Løsningsforslag eksamen R1 våren 2019

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{3x^2 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$

b)

$$g(x) = x^2 \cdot \ln(2x-1)$$

gir

$$g'(x) = 2x \cdot \ln(2x-1) + x^2 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \underline{\underline{2x \cdot \ln(2x-1) + \frac{2x^2}{2x-1} = 2x\left(\ln(2x-1) + \frac{x}{2x-1}\right)}}$$

c)

$$h(x) = \frac{4x}{e^{2x}}$$

gir

$$h'(x) = \frac{4 \cdot e^{2x} - 4x \cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{(4-8x)e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{4-8x}{e^{2x}} = \frac{4(1-2x)}{e^{2x}}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{x(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x+1+x-1-x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x^2-1}}}$$

b)

$$\frac{\left(\ln e^3+1\right)^2}{\left(e^{\ln 3}+1\right)^3}=\frac{\left(3+1\right)^2}{\left(3+1\right)^3}=\frac{4^2}{4^3}=4^{2-3}=4^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

$f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$

a) $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, så divisjonen går opp dersom $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2-11\cdot\frac{1}{2}+6=\frac{2}{8}-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}+6=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{22}{4}+\frac{24}{4}=\frac{1-3-22+24}{4}=\frac{0}{4}=0$$

Divisjonen $f(x):(2x-1)$ går opp. <u>Som skulle vises</u>

b)

$$\left(2x^3-3x^2-11x+6\right):\left(2x-1\right)=x^2-x-6$$

$$\begin{array}{l}
\underline{2x^3-x^2} \\
\quad -2x^2-11x+6 \\
\quad \underline{-2x^2+x} \\
\qquad -12x+6 \\
\qquad \underline{-12x+6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Bruker "sum og produkt" for å faktorisere x^2-x-6
Da får vi:

$$f(x)=\left(2x-1\right)\left(x^2-x-6\right)=\underline{\underline{\left(2x-1\right)\left(x-3\right)\left(x+2\right)}}$$

c)

$$f(x)\geq\left(2x-1\right)\left(x+2\right)$$

$$\left(2x-1\right)\left(x-3\right)\left(x+2\right)\geq\left(2x-1\right)\left(x+2\right)$$

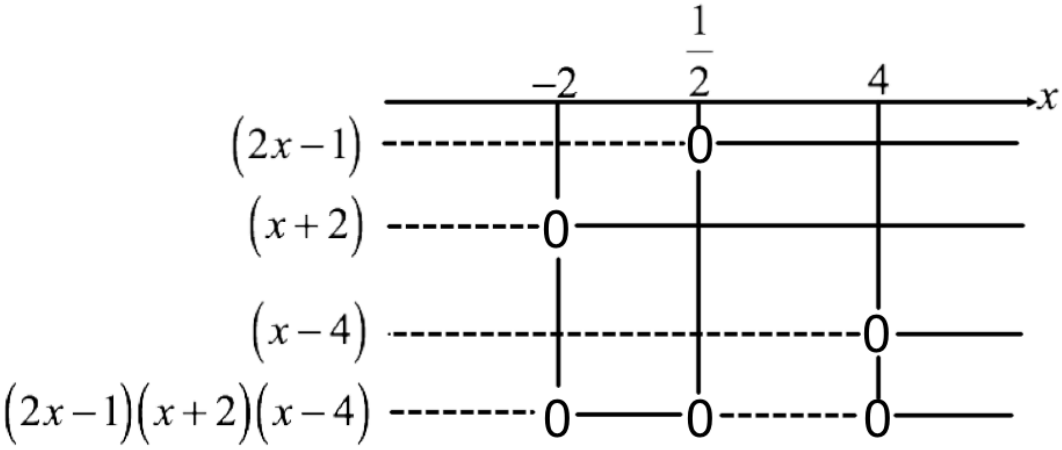
$$\left(2x-1\right)\left(x-3\right)\left(x+2\right)-\left(2x-1\right)\left(x+2\right)\geq 0$$

$$\left(2x-1\right)\left(x+2\right)\left(\left(x-3\right)-1\right)\geq 0$$

$$\left(2x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-4\right)\geq 0$$

fortsetter neste side

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{f(x) \geq (2x-1)(x+2) \text{ når } x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup \left[4, \rightarrow\right\rangle}}$$

Oppgave 4

a)

$$\overrightarrow{AB} = [5-1, -1-3] = \underline{\underline{[4,-4]}}$$

og

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

b) - Sentrum i sirkelen er midtpunktet på *AB*, altså $(3,1)$.

-Radius er $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

-Da har vi at $r^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$.

En likning for sirkelen som har *AB* som diameter er

$$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8}}$$

c) Dersom trekanten *ABC* skal har en rett vinkel i *C*, må *C* ligge på sirkelperiferien og slik at $\angle ACB$ spenner over diameteren i sirkelen.

Siden sentrum har *x*-koordinat 3 og radius er $2\sqrt{2} < 3$, vil ikke linja $x = 6$ skjære sirkelen, og vi kan konkludere med at *C* *ikke* ligger på sirkelperiferien.

<u>Det er *ikke* mulig å plassere *C* slik at trekant *ABC* får en rett vinkel i *C*</u>

Oppgave 5

a) Her har vi et uordnet utvalg uten tilbakelegging.

$$\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 4=120$$

<u>Det er 120 ulike grupper på tre personer som kan komme til finalen</u>

b) Finner antall grupper som består av 2 eller 3 kvinner. Det blir det samme som å si enten én eller ingen menn.

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{0}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{5}{1}+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1=10\cdot 5+10\cdot 1=60$$

<u>60 av gruppene, altså halvparten, består av flere kvinner enn menn</u>

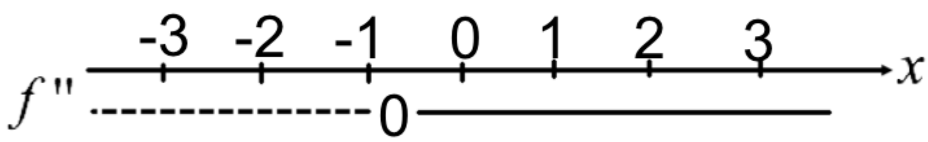
Oppgave 6

a) Graf A synker i samme intervall som graf B ligger under *x*-aksen og stiger i intervallet der graf B ligger over *x*-aksen.
Graf A har et bunnpunkt som har samme *x*-koordinat som nullpunktet på graf B.

<u>Graf A er grafen til *f* og graf B er grafen til *f'*</u>

b) *f''* må ha et nullpunkt som i *x*-retning sammenfaller med bunnpunktet på grafen til den deriverte av *f*.

Fortegnslinje (skisse):



Oppgave 7

a) $\angle BPD$ og $\angle APC$ er toppvinkler, og dermed like.
$\angle CAP$ og $\angle BDP$ er periferivinkler som begge spenner over buen *BC*, så disse to vinklene er også like store.
Vi kan da konkludere med at alle samsvarende vinkler er like store i ΔAPC og ΔBPD.

ΔAPC og ΔBPD er formlike, <u>som skulle forklares</u>

b) Formlikheten vi viste i a) gjør at vi kan sette opp følgende forhold:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{CP}{PB}$$

Når vi "kryssmultipliserer" her, får vi:

$AP\cdot PB=CP\cdot PD$, <u>som skulle vises</u>

Oppgave 8

a) Dersom Grafen til *f* har toppunkt i $\left(2, f(2)\right)$, må $f'(2)=0$.

Det betyr ikke at vi kan si at grafen til *f* må ha toppunkt når $f'(2)=0$, for det ville jo også være tilfellet dersom grafen til *f* hadde bunnpunkt eller terrassepunkt i $\left(2, f(2)\right)$.

Vi får da følgende konklusjon:

$$\underline{\underline{f'(2)=0 \quad \Leftarrow \quad \text{Grafen til } f \text{ har et toppunkt i } \left(2, f(2)\right)}}$$

b) Dersom $f'(3)=0$ og $f''(3)>0$ må grafen til *f* har et bunnpunkt i $\left(3, f(3)\right)$.

Det betyr imidlertid ikke at $f''(3)$ nødvendigvis er større enn null når vi har et bunnpunkt. Det finnes mange eksempler på funksjoner som vil være slik at $f'(3)=f''(3)=0$. Disse vil da ha bunnpunkt i $\left(3, f(3)\right)$, uten at $f''(3)>0$.

Vi får da følgende konklusjon:

$$\underline{\underline{f'(3)=0 \text{ og } f''(3)>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Grafen til } f \text{ har bunnpunkt i } \left(3, f(3)\right)}}$$

Del 2

Oppgave 1

$\vec{r}(t)=\left[28t-3t^2, 10t-5t^2\right]$

a)

CAS

1	r(t):=Vektor(28t−3t²,10t−5t²) $\rightarrow \mathbf{r(t)} := \begin{pmatrix} -3t^2+28t \\ -5t^2+10t \end{pmatrix}$
2	v(t):=r'(t) $\rightarrow \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} -6t+28 \\ -10t+10 \end{pmatrix}$
3	abs(v(0)) $\approx$ **29.732**

<u>Ballen fikk en banefarten på 29,7 m/s da den ble sparket</u>

b) Når ballen treffer bakken er y-koordinaten til posisjonsvektoren lik null.

3	$-5t^2+10t=0$
	Løs: $\{t = 0, t = 2\}$

Løsningene forteller at ballen lå på bakken etter 0 sekunder og etter 2 sekunder.

<u>Det gikk 2 sekunder fra ballen ble sparket, til den traff bakken igjen</u>

c) Når ballen var i sitt høyeste punkt, hadde den ingen fart i y-retning. Det betyr at y-koordinaten til fartsvektoren var lik null ved dette tidspunktet.

2	v(t):=r'(t)
	$\rightarrow\ \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} -6t+28 \\ -10t+10 \end{pmatrix}$
3	$-10t+10=0$
	Løs: $\{t = 1\}$
4	abs(v(1))
	$\rightarrow\ 22$

<u>Ballen hadde en banefart på 22 m/s da den var i sitt høyeste punkt</u>

Oppgave 2

a) Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Må regne ut

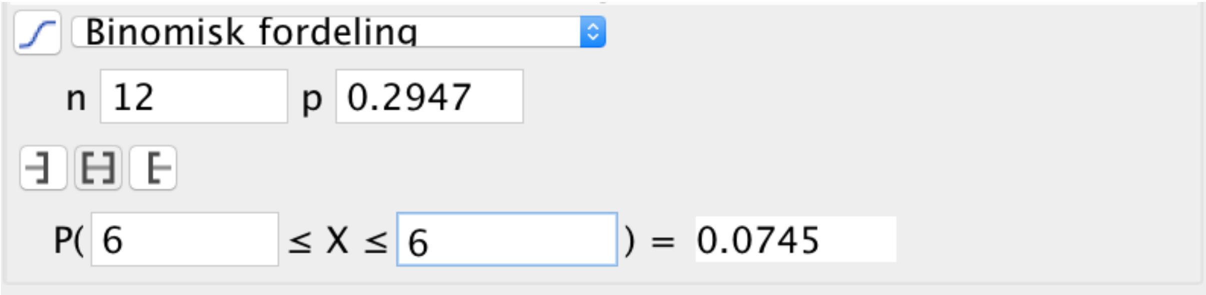
$$\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{2}}{\binom{20}{3}}.$$

Bruker CAS:

CAS	
1	nCr(12, 1)*nCr(8, 2)/nCr(20, 3)
	$\approx\ 0.2947$

Vi ser at sannsynligheten er tilnærmet lik 0,2947 for at nøyaktig to av de tre vinnerne er menn. <u>Som skulle vises.</u>

b) Nå har vi en binomisk sannsynlighetsmodell. Bruker sannsynlighetskalkulatoren og lar X være antall ganger nøyaktig to av tre vinnere i lotteriet er menn.

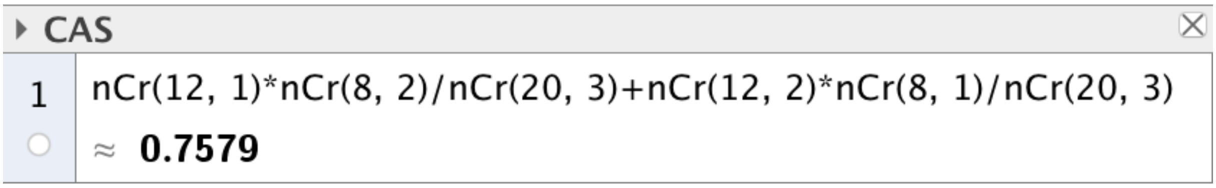


<u>Det er 7,45 % sannsynlig at to av tre vinnere er menn i seks av de tolv lotteriene</u>

c) Finner sannsynligheten for at *ikke* alle tre vinnerne er av samme kjønn i et tilfeldig lotteri. Altså at begge kjønn er representert blant vinnerne.

Må da regne ut $\dfrac{\binom{12}{1}\binom{8}{2}}{\binom{20}{3}}+\dfrac{\binom{12}{2}\binom{8}{1}}{\binom{20}{3}}$

Bruker CAS:



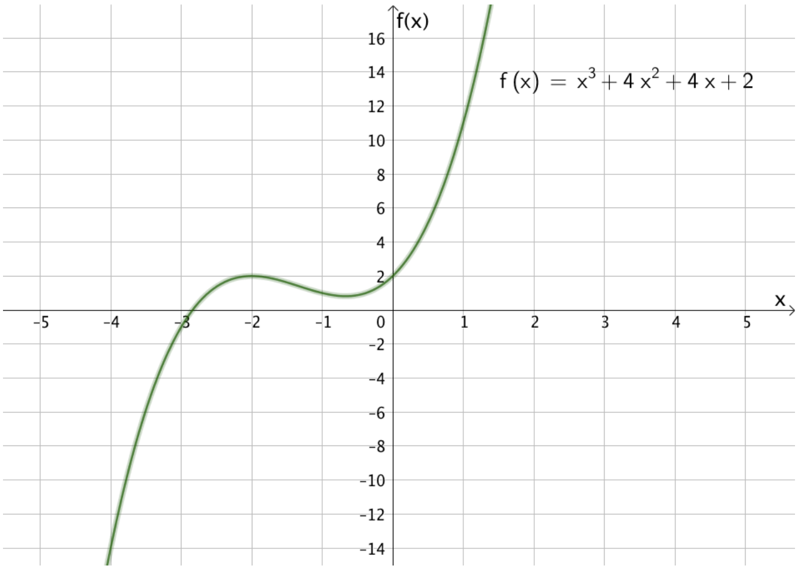
Sannsynligheten for at begge kjønn er representert blant vinnerne i samtlige av de tolv lotteriene er da $0,7579^{12}$. Da er sannsynligheten for at de tre vinnerne er av samme kjønn i *minst ett* av de tolv lotteriene gitt ved $1-0,7579^{12}$

<u>Sannsynligheten for at alle tre vinnerne er av samme kjønn i minst ett av de tolv lotteriene er 96,41 %</u>

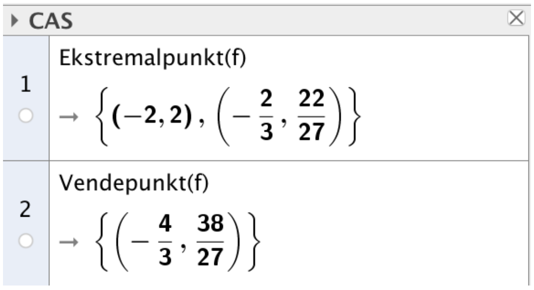
Oppgave 3

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

a)

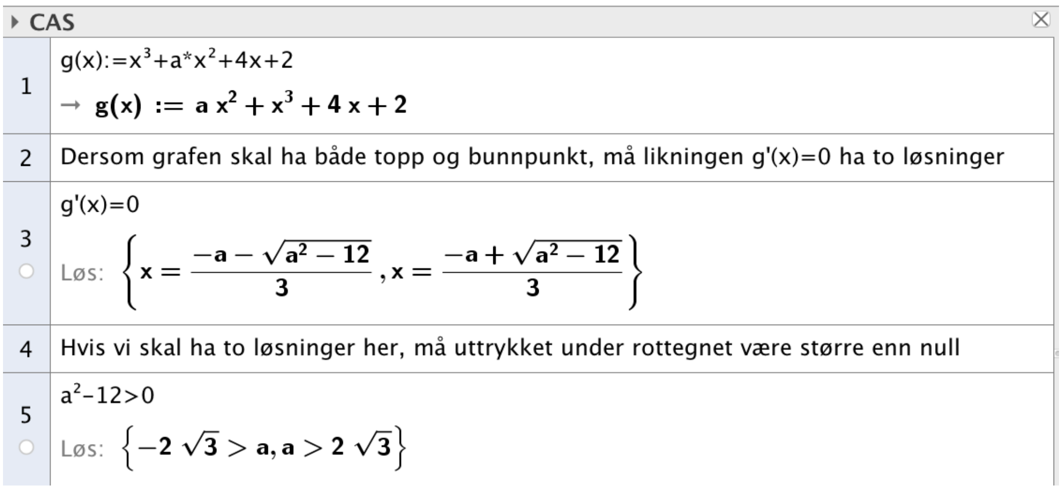


b)



Grafen til f har toppunkt i $(-2,2)$, bunnpunkt i $\left(-\frac{2}{3},\frac{22}{27}\right)$ og vendepunkt i $\left(-\frac{4}{3},\frac{38}{27}\right)$

c)



Grafen til g har både et toppunkt og et bunnpunkt når $a \in \left\langle \leftarrow, -2\sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle 2\sqrt{3}, \rightarrow \right\rangle$

d)

CAS

1	g(x):=x^3+a*x^2+4x+2 $\rightarrow\ \mathbf{g(x) := a\,x^2 + x^3 + 4\,x + 2}$
2	h(x):=-2x^3+4x+2 $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := -2\,x^3 + 4\,x + 2}$
3	Vendepunkt(g) $\rightarrow\ \left\{\left(-\frac{a}{3}, \frac{2\,a^3 - 36\,a + 54}{27}\right)\right\}$
4	h(-a/3) $\rightarrow\ \frac{2}{27}\,a^3 - \frac{4}{3}\,a + 2$
5	$(2a^3 - 36a + 54) / 27 \stackrel{?}{=} \$4$ $\rightarrow$ **true**

I rad 3 finner vi vendepunktet på grafen til g.
Setter vi x-koordinaten til vendepunktet inn for x i funksjonsuttrykket til h, får vi y-koordinaten til dette vendepunktet.
(I rad 5 får jeg bekreftet at uttrykket i rad 4 er likt y-koordinaten til vendepunktet, så slipper jeg å utvide og samle på felles brøkstrek selv).

Vendepunktet på grafen til g ligger på grafen til h for alle verdier av a.
Som skulle vises.

Oppgave 4

a) BC og GC er begge sider i kvadratet *CBFG*, så disse er like lange.
AC og DC er begge sider i kvadratet *CDEA*, så disse er også like lange.
BC og GC danner en rett vinkel, noe som også gjelder for AC og DC.

Da har vi at to sider er parvis like lange i de to trekantene, samtidig som vinkelen mellom disse sidene er like stor. Da er trekantene kongruente.

$\Delta ABC \cong \Delta GDC$, som skulle begrunnes.

b) Vi tenker oss at *AB* er diameteren i en sirkel. Da ville punktet *C*, i følge Thales' setning, ligge på sirkelperiferien, siden $\angle ACB$ er $90°$. Siden *H* er midtpunktet på *AB*, ville *H* vært sentrum i sirkelen. Da hadde både *HA* og *HC* vært radius. Det betyr at *HA* og *HC* er like lange, som igjen betyr at trekanten *AHC* er likebeint.

ΔAHC er likebeint, som skulle begrunnes.

c) $\angle GCI$ og $\angle ACH$ er toppvinkler, og dermed like store.
Siden trekant *AHC* er likebeint, betyr det også at $\angle GCI = \angle BAC$.
Vi har allerede vist at trekant *GDC* og trekant *ABC* er kongruente, så vi vet at $\angle IGC = \angle ABC$.
Da har vi at to vinkler er parvis like store i trekant *ABC* og trekant *IGC*, og kan si at

disse to trekantene er formlike. Siden trekant ABC er rettvinklet, må også trekant IGC være rettvinklet.

$\angle CIG = 90^\circ$, som skulle vises.