflaten må ligge på linja ℓ og radius er avstanden fra *A* til dette punktet.
Vi har altså sentrum i $S = (3 + t, 1 - 4t, t)$ og radius *r*.

$$r^2 = \left|\overrightarrow{AS}\right|^2 = \left|\left[3 + t - 3, 1 - 4t - 1, t - 0\right]\right|^2 = \left|\left[t, -4t, t\right]\right|^2 = t^2 + 16t^2 + t^2 = 18t^2$$

Finner likningen for kuleflaten:

$$\left(x - (3 + t)\right)^2 + \left(y - (1 - 4t)\right)^2 + (z - t)^2 = 18t^2$$

$$(x - 3 - t)^2 + (y - 1 + 4t)^2 + (z - t)^2 = 18t^2$$, <u>som skulle vises</u>

d)

$$\overrightarrow{PS} = [3 + t - 4, 1 - 4t - 1, t - 1] = [t - 1, -4t, t - 1]$$

og

$$\left|\overrightarrow{PS}\right|^2 = 18t^2$$

så

$$(t - 1)^2 + (-4t)^2 + (t - 1)^2 = 18t^2$$

$$t^2 - 2t + 1 + 16t^2 + t^2 - 2t + 1 = 18t^2$$
$$18t^2 - 4t + 2 - 18t^2 = 0$$
$$-4t = -2$$
$$t = \frac{1}{2}$$

Dette gir

$$S = \left(3 + \frac{1}{2}, 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{Sentrum i kuleflaten er } \left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)}}$$

Oppgave 6

a)

$$\sin(2x) = 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in Z$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$
$$x \in [0, 2\pi] \text{ gir } \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}}}$$

b)

$$\sin(\pi x) + \sqrt{3}\cos(\pi x) = 0 \quad , \quad x \in [0, 2]$$
$$\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} + \frac{\sqrt{3}\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)} = 0$$
$$\tan(\pi x) + \sqrt{3} = 0$$
$$\tan(\pi x) = -\sqrt{3}$$
$$\pi x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \quad , k \in Z$$
$$x = \frac{2}{3} + k$$
$$x \in [0, 2] \text{ gir } \underline{\underline{x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{5}{3}}}$$

Oppgave 7

1) $y' = \dfrac{x}{y}$ må ha et retningsdiagram der tangentene har positivt stigningstall i første og tredje kvadrant, og negativt stigningstall i andre og fjerde kvadrant. Dessuten må dette stigningstallet være likt for alle punkter der $x = y$. Dette passer med *retningsdiagram C*.

2) $y' = x \cdot y$ må også ha et retningsdiagram der tangentene har positivt stigningstall i første og tredje kvadrant, og negativt stigningstall i andre og fjerde kvadrant. Dessuten må tangentene bli brattere og brattere når både *x* og *y* øker. Dette passer med *retningsdiagram B*.

3) $y' = 2x$ må ha et retningsdiagram der tangentene har positivt stigningstall i første og fjerde kvadrant, og negativt stigningstall i andre og tredje kvadrant. Dette passer med retningsdiagram A. Vi kan også se at *retningsdiagram A* passer godt siden y' gir oss stigningstallet til tangentene på grafen til $f(x) = x^2 + C$, som er en parabel som vender den hule siden opp.

<u>Retningsdiagram A hører til 3), retningsdiagram B hører til 2) og retningsdiagram C hører til 1)</u>

Oppgave 8

Er påstanden sann for $n = 1$?
Venstre side: $3 \cdot 4 = 12$
Høyre side: $1 \cdot (1+1) \cdot (1+5) = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$
Vi ser at $P(1)$ er sann.

Antar at påstanden er sann for $n = k$, der *k* er et vilkårlig naturlig tall.
Er da påstanden sann for $n = k+1$?

$$
\begin{aligned}
3\cdot 4 + 6\cdot 5 + 9\cdot 6 + \cdots + (3k)\cdot(3+k) + (3(k+1))\cdot(3+(k+1)) &= k\cdot(k+1)\cdot(k+5) + (3(k+1))\cdot(3+(k+1)) \\
&= k\cdot(k+1)\cdot(k+5) + (3k+3)(k+4) \\
&= k\cdot(k+1)\cdot(k+5) + 3(k+1)(k+4) \\
&= (k+1)(k(k+5) + 3(k+4)) \\
&= (k+1)(k^2 + 5k + 3k + 12) \\
&= (k+1)(k^2 + 8k + 12) \\
&= (k+1)(k+2)(k+6) \\
&= (k+1)((k+1)+1)((k+1)+5)
\end{aligned}
$$

Har vist at påstanden er sann for $n = k+1$, under forutsetning av at den er sann for $n = k$, der *k* er et naturlig tall.
Vi har dermed bevist ved induksjon at påstanden er sann for alle naturlige tall *n*.

Oppgave 9

a) $\underline{\underline{y' = -k \cdot \sqrt{y} \quad \text{, der } k > 0}}$

b)

$$y' = -k\sqrt{y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dt} = -k$$

$$y^{-\frac{1}{2}}dy = -k\ dt$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}y^{-\frac{1}{2}+1} + c_1 = -kt + c_2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = -kt + c_2 - c_1 \qquad ,(c_2 - c_1 = c_3)$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = -kt + c_3$$

$$2\sqrt{y} = -kt + c_3$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(c_3 - kt)$$

$$y = \frac{1}{4}\left((c_3)^2 - 2c_3kt + k^2t^2\right)$$

$y(0) = 100$ gir $\frac{1}{4}(c_3)^2 = 100 \Rightarrow c_3 = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

så

$y(t) = \frac{1}{4}k^2t^2 - 10kt + 100$ eller $y(t) = \frac{1}{4}k^2t^2 + 10kt + 100$

Siden vi har sagt at k er positiv og vi har $t \geq 0$, må vi bruke

$y(t) = \frac{1}{4}k^2t^2 - 10kt + 100$ når vannhøyden avtar.

$y(2) = 81$ gir da:

$$k^2 - 20k + 100 = 81$$

$$k^2 - 20k + 19 = 0$$

så

$$k = \frac{20 \pm \sqrt{400-76}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{20 \pm 18}{2} = 10 \pm 9 \begin{cases} k_1 = 19 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Da har vi $y(t)=\frac{19^2}{4}t^2-19\cdot 10t+100=\frac{361}{4}t^2-190t+100$

eller $y(t)=\frac{1}{4}t^2-10t+100$

$$y(1)=\frac{361}{4}-190+100=90,25-90=0,25$$

eller

$$y(1)=\frac{1}{4}-10+100=90,25$$

Hvis det er 81 liter igjen i tanken etter 2 timer, kan det ikke være 0,25 liter igjen etter 1 time.

Vi må derfor ha $y(t)=\frac{1}{4}t^2-10t+100$

$$\frac{1}{4}t^2-10t+100=0$$

gir

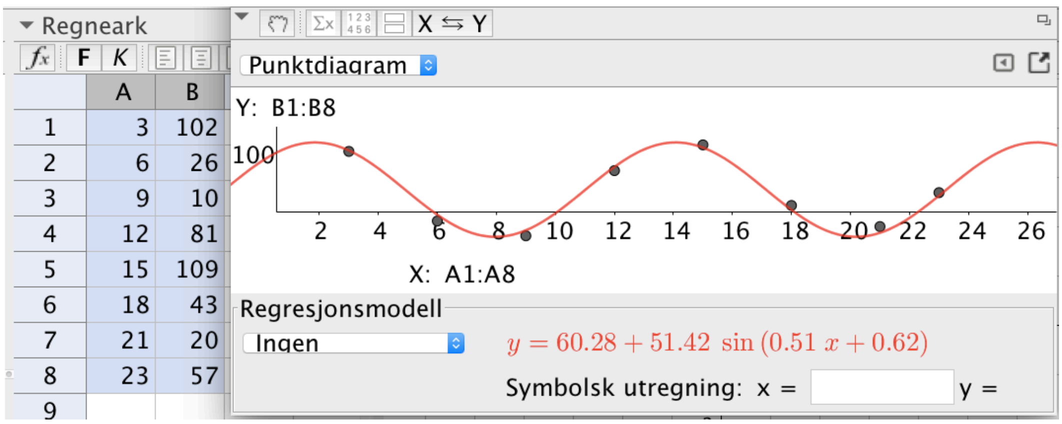
$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-100}}{\frac{1}{2}}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20$$

<u>Tanken er tom etter 20 timer</u>

Del 2

Oppgave 1

a) Legger inn riktige verdier i regnearket i GeoGebra, velger regresjonsanalyse og sinusmodell.



En god modell for vannstanden ved Leirvik er

$$\underline{\underline{g(x)=60,28+51,42\sin\left(0,51x+0,62\right)}}$$

b)

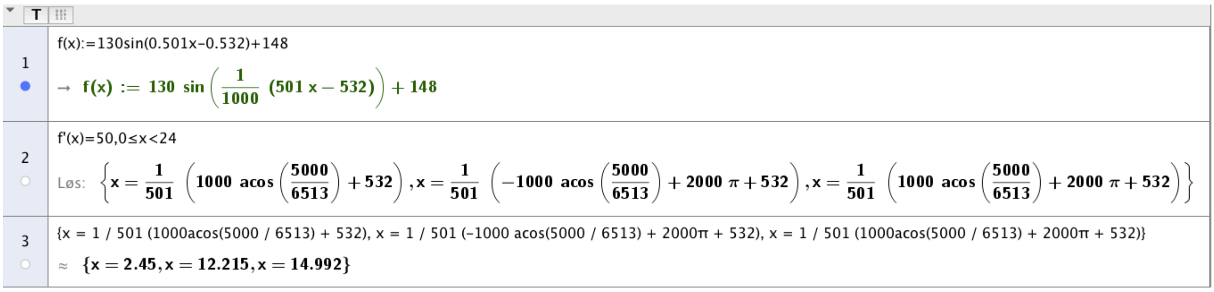
$$\frac{2\pi}{0{,}501} = 12{,}54$$, så <u>perioden er 12,54</u>

Dette forteller oss at det går omtrent 12,54 timer mellom hver gang vannstanden er på sitt høyeste og også at det går omtrent 12,54 timer mellom hver gang vannstanden er på sitt laveste. Med andre ord, går det omtrent 12,54 timer mellom hver gang det er flo og omtrent 12,54 timer mellom hver gang det er fjære.

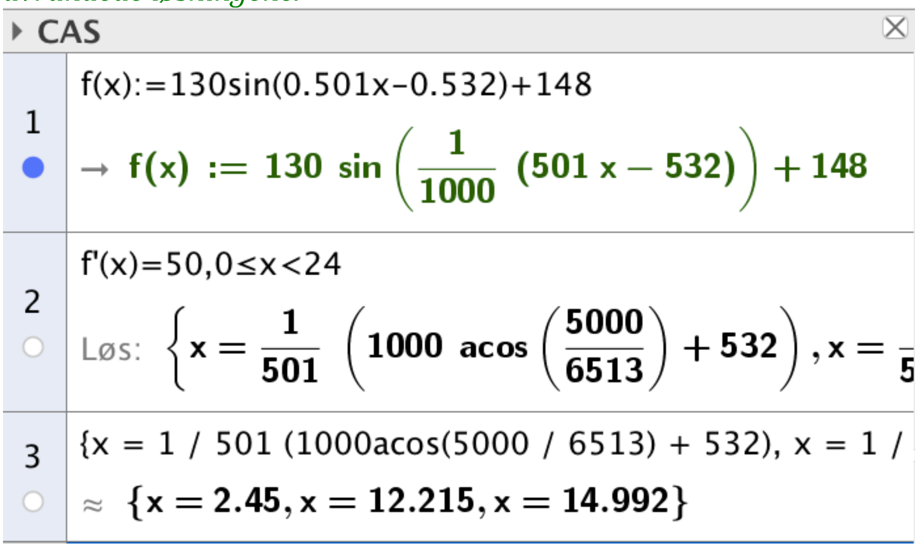
c) Tallet 148 representerer likevektslinja som grafen til *f* svinger om. Det forteller oss at vannstanden til tidevannet i Tromsø ligger 148 cm over sjøkartnull midt i mellom hver flo og hver fjære.

Tallet 130 representerer amplituden. Det forteller oss at vannstanden ligger 130 cm over likevektslinja når vannstanden er på sitt høyeste. Den er da 278 cm over sjøkartnull. Når det er fjære ligger vannstanden 130 cm under likevektslinja, og dermed 18 cm over sjøkartnull.

d) Løser i CAS:



Løsningene tar så stor plass, at innholdet på bildet over blir smått, men tar det med slik at det er mulig å se alt. Bildet under viser tydeligere selve likningen og de avrundede løsningene.



<u>Vannstanden øker med 50 cm per time kl.02.27, kl.12.13 og kl.15.00 den 14.august 2018.</u>

Oppgave 2

a)

	CAS
1	P:=(2,4,-3) $\rightarrow$ $P := (2, 4, -3)$
2	Q:=(0,0,1) $\rightarrow$ $Q := (0, 0, 1)$
3	S:=Midtpunkt(P, Q) $\rightarrow$ $S := (1, 2, -1)$
4	Kule(S, Q) $\rightarrow$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

<u>Som skulle vises</u>

b)

4	α:=x-y+z=7 $\rightarrow$ $\alpha : x - y + z = 7$
5	Avstand(S, α) $\rightarrow$ $3\sqrt{3}$

Avstanden fra sentrum i kuleflaten til planet α er $3\sqrt{3}$. Siden radius i kuleflaten er 3, må da den minste avstanden mellom kuleflaten og planet α være

$$\underline{\underline{3\sqrt{3}-3}}$$

c)

3	S:=Midtpunkt(P, Q) $\rightarrow$ $S := (1, 2, -1)$
4	β:=2x+y+t*(z-3)=-1 $\rightarrow$ $\beta : t\,(z-3) + 2x + y = -1$
5	Avstand(S, β) $\rightarrow$ $\sqrt{\frac{\left(t\left(\frac{3t-1}{t}+1\right)-4\right)^2}{t^2+5}}$
6	abs(5 - 4t) / sqrt(5 + t²) ✓ $\frac{\lvert 5-4t \rvert}{\sqrt{5+t^2}}$
7	$5 ≟ $6 $\rightarrow$ true

Vi ser at avstanden mellom sentrum i kuleflaten K og planet β er gitt ved

$$d(t) = \frac{\lvert 5-4t \rvert}{\sqrt{5+t^2}}$$, <u>som skulle vises</u>

d) Når planet β tangerer kuleflaten *K*, er avstanden mellom planet og sentrum i kuleflaten lik 3.

6	d(t)=3
	Løs: $\left\{ t = \frac{-6\sqrt{15}+20}{7}, t = \frac{6\sqrt{15}+20}{7} \right\}$

Bildet over viser eksakte verdier for *t* slik at planet β tangerer kuleflaten *K*.

Oppgave 3

a) Arealet av det røde rektangelet er 1, og representeres ved a_1 i rekka på høyre side i ulikheten. De neste $k-1$ leddene i denne rekka representerer arealene av de blå rektanglene.

$\int_1^k \frac{1}{x^2}dx$ gir oss arealet under grafen fra $x=1$ til $x=k$. Vi ser klart av figuren at de blå rektanglene ikke fyller hele dette arealet, så vi må ha

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} \le \int_1^k \frac{1}{x^2}dx$$

slik at

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} \le 1+\int_1^k \frac{1}{x^2}dx$$, som skulle forklares

b) Når $k \to \infty$ har vi:

CAS

1	f(x):=1/x²
	→ $f(x) := \frac{1}{x^2}$
2	Integral(f, 1, inf)
	→ 1

Det betyr at $1+\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 2$. Siden summen av arealene til rektanglene er mindre enn arealet under grafen, har vi $S<2$, som skulle begrunnes

Her er det litt "snodig" at man bruker "≤" i a) og "<" i b), siden det ene resultatet skal brukes til å begrunne det andre.

c)

CAS	
1	Sum(1/k², k, 1, inf)
	✓ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
2	Sum(1 / k²,k,1,∞)
	→ $\frac{1}{6}\pi^2$

$$\underline{\underline{S = \frac{\pi^2}{6}}}$$

Oppgave 4

a) Vi lar y være kombinasjonen av funksjonene f og g.
Da får vi

$$y = 5 \pm \sqrt{4 - x^2}$$

$$y - 5 = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

$$(y-5)^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 4$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 2^2$$

Dette er likningen til en sirkel med sentrum i (0,5) og radius 2, <u>som skulle vises</u>

b)

CAS	
1	f(x):=5+sqrt(4–x²)
	→ $f(x) := \sqrt{-x^2+4}+5$
2	g(x):=5–sqrt(4–x²)
	→ $g(x) := -\sqrt{-x^2+4}+5$
3	pi*Integral(f², –2, 2)–pi*Integral(g², –2, 2)
	→ $40\,\pi^2$

$$\underline{\underline{\text{Volumet av omdreiningslegemet er } 40\pi^2}}$$

c)

CAS

1	(x-2)^2+(y-7)^2=3^2 → $(x-2)^2+(y-7)^2=9$
2	Løs($1,y) → $\left\{y=-\sqrt{-x^2+4x+5}+7, y=\sqrt{-x^2+4x+5}+7\right\}$
3	h(x):=HøyreSide($2,1) → $h(x) := -\sqrt{-x^2+4x+5}+7$
4	i(x):=HøyreSide($2,2) → $i(x) := \sqrt{-x^2+4x+5}+7$
5	Siden sentrum er (2,7) og radius 3, må vi integrere mellom x=-1 og x=5
6	pi*Integral(i^2, -1, 5)-pi*Integral(h^2, -1, 5) → $126\pi^2$

Volumet av omdreiningslegemet er $126\pi^2$