Løsningsforslag eksamen R1 Høsten 2017

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = \underline{\underline{6x - 2}}$$

b)

$$g(x) = x^2 e^x$$
$$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = \underline{\underline{x(2+x)e^x}}$$

c)

$$h(x) = \ln\left(x^3 - 1\right)$$
$$h'(x) = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3 - 1}}}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} 2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln\left(ab^2\right) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) &= 2\ln b - (\ln 1 - \ln b) - \left(\ln a + \ln b^2\right) + \ln a - \ln b^2 \\ &= 2\ln b - 0 + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\ &= \underline{\underline{-\ln b}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) $\vec{a} - 2\vec{b} = [3,1] - 2[4,2] = [3 - 2\cdot 4, 1 - 2\cdot 2] = [3-8, 1-4] = \underline{\underline{[-5,-3]}}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = [3,1]\cdot[4,2] = 3\cdot 4 + 1\cdot 2 = 12 + 2 = \underline{\underline{14}}$

c)

$$\vec{b} = k \cdot \vec{c}$$
$$[4,2] = k[t+1, 3]$$
$$[4,2] = [kt + k, 3k]$$

Dette gir oss likningene $3k = 2 \wedge kt + k = 4$

$$3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

som innsatt i den andre likningen gir:

$$\frac{2}{3}t + \frac{2}{3} = 4$$

$$2t + 2 = 12$$

$$t = \frac{12-2}{2} = 5$$

$\underline{\underline{\vec{b} \parallel \vec{c} \text{ når } t = 5}}$

d)

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

$$\left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2$$

$$(t+1)^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2$$

$$t^2 + 2t + 1 + 9 = 9 + 1$$

$$t^2 + 2t = 10 - 10$$

$$t^2 + 2t = 0$$

$$t(t+2) = 0$$

$$så$$

$$\underline{\underline{t = -2 \vee t = 0}}$$

Oppgave 4

a) ΔABC har grunnlinje x og høyde $f(x) = 2(x-3)^2$, så arealet F av trekanten er gitt ved

$$F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2} = \frac{x \cdot 2(x-3)^2}{2} = x(x-3)^2 = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x^3 - 6x^2 + 9x,$$

<u>som skulle vises</u>

b) $F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$F'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$$

$$3(x-3)(x-1) = 0$$

$$gir$$

$$x_1 = 3 \vee x_2 = 1$$

Siden vi har at $0 < x < 3$, bruker vi $x = 1$ videre.

$F''(x) = 6x - 12 \Rightarrow F''(1) = -6$

Siden den andrederiverte er negativ for $x = 1$, vet vi at grafen vender den hule siden ned, slik at punktet $(1, F(1))$ må være et toppunkt.

$\underline{\underline{\text{Arealet av } \Delta ABC \text{ er størst når } x = 1}}$

c)

$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2$

Når $x = 2$ er arealet lik 2

Ser om likningen $F(x) = 2$ har flere løsninger:

$$F(x) = 2$$
$$x^3 - 6x^2 + 9x = 2$$
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$$

Siden $F(2) = 2$, vet vi at $(x-2)$ er faktor i $x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$$\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right) : (x-2) = x^2 - 4x + 1$$
$$\underline{x^3 - 2x^2}$$
$$-4x^2 + 9x - 2$$
$$-\underline{4x^2 + 8x}$$
$$x - 2$$
$$\underline{x - 2}$$
$$0$$

og

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$gir$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Vi ser at potensielle *x*-verdier er $2 \pm \sqrt{3}$

$1 < \sqrt{3} < 2$, så $2 + \sqrt{3} > 3$, mens $2 - \sqrt{3} > 0$

Det er altså kun én annen *x*-verdi enn 2 som gir areal lik 2.

$\underline{\underline{\Delta ABC \text{ har areal lik } 2 \text{ når } x = 2 - \sqrt{3} \text{ og når } x = 2}}$

Oppgave 2

a) Vi har et *ordnet* utvalg *med* tilbakelegging.
Vi skal gjennomføre 4 valg med 10 alternativer i hvert valg.
$10^4 = 10000$

Det finnes 10 000 ulike koder for nøkkelbokser av denne typen

b) Vi har et *uordnet* utvalg *uten* tilbakelegging.

$$\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10}{2}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{7}{1} = 5\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 210$$

Det finnes 210 mulige koder for nøkkelbokser av denne typen

c) Binomialkoeffisienten er gitt ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vi har $n = 10$ og skal finne den k som gjør at binomialkoeffisienten blir størst mulig.

Da må nevneren i brøken $\frac{10!}{k!(10-k)!}$ være så liten som mulig.

Vi kan se at $k = 10$ og $k = 0$ gir samme nevner
$0!(10-0)! = 1\cdot 10! = 10!$ og $10!(10-10)! = 10!\cdot 0! = 10!\cdot 1 = 10!$

Vi kan se at $k = 1$ og $k = 9$ gir samme nevner
$1!(10-1!) = 1!\cdot 9! = 9!$ og $9!(10-9!) = 9!\cdot 1! = 9!$

Vi kan se at $k = 2$ og $k = 8$ gir samme nevner
$2!(10-2!) = 2!\cdot 8!$ og $8!(10-8!) = 8!\cdot 2!$

Vi ser at verdiene til nevneren er symmetriske om en k-verdi og minker når vi beveger oss inn mot midten av intervallet [0,10]. Verdien i midten er $k = 5$, så det er denne som vil gi den minste nevneren i brøken over.

$$\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10}{5}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{8}{4}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2} = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 3 = 252$$

For at antallet mulige koder skal bli størst, må vi velge 5 tall til koden.
Da er det 252 muligheter

Her hadde det kanskje vært like enkelt å regne ut for alle mulige k-verdier, men her valgte en litt annerledes tilnærming (en slags optimering).

Oppgave 6

a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [3,-2] + \frac{1}{2}[1-3, 4-(-2)] = [3,2] + [-1,3] = [2,1]$

Posisjonsvektoren til *M* er $[2,1]$, så *M* har koordinater (2,1), <u>som skulle vises</u>

b) Siden *M* ligger på ℓ, kan det brukes som fast punkt.

Vi ser at ℓ også går gjennom punktet $(-1,0)$, så det kan vi bruke for å finne stigningstallet.

$\frac{1-0}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$, så stigningstallet til ℓ er $\frac{1}{3}$.

Da kan vektoren $[3,1]$ være retningsvektor for ℓ.

Punktet $M(1,2)$ og retningsvektoren $[3,1]$ gir følgende parameterfremstilling:

$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$, <u>som skulle vises</u>

c) Setter inn koordinatene $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ i parameterfremstillingen.

$2 + 3t = 12 \Rightarrow t = \frac{10}{3}$ og $1 + t = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$\frac{10}{3} \neq \frac{7}{2}$, så $\underline{\underline{\text{punktet } \left(12, \frac{9}{2}\right) \text{ ligger ikke på linja } \ell}}$

d) Siden *alle* midtnormalene i en trekant skjærer hverandre i *ett* punkt, velger jeg heller å finne skjæringspunktet mellom ℓ og midtnormalen på *BC*. Siden *BC* er parallell med *x*-aksen, må midtnormalen være parallell med *y*-aksen.

$\frac{9+1}{2} = 5$, så *x*-koordinaten til midtpunktet på *BC* er 5. Siden denne midtnormalen er parallell med *y*-aksen, vil alle punktene har *x*-koordinat 5, inkludert skjæringspunktet med ℓ.

Setter *x*-koordinaten i parameterfremstillingen for ℓ lik 5 og finner den tilhørende *t*-verdien.

$2 + 3t = 5 \Rightarrow t = 1$

Da har vi $y = 1 + 1 = 2$

$\underline{\underline{\text{Skjæringspunktet mellom } \ell \text{ og midtnormalen på } AB \text{ er } (5,2)}}$

Oppgave 7

a)

$$x^2 = 1 \qquad\qquad x = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} \qquad \text{og} \qquad x^2 = 1^2$$

$$x = -1 \vee x = 1 \qquad\qquad x^2 = 1$$

Vi ser at det er implikasjon fra venstre mot høyre, men ikke omvendt.

$$\underline{\underline{x^2 = 1 \Leftarrow x = 1}}$$

b)

$$f(x) = 5x^2 - 1$$
$$gir$$
$$f'(x) = 10x$$

Vi ser at det er implikasjon fra venstre mot høyre, men vi vet også at den deriverte av en konstant er lik 0.
For eksempel kan vi si at

$$f(x) = 5x^2 - 8$$
$$gir$$
$$f'(x) = 10x$$

Så det er ikke implikasjon fra venstre mot høyre.

Vi har altså $\underline{\underline{f(x) = 5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 10x}}$

Oppgave 8

Siden tangenten er ei rett linje som går gjennom origo vil stigningstallet kunne uttrykkes slik:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{1-x}}{x}.$$

Samtidig må stigningstallet være lik $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$, siden det er snakk om en tangent. Vi kan nå finne *x*-koordinaten til tangeringspunktet, ved å løse likningen

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$-e^{1-x} = \frac{e^{1-x}}{x}$$

$$x = \frac{e^{1-x}}{-e^{1-x}} = -1$$

Stigningstallet til tangenten er altså $f'(-1) = -e^{1-(-1)} = -e^2$

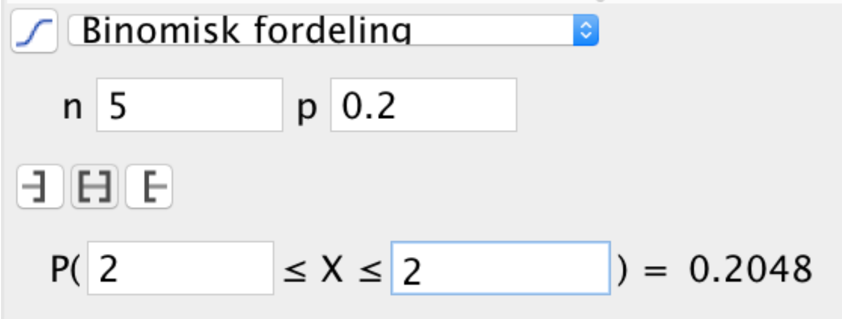
Likningen til tangenten til *f*, som går gjennom origo er $\underline{\underline{y = -e^2 x}}$

Del 2

Oppgave 1

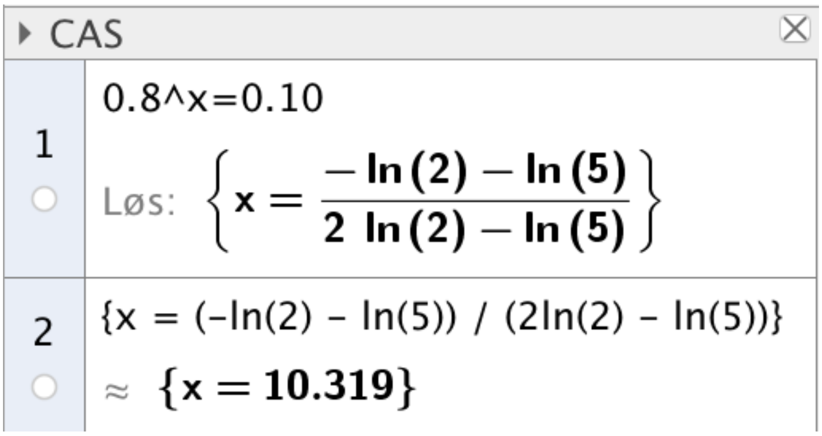
a) Siden det alltid er 20 mulige utfall, der fire er gunstige for hendelsen ”neste sang er en Kygo-sang”, vil vi ha $p = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,2$, som skulle forklares

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



Det er 20,48 % sannsynlig at de nøyaktig 2 av de 5 neste sangene er Kygo-sanger

c) Hvis det skal være 90 % sannsynlig at minst én sang skal være med Kygo, må det samtidig være 10 % sannsynlig at *ingen* av sangene skal være med Kygo.
Det gir oss likningen $(1-0,2)^x = 0,1$, altså $0,8^x = 0,1$.



Jacob må høre 11 avspillinger om sannsynligheten skal være 90 % for minst én sang med Kygo

Oppgave 2

a)

CAS

1	A:=(3,5) $\rightarrow$ **A := (3, 5)**
2	B:=(6,5) $\rightarrow$ **B := (6, 5)**
3	C:=(7,9) $\rightarrow$ **C := (7, 9)**
4	AB:=Vektor(A, B) $\rightarrow \mathbf{AB} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
5	AC:=Vektor(A, C) $\rightarrow \mathbf{AC} := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
6	NLøs(AB*AC=abs(AB)*abs(AC)*cos(x°)) $\approx \{x = -45, x = 45\}$

$\underline{\underline{\angle BAC = 45°}}$

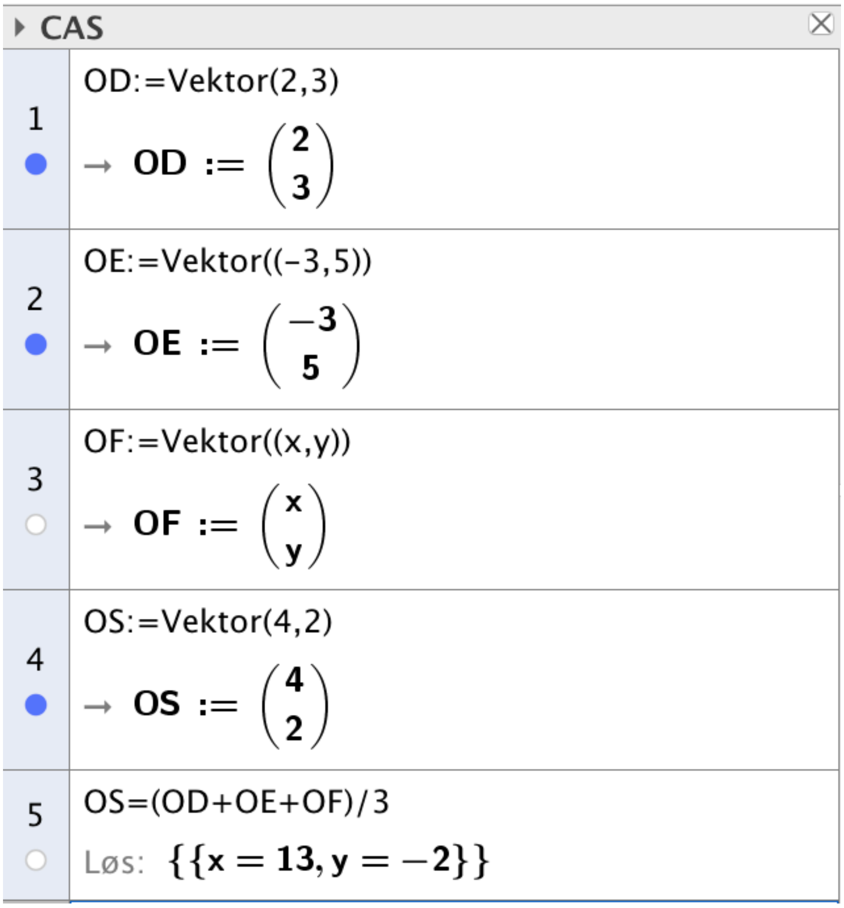
b)

CAS

1	OA:=Vektor(3,5) $\rightarrow \mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2	OB:=Vektor(6,5) $\rightarrow \mathbf{OB} := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
3	OC:=Vektor(7,9) $\rightarrow \mathbf{OC} := \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$
4	(OA+OB+OC)/3 $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\text{Tyngdepunktet har koordinater } \left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)}}$

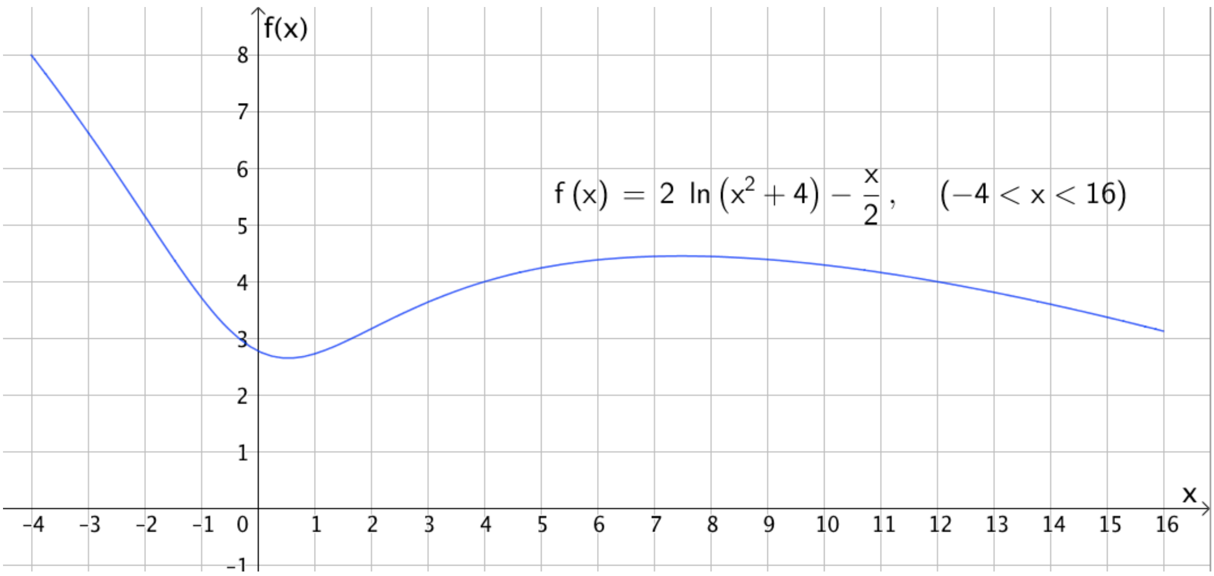
c)



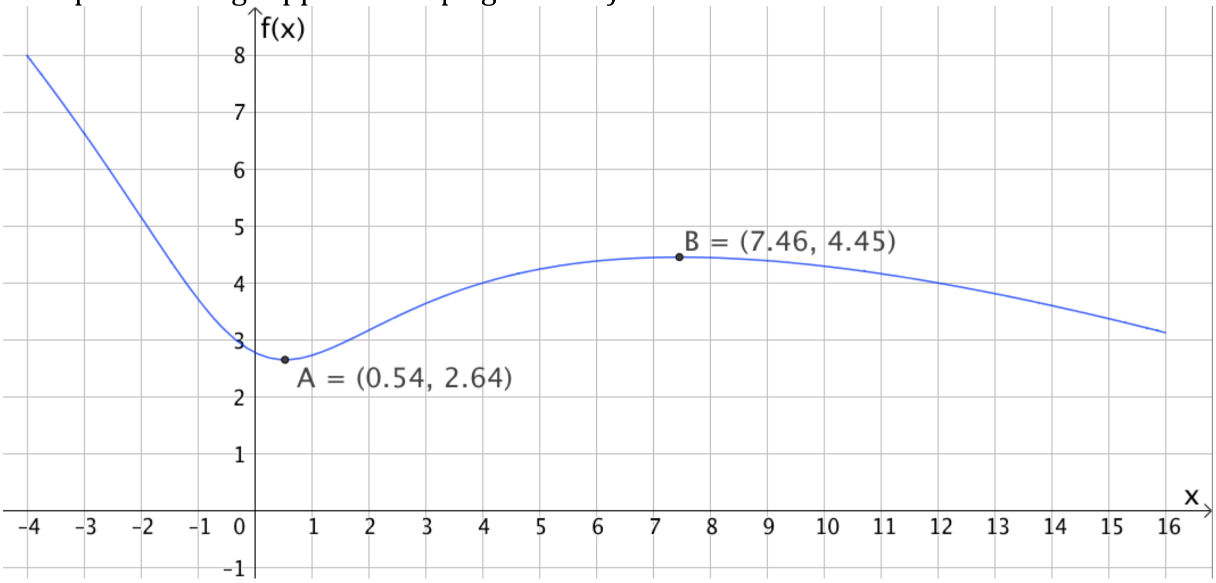
<u>Hjørnet *F* har koordinater (13,-2)</u>

Oppgave 3

a)



b) Bruker kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og finner bunnpunktet *A* og toppunktet *B* på grafen til *f*.



<u>Grafen til *f* har bunnpunkt (0,54, 2,64) og toppunkt (7,46, 4,45)</u>

c)

CAS

1 g(x):=2*log(x^2+k)-x/2

$\rightarrow \ \mathbf{g(x) := 2 \ln\left(x^2 + k\right) - \frac{1}{2} x}$

2 g'(1)=0

Løs: $\{\mathbf{k = 7}\}$

g har et ekstremalpunkt i $x = 1$ når $\underline{\underline{k = 7}}$

d)

CAS

1 g(x):=2*log(x^2+k)-x/2

$\rightarrow \ \mathbf{g(x) := 2 \ln\left(x^2 + k\right) - \frac{1}{2} x}$

2 g'(x)=0

Løs: $\left\{\mathbf{x = -\sqrt{-k + 16} + 4, x = \sqrt{-k + 16} + 4}\right\}$

Grafen til g har

- ett ekstremalpunkt når $-k+16=0$
- to ekstremalpunkt når $-k+16>0$
- Ingen ekstremalpunkter når $-k+16<0$

Da har grafen til g ett ekstremalpunkt når $k=16$, to ekstremalpunkter når $0<k<16$ og ingen ekstremalpunkter når $k>16$

Oppgave 4

a)

CAS

1. OP:=Vektor(80+4t,16+3t)
   $\rightarrow \; OP := \begin{pmatrix} 80+4t \\ 16+3t \end{pmatrix}$
2. r(t):=OP
   $\rightarrow \; r(t) := \begin{pmatrix} 4t+80 \\ 3t+16 \end{pmatrix}$
3. v(t):=r'(t)
   $\rightarrow \; v(t) := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. abs(v)
   $\rightarrow \; 5$

Skipet driver med fartsvektor $\vec{v}=[4,3]$ og banefarten er 5 nm/h (altså 5 knop)

b)

CAS

1. OP:=Vektor(80+4t,16+3t)
   $\rightarrow \; OP := \begin{pmatrix} 80+4t \\ 16+3t \end{pmatrix}$
2. r(t):=OP
   $\rightarrow \; r(t) := \begin{pmatrix} 4t+80 \\ 3t+16 \end{pmatrix}$
3. abs(r(4))
   $\rightarrow \; 100$

Skipet *Euler* er altså 100 nautiske mil fra O om 4 timer, så <u>redningsbåten må holde en fart på 25 nm/h (altså 25 knop).</u>

c) Uansett hvilken retning redningsbåten fra Q kjører, vil den etter t timer være $35t$ nautiske mil fra utgangspunktet. Dens posisjon vi da ligge på sirkelperiferien til en sirkel med sentrum i (-10,50) og radius $35t$.

Likningen for denne sirkelen er $(x+10)^2+(y-50)^2=(35t)^2$

Vi setter nå inn koordinatene til $\overrightarrow{OP}$ og løser likningen med hensyn på *t*.

CAS	
1	Løs((80+4t+10)²+(16+3t−50)²=(35t)², t) $\rightarrow \left\{ \mathbf{t} = \frac{-7\sqrt{57009}+129}{600}, \mathbf{t} = \frac{7\sqrt{57009}+129}{600} \right\}$
2	t>0, så
3	t = HøyreSide($1,2) $\approx$ **t = 3.001**

<u>Redningsbåten som kjører fra *Q* kan være fremme hos *Euler* i løpet av 3 timer</u>