Løsningsforslag eksamen S1 våren 2019

Del 1

Oppgave 1

a)

$$3^{x-5} = 81$$
$$3^{x-5} = 3^4$$
$$x - 5 = 4$$
$$x = 4 + 5$$
$$\underline{\underline{x = 9}}$$

b)

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

gir

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

så

$$\underline{\underline{x = 2 \vee x = 5}}$$

c)

$$\lg(x+3) - \lg x = 1 \qquad \text{NB! Må ha } x > 0$$
$$\lg\left(\frac{x+3}{x}\right) = 1$$
$$10^{\lg\left(\frac{x+3}{x}\right)} = 10^1$$
$$\frac{x+3}{x} = 10$$
$$10x = x + 3$$
$$9x = 3$$
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{16^2\cdot 27^3}{72^2\cdot 12}=\frac{\left(4^2\right)^2\cdot\left(3^3\right)^3}{\left(3^2\cdot 8\right)^2\cdot 3\cdot 4}=\frac{4^4\cdot 3^9}{3^4\cdot 8^2\cdot 3\cdot 4}=\frac{4^{4-1}\cdot 3^{9-4-1}}{8^2}=\frac{4^3\cdot 3^4}{8^2}=\frac{64\cdot 3^4}{64}=3^4=\underline{\underline{81}}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x-1}-\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}&=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{x^2-x-2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2-x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{x^2-x-2-x^2+x-2x}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{-2x-2}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{-2(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\underline{\underline{-\frac{2}{x-1}}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lg\left(\frac{2}{x^2}\right)+\lg\left(2x^2\right)+\lg x-\lg(4x)&=\lg\left(\frac{2}{x^2}\cdot 2x^2\right)+\lg x-(\lg 4+\lg x)\\&=\lg 4+\lg x-\lg 4-\lg x\\&=\underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

$I.\quad x^2+2y=13x$

$II.\quad 3x-y=-5\Rightarrow y=3x+5$

Setter II inn i I:

$$x^2+2(3x+5)=13x$$

$$x^2+6x+10-13x=0$$

$$x^2-7x+10=0$$

Har fra oppgave 1b) at $x=2\vee x=5$

Setter $x=2$ inn i II: $y=3\cdot 2+5=6+5=11$

Setter $x=5$ inn i II: $y=3\cdot 5+5=15+5=20$

Løsningene er $\underline{\underline{x=2\wedge y=11 \text{ eller } x=5\wedge y=20}}$

Oppgave 4

a) Lar *x* være antall brus og lar *y* være antall pølser.
Informasjonen om den første fredagen gir $6x+4y=170$
Informasjonen om fredagen etter gir $5x+10y=275 \Leftrightarrow x+2y=55$
Vi har da følgende likningssystem:

$$I.\ 6x+4y=170$$

$$\underline{\underline{II.\ x+2y=55}}$$

b) Trekker likning *II* fra likning *I* to ganger og får:

$$4x=60$$

$$x=15$$

Setter dette inn i likning *II* og får:

$$15+2y=55$$

$$2y=40$$

$$y=20$$

<u>Prisen var 15 kroner for én brus og 20 kroner for én pølse</u>

Oppgave 5

$$f(x)=x^3+3x$$

a)

$$f'(x)=3x^2+3$$

$$så$$

$$f'(1)=3\cdot 1^2+3=3+3=\underline{\underline{6}}$$

Svaret forteller at den momentane vekstfarten til *f* er 6 når $x=1$

b) $f'(x)=3x^2+3$

Siden $x^2>0$ for alle *x*, vil $f'(x)>0$ for alle *x*. Når den deriverte er positiv for alle *x*, vet vi at grafen til *f* bare har tangenter med positivt stigningstall.
<u>Som skulle forklares</u>

c)

$$f'(x)=15$$

$$3x^2+3=15$$

$$3x^2=15-3$$

$$x^2=\frac{12}{3}$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm\sqrt{4}$$

$$x=\pm 2$$

$$\underline{\underline{f \text{ har momentan vekstfart lik 15 for } x=-2 \text{ og } x=2}}$$

Oppgave 6

a) Her har vi et uordnet utvalg uten tilbakelegging.

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

<u>Det er 120 ulike grupper på tre personer som kan komme til finalen</u>

b) Finner antall grupper som består av 2 eller 3 kvinner. Det blir det samme som å si enten én eller ingen menn.

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 10 \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 60$$

<u>60 av gruppene, altså halvparten, består av flere kvinner enn menn</u>

Oppgave 7

a) Området er avgrenset av koordinataksene og to rette linjer.

Den ene av linjene krysser y-aksen i 2 og har stigningstall $\frac{1}{2}$.
Den andre linja krysser y-aksen i 6 og har stigningstall -2.
Området skal ligge under begge disse linjene.
Vi har da følgende ulikheter som avgrenser området:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y \leq \frac{1}{2}x + 2$$

$$\underline{\underline{y \leq -2x + 6}}$$

b) Hjørnet (3,0) gir $3x + y = 9$, mens hjørnet (0,2) gir $3x + y = 2$.
Siden x er mindre enn 2 og y er mindre enn 3 i skjæringspunktet mellom linjene, vet vi at dette hjørnet gir $3x + y < 9$.

$$\underline{\underline{\text{Den største verdien } 3x + y \text{ kan ha, når } (x, y) \text{ ligger i det blå området, er } 9}}$$

c) I punktet (0,2) har vi $y - ax = 2$. Så lenge vi har $a > 0$, vil dette være største verdien til uttrykket, når $y \leq 2$. Den største verdien y har i området er y-koordinaten til skjæringspunktet mellom de to linjene.

Finner dette skjæringspunktet:
(fortsetter neste side)

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 6$$
$$\frac{1}{2}x + 2x = 6 - 2$$
$$\frac{5}{2}x = 4$$
$$x = \frac{8}{5}$$

Setter dette inn i den ene likningen og får:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} + 2 = \frac{8}{10} + \frac{20}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5},$$

som da er den høyeste verdien til y i området.

Høyeste verdi av uttrykket $y - ax$ skal være 2, så må finne ut hva a må være for at verdien skal være mindre enn 2 i punktet $\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

$$\frac{14}{5} - a \cdot \frac{8}{5} < 2$$
$$14 - 8a < 10$$
$$-8a < 10 - 14$$
$$a > \frac{-4}{-8}$$
$$a > \frac{1}{2}$$

Vi må ha $a > \frac{1}{2}$ for at $y - ax$ skal ha sin største verdi i punktet $(0,2)$

Oppgave 8

a) Informasjonen om samlet omkrets gjør at vi kan si:

$$8x + 4y = 12$$
$$4y = 12 - 8x$$
$$y = 3 - 2x$$

Arealet av hele figuren er $2 \cdot x^2 + y^2$. Når vi setter inn $y = 3 - 2x$, får vi:

$A(x) = 2x^2 + (3 - 2x)^2 = 2x^2 + 9 - 12x + 4x^2 = 6x^2 - 12x + 9$, som skulle vises

b)

$$A'(x) = 12x - 12 = 12(x - 1)$$

Setter den deriverte lik null for å finne *x*-verdien som gir det minste arealet. Siden andregradskoeffisienten til funksjonsuttrykket er positiv, vet vi at grafen til *A* er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"), så den har *bunnpunkt* der den deriverte er lik null.

$$A'(x) = 0$$
$$12(x-1) = 0$$
$$x = 1$$

Setter inn i uttrykket for *y*: $y = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

$$\underline{\underline{\text{Det samlede arealet av figuren er størst når } x = y = 1}}$$

Del 2

Oppgave 1

a) - Det gir ikke mening å bake et negativt antall kaker, så må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- Når vi ser på antall gram mel som trengs til hver av kaketypene og hvor mye mel Snipp har til rådighet, får vi ulikheten:

$$300x + 500y \leq 50000 \quad | \cdot \frac{1}{100}$$
$$3x + 5y \leq 500$$

- Når vi ser på antall gram sukker som trengs til hver av kaketypene og hvor mye sukker Snipp har til rådighet, får vi ulikheten:

$$100x + 50y \leq 7000 \quad | \cdot \frac{1}{50}$$
$$2x + y \leq 170$$

- Når vi ser på antall gram smør som trengs til hver av kaketypene og hvor mye smør Snipp har til rådighet, får vi ulikheten:

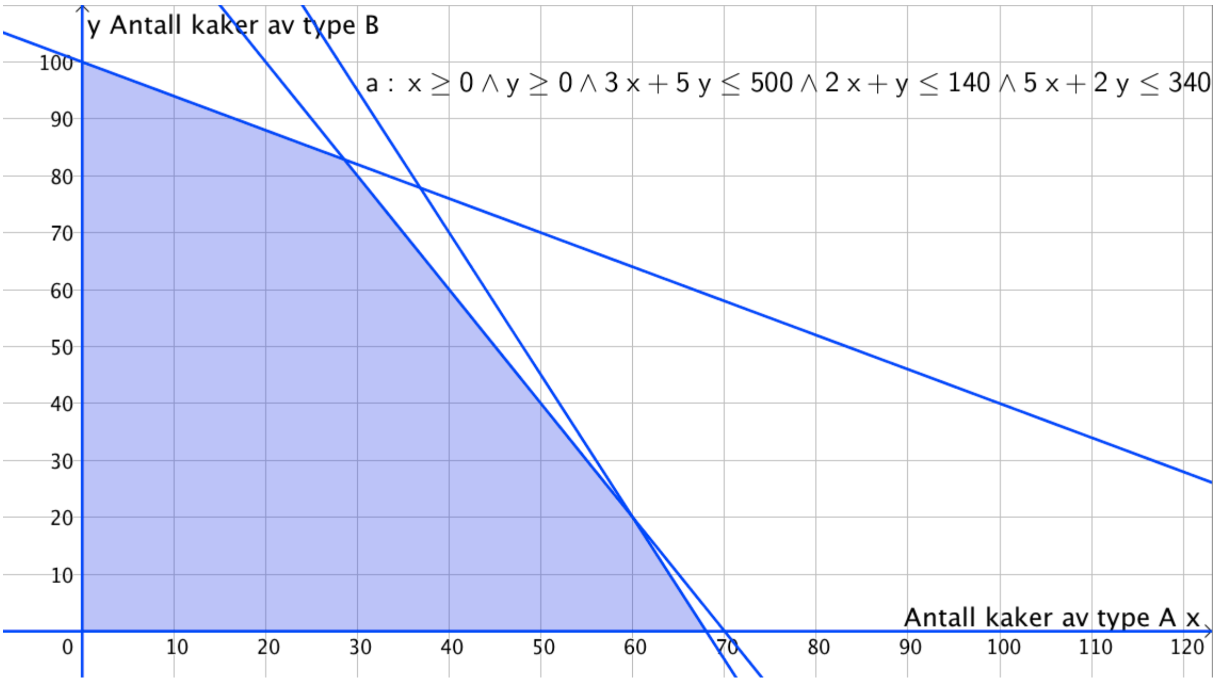
$$125x + 50y \leq 8500 \quad | \cdot \frac{1}{25}$$
$$5x + 2y \leq 340$$

Vi ender altså opp med at *x* og *y* må oppfylle følgende ulikheter:

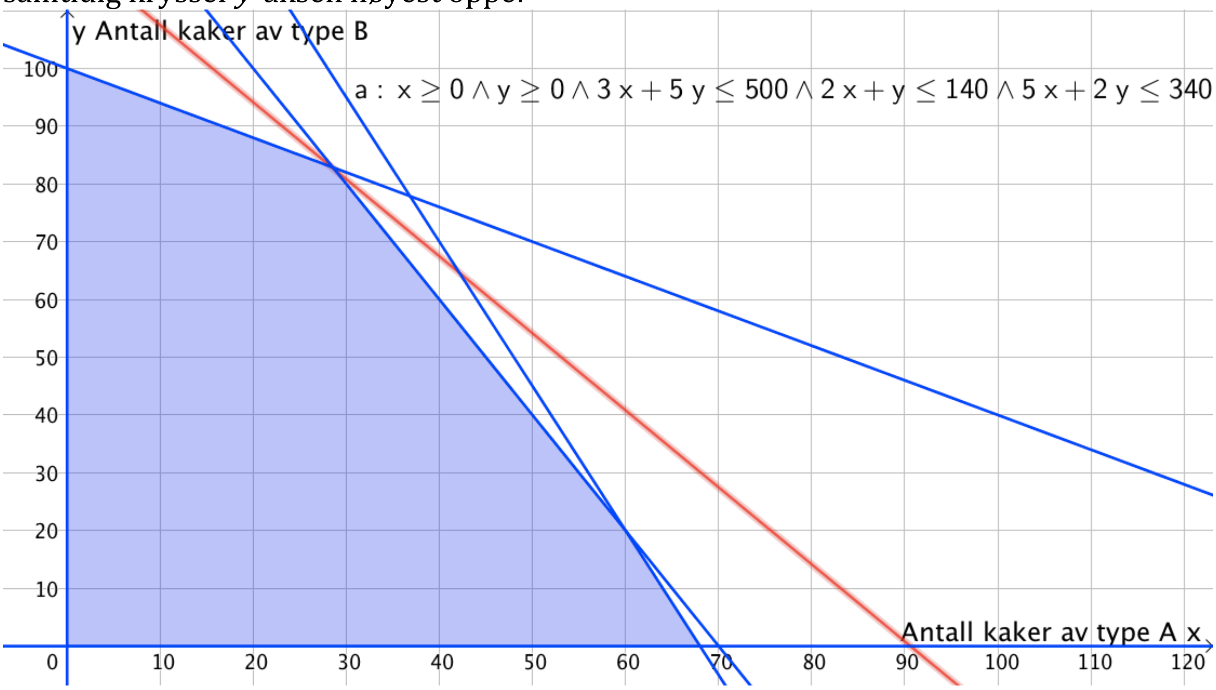
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$2x + 5y \leq 500$$
$$2x + y \leq 140$$
$$5x + 2y \leq 340$$

<u>Som skulle forklares</u>

b)

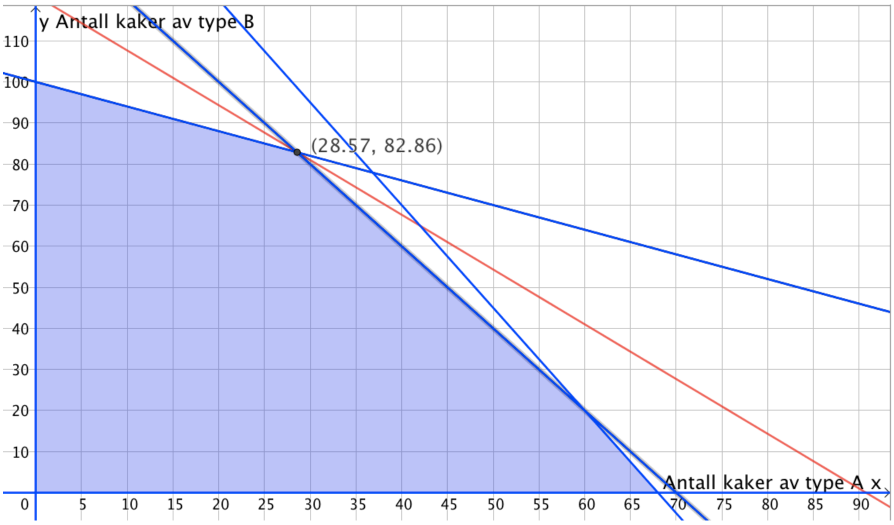


c) Tegner linja $160x + 120y = 0$ og parallellforskyver denne til jeg finner det hjørnet i det skraverte området som er slik at linja går gjennom hjørnet og samtidig krysser *y*-aksen høyest oppe:



Det aktuelle punktet er skjæringspunktet mellom linjene $3x + 5y = 500$ og $2x + y = 140$. Tegner disse og finner skjæringspunktet ved hjelp av kommandoen *" Skjæring(<Objekt>, <Objekt>)"*.

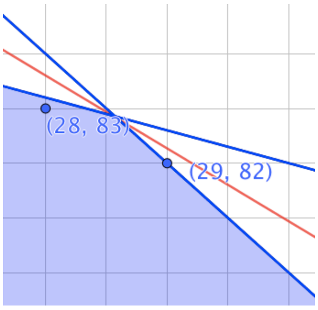
(se bildet øverst på neste side)



Det ideelle antallet kaker er 28,57 av type *A* og 82,86 av type *B.* Dette ville gitt en fortjeneste på $160kr \cdot 28{,}57 + 120kr \cdot 82{,}86 = 14514{,}5kr$.

Vi må nok anta at bakermester Snipp produserer hele kaker, så da må vi gjøre avrundinger. Jeg skriver inn punktene (28,83) og (29,82) og ser at disse også ligger i det skraverte området.

Utsnitt:

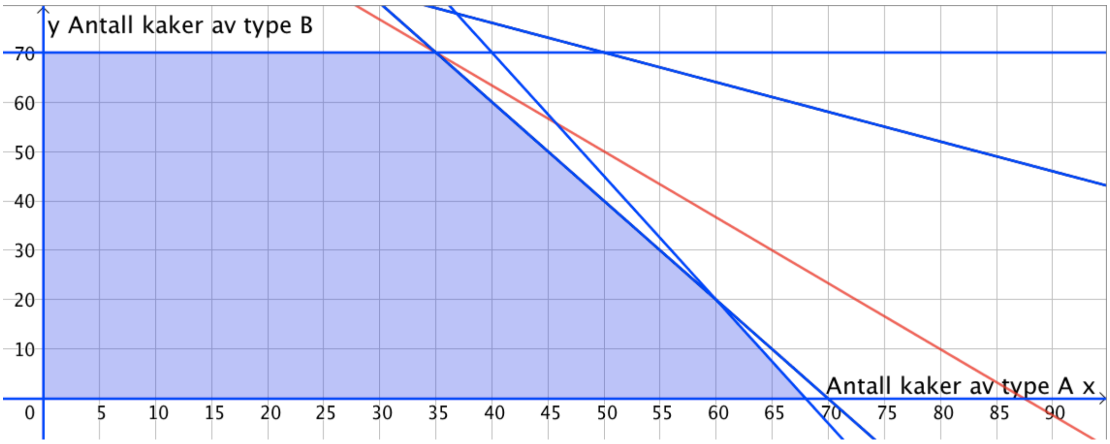


Når vi regner ut fortjenesten her, får vi henholdsvis

$160kr \cdot 28 + 120kr \cdot 83 = 14440kr$ og $160kr \cdot 29 + 120kr \cdot 82 = 14480kr$

<u>Fortjenesten blir størst når Snipp baker 29 kaker av type *A* og 82 av type *B*.
Da er fortjenesten på 14 480 kroner.</u>

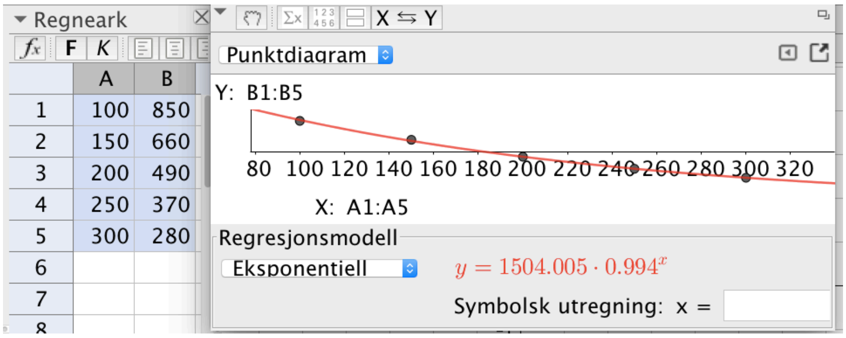
d) Legger til ulikheten $y \leq 70$ og får følgende område (justerer nivålinja også):



<u>Denne dagen må han bake 35 kaker av type *A* og 70 av type *B* for størst mulig fortjeneste</u>

Oppgave 2

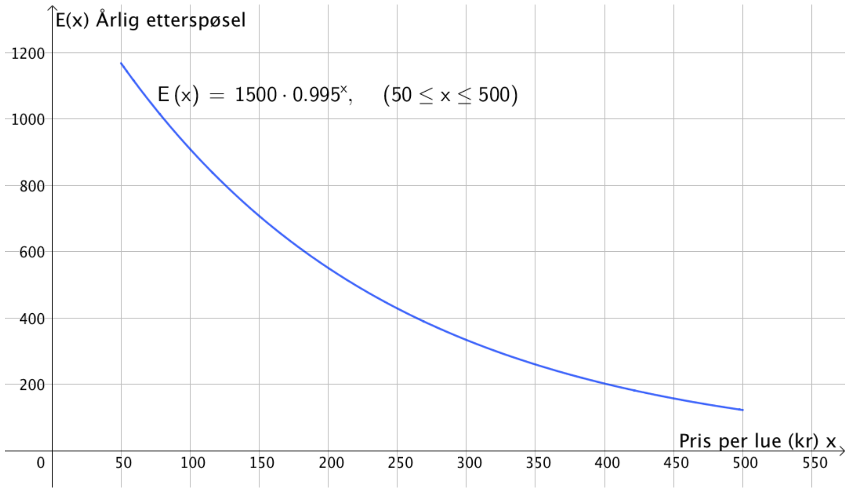
a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra, velger regresjonsanalyse og eksponentiell modell.



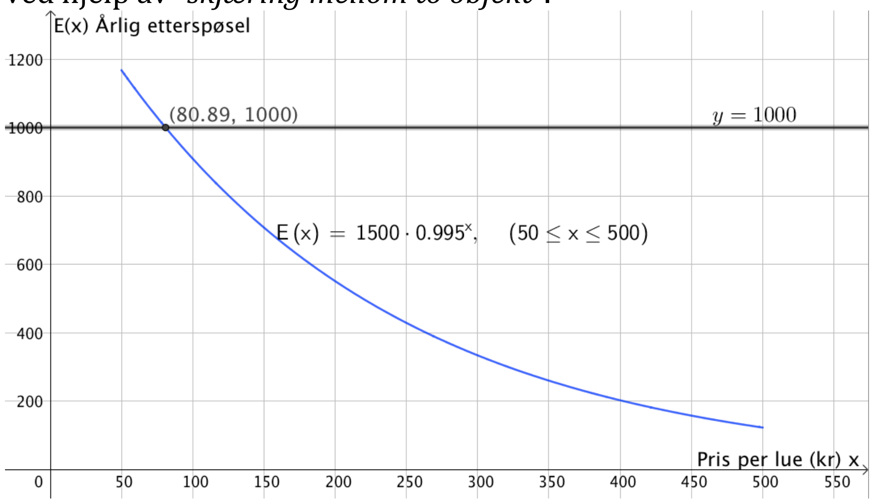
	A	B
1	100	850
2	150	660
3	200	490
4	250	370
5	300	280

Vi ser at den eksponentialmodellen som passer best med tallene i tabellen er $\underline{\underline{Q(x) = 1504 \cdot 0{,}994^x}}$

b)



c) Tegner linja $y = 1000$ og finner skjæringspunktet mellom denne og grafen til E ved hjelp av *"skjæring mellom to objekt"*.

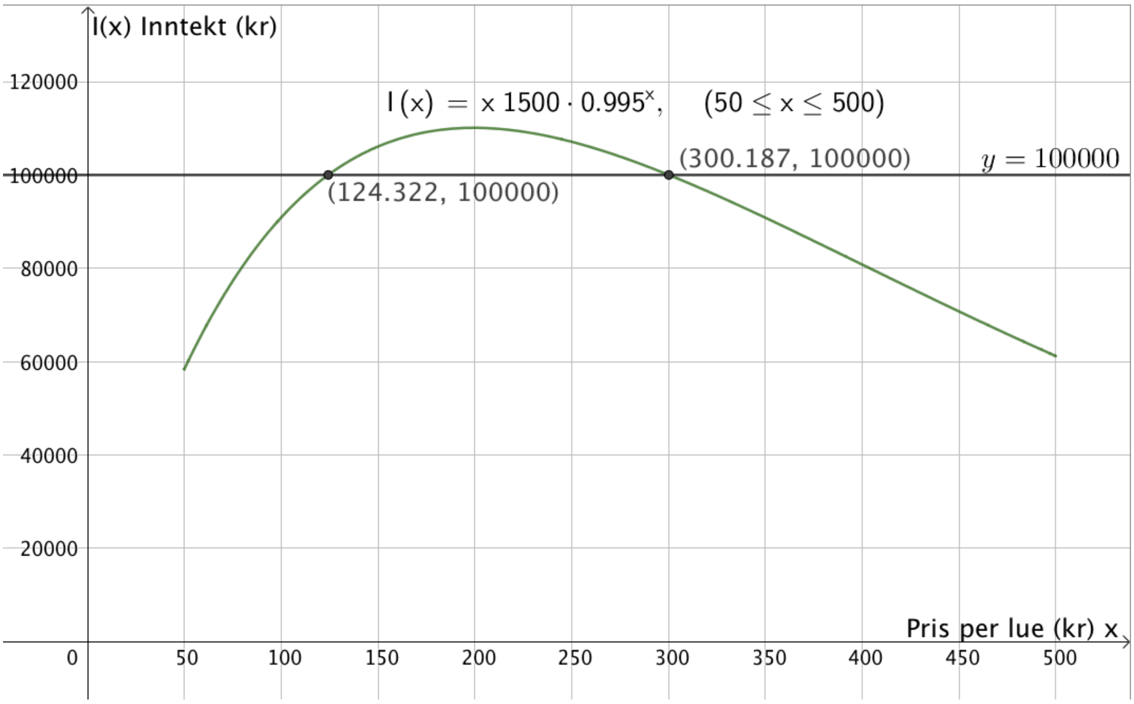


<u>Prisen må ligge mellom 50 og 80 kroner for at etterspørselen skal være mer enn 1000 luer per år i denne byen</u>

d) Vi kan uttrykke inntekt som pris multiplisert med etterspørsel, slik at vi får en funksjon som beskriver inntekt avhengig av pris. Kaller denne funksjonen for *I*.

$$I(x) = x \cdot E(x) = x \cdot 1500 \cdot 0{,}995^x$$

Tegner grafen til *I* med samme definisjonsområde som for *E*. Tegner også linja $y = 100000$ og finner skjæringspunktene mellom denne og grafen til *I* ved hjelp av *"skjæring mellom to objekt"*.



<u>Bedriften bør sette prisen per lue til 124 kroner eller 300 kroner</u>

Oppgave 3

a) Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Må regne ut

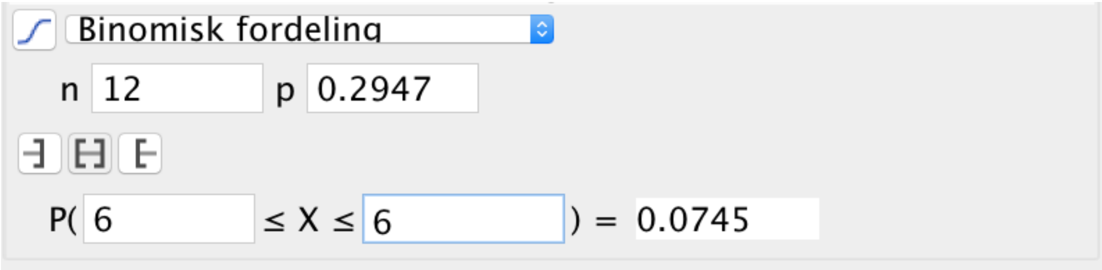
$$\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{2}}{\binom{20}{3}}.$$

Bruker CAS:

```
CAS
1  nCr(12, 1)*nCr(8, 2)/nCr(20, 3)
   ≈ 0.2947
```

Vi ser at sannsynligheten er tilnærmet lik 0,2947 for at nøyaktig to av de tre vinnerne er menn. <u>Som skulle vises.</u>

b) Nå har vi en binomisk sannsynlighetsmodell. Bruker sannsynlighetskalkulatoren og lar *X* være antall ganger nøyaktig to av tre vinnere i lotteriet er menn.

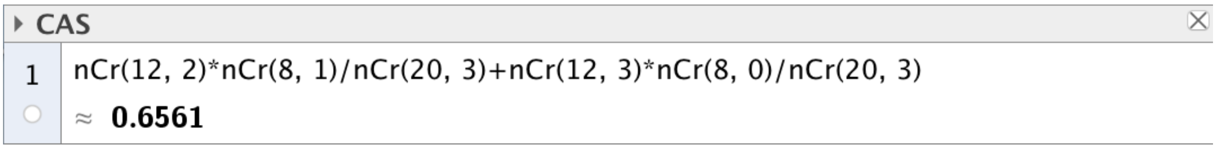


<u>Det er 7,45 % sannsynlig at to av tre vinnere er menn i seks av de tolv lotteriene</u>

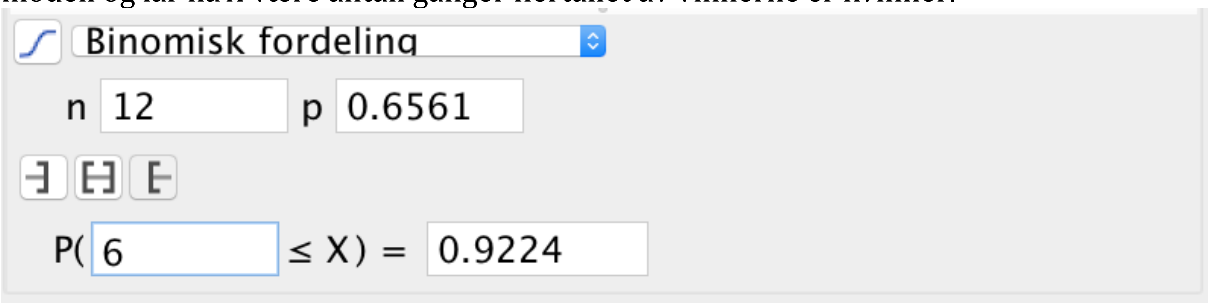
c) Må først avgjøre hva sannsynligheten er for at det er flertall av kvinnelige vinnere i et tilfeldig lotteri. Da har vi igjen en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Må regne ut:

$$\frac{\binom{12}{2}\binom{8}{1}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{12}{3}\binom{8}{0}}{\binom{20}{3}}$$

Bruker CAS:



Da kan jeg bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Vi har en binomisk modell og lar nå *X* være antall ganger flertallet av vinnerne er kvinner.



<u>Det er ca.92% sannsynlig at flertallet er vinnere i minst halvparten av lotteriene</u>

d) Finner sannsynligheten for at *ikke* alle tre vinnerne er av samme kjønn i et tilfeldig lotteri. Altså at begge kjønn er representert blant vinnerne.

Må da regne ut $\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{12}{2}\binom{8}{1}}{\binom{20}{3}}$

Bruker CAS:

CAS

1	nCr(12, 1)*nCr(8, 2)/nCr(20, 3)+nCr(12, 2)*nCr(8, 1)/nCr(20, 3)
	≈ **0.7579**

Sannsynligheten for at begge kjønn er representert blant vinnerne i samtlige av de tolv lotteriene er da $0,7579^{12}$. Da er sannsynligheten for at de tre vinnerne er av samme kjønn i *minst ett* av de tolv lotteriene gitt ved $1-0,7579^{12}$

CAS

1	$1-0.7579^{12}$
	≈ **0.9641**

<u>Sannsynligheten for at alle tre vinnerne er av samme kjønn i minst ett av de tolv lotteriene er 96,41 %</u>