Eksamen i S2 høsten 2018

Løst av Svein Arneson pensjonert lektor

Oppgave 1

a.

$$\underline{\underline{f'(x) = 2e^{2x}}}$$

b.

$$g'(x) = \frac{x^2 \cdot 4x^3 - 2x(x^4 - 1)}{x^4} = \frac{x(2x^4 + 2)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2x^4 + 2}{x^3}}}$$

c.

$$h'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{(3\ln x + 1) \cdot x^2}}$$

Oppgave 2

a.

Gitt rekka 54 + 18 + 6 + 2 + …… Denne er geometrisk fordi forholdet mellom et ledd og det foregående er konstant , $k = \frac{1}{3}$ som er et tall mellom – 1 og + 1 og da konvergerer rekka med

Sum $S = \frac{54}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{54 \cdot 3}{2} = 27 \cdot 3 = \underline{\underline{81}}$

b.

Her er rekka 4 – 8 + 16 – 32 + ……. Denne rekka er også geometrisk med kvotient k = -2 som er mindre enn -1, og da konvergerer ikke rekka.

Oppgave 3

Beløpene, 10, 15, 20, 25, …. Danner ei aritmetisk tallfølge med første ledd $a_1 = 10$ og differens d = 5

Det n-te leddet er $a_n = a_1 + (n – 1)$ d og summen av de n første leddene blir

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

a.

Runde nr. n gir en fortjeneste på 100 kroner og da bestemmer vi n ved ligningen

$$a_1 + (n-1) \cdot d = 100$$

$$10 + (n-1) \cdot 5 = 100 \mid \cdot \frac{1}{5}$$

$$n - 1 + 2 = 20$$

$$n = 19$$

<u>Hun må løpe 19 runder for at den sist skal gi henne kr 100</u>

b.

Løper hun 25 runder må bedriften ut med summen av alle de 25 beløpene, altså

$$S_{25} = \frac{2 \cdot 10 + (25-1) \cdot 5}{2} \cdot 25 = (10 + 12 \cdot 5) \cdot 25 = \underline{\underline{1750}}$$

Oppgave 4

Gitt f ved $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a.

Vi ser at $f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$ og da er x – 1 en faktor i f(x) og divisjonen med x – 1 går opp:

b.

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x-1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - x^2} \\ \quad -4x^2 + 8x \\ \quad \underline{-4x^2 + 4x} \\ \qquad\quad 4x - 4 \\ \qquad\quad \underline{4x - 4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Altså er $f(x) = \underline{\underline{(x-1)(x-2)^2}}$

b.

Brøken kan skrives

$\dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x + d}{x^2 - 4} = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x + d}{(x-2)(x+2)}$. Den kan forkortes når telleren = 0 for x = 2 eller x = -2

$$x = 2: \quad 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow 4 + d = 0 \Rightarrow d = -4$$

$$x = -2: \quad (-2)^3 - 5(-2)^2 + 8(-2) + d = 0 \Rightarrow -44 + d = 0 \Rightarrow d = 44$$

<u>Brøken kan forkortes når d = - 4 eller d = 44</u>

Oppgave 5

Prisen er p kroner per enhet og etterspørselen $q(p) = 500 \cdot e^{-0.04p}$

a.

Gitt inntektsfunksjonen

$$I(p) = p \cdot q(p) = 500 \cdot p \cdot e^{-0.04 \cdot p}$$

$I'(p) = 500(1 \cdot e^{-0.04p} + p \cdot (-0.04) \cdot e^{-0.04p}) = 500 \cdot e^{-0.04p}(1 - 0.04p)$ Altså blir

$I'(p) = 0$ når $1 - 0.04p = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{0.04} = 25$

Vi ser at I'(p) går over fra å være positiv til å bli negativ når prisen vokser og passerer 25.

<u>Altså er inntekten størst når p = 25 kroner</u>

b.

Av $q = 500 \cdot e^{-0.04p}$ får vi ved divisjon med 500 og ta ln på begge sider

$$\ln\left(\frac{q}{500}\right) = -0.04p$$

$$\frac{100}{-0.04 \cdot 100}\ln\left(\frac{q}{500}\right) = \frac{-0.04p}{-0.04}$$

$$\underline{\underline{p(q) = -25\ln\left(\frac{q}{500}\right) \text{ som vi skulle vise}}}$$

c.

$$p'(q) = -25 \cdot \frac{1}{\frac{q}{500}} \cdot \frac{1}{500} = -\frac{25}{q}$$

$$\underline{\underline{p'(25) = -1}}$$

<u>Dette betyr at prisen minker med 1 krone når etterspørselen øker med en enhet.</u>

Oppgave 6

Gitt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ som gir $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Opplysningene gir da

$$\begin{aligned}
&(1): f(1) = 0 \Rightarrow \quad a + b + c + d = 0 \\
&(2): f(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0 \\
&(3): f'(1) = 0 \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \\
&(4): f(0) = 2 \Rightarrow \qquad \underline{\underline{d = 2}} \quad \text{Vi setter dette inn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1): a + b + c = -2 \\
&(2): -8a + 4b - 2c = -2 \\
&(3): 3a + 2b + c = 0
\end{aligned}$$

$(2) + 2 \cdot (3)$ gir $\underline{-2a + 8b = -2}$ og $(3) - (1)$ gir $\underline{2a + b = 2}$

Disse to adderes og vi får $9b = 0$ altså $\underline{\underline{b = 0}}$

Innsetting i $2a + b = 2$ gir $\underline{\underline{a = 1}}$ Innsetting i (1) gir til slutt

$1 + 0 + c + 2 = 0$ altså $\underline{\underline{c = -3}}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x + 2}}$$

Oppgave 7

a.

Vi lager skjema og får sannsynlighetsfordelingen i linje 3:

Ant. øyne	1	2	3	4	5	6
Gevinst, x	0	0	20	20	60	200
P(X=x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x \cdot p(X=x)$	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	10	$\frac{100}{3}$
$(x_i - E(X))^2 \cdot p(X=x)$	$\frac{(-50)^2}{6}$	$\frac{(-50)^2}{6}$	$\frac{(-30)^2}{6}$	$\frac{(-30)^2}{6}$	$\frac{10^2}{6}$	$\frac{(200-50)^2}{6}$

b.

I linje 4 får vi summen $\sum_1^6 x \cdot p(X=x) = \frac{10}{3} \cdot 2 + 10 + \frac{100}{3} = 50$

E(X) = 50

I linje 5 får vi summen Var(X) = $\frac{2500}{6} \cdot 2 + \frac{900}{6} \cdot 2 + \frac{100}{6} + \frac{22500}{6} = \frac{29400}{6} = 4900$

Men da er standardavviket SD(X) = $\sqrt{4900} = 70$ qed.

c.

Når forventningsverdien for å få gevinst er kr 50 må innsatsen til spilleren være kr 60 for at arrangøren skal tjene kr 10 per spill.

d.

Y-ene er stokastisk variable med en forventningsverdi og et standardavvik og da er etter sentralgrensesetningen summen av Y-en, altså S tilnærmet normalfordelt.

d.

Når arrangøren skal tjene kr 10, må spilleren tape kr 10. På 100 spill blir dette et forventet tap på $-10 \cdot 100 = -1000$. Mao. er E(s) = -1000 og vi får SD(S) = $70 \cdot \sqrt{100} = 700$ som skulle vises.

e.

Sannsynligheten for å gå med overskudd på de 100 spillene blir da

$$P(S \geq 0) = 1 - P(S < 0) = 1 - \Phi(\frac{0-(-1000)}{700}) = 1 - \Phi(1.43)$$
$$= 1 - 0.9236 = 0.0764$$

Sannsynligheten for overskudd er altså 7.6 %

Del 2 med hjelpemiddler

GeoGebra forkortes med GG

Oppgave 1

Vi har gitt

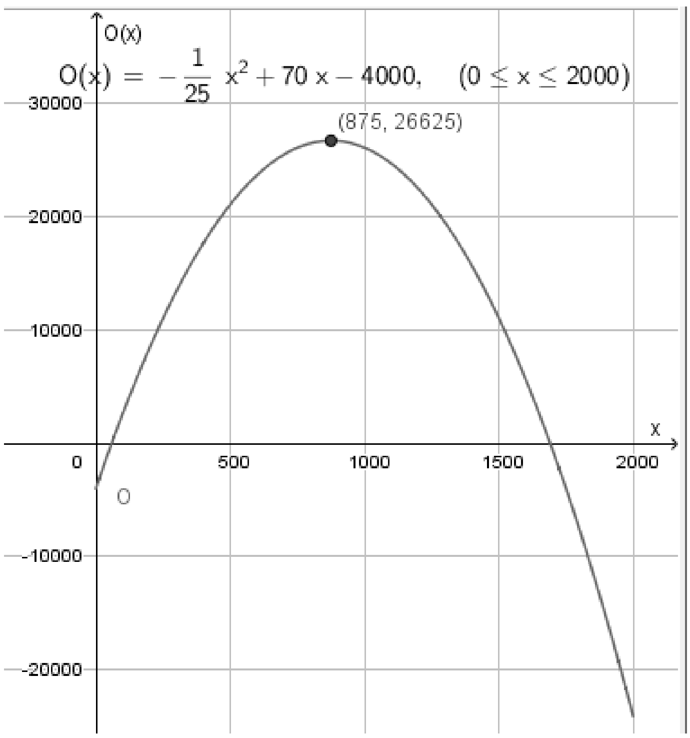
a.

$K(x) = 0.025x^2 + 80x + 4000, \quad 0 < x < 2000$ og

$I(x) = -0.015x^2 + 150x, \quad$ 0<x<2000 Da blir

$\underline{\underline{O(x) = I(x) - K(x) = -0.04x^2 + 70x - 4000, \quad 0 < x < 2000}}$

Overskuddet er tegnet slik:



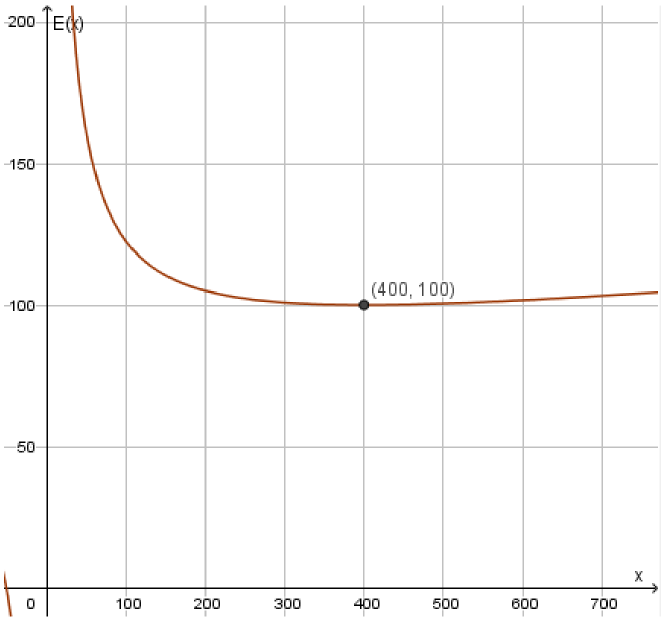
b.

Fra grafen ser vi at <u>det største overskuddet er 26 625 kr når det produseres og selges 875 enheter</u>.

Vi har brukt kommandoen « Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)»

c.

Vi har definert enhetskostnadsfunksjonen $E(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, tegnet denne og funnet den produksjons-mengden som gir minst enhetskostnad. At løsningen av E'(x) = 0 virkelig gir en minsteverdi har vi vist ved å regne ut E''(400)=0.0001>0



E(x) = $\dfrac{K(x)}{x} = 0.025x + 80 + \dfrac{4000}{x}, \quad 0 < x < 2000$

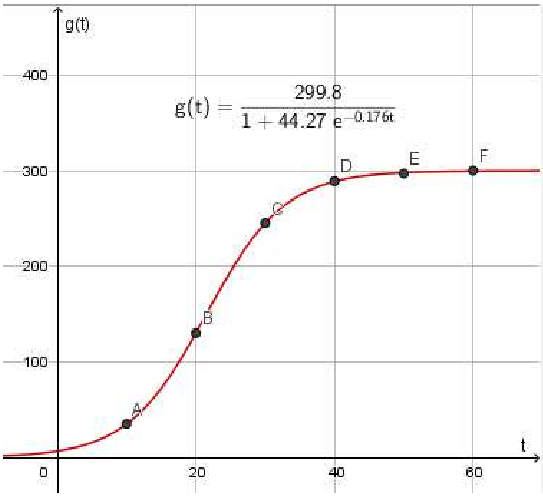
4	E'(x)=0,x=1
	NLøs: $\{x = 400\}$
5	E''(400)
	$\approx$ **0.0001**

<ins>En produksjon og salg av 400 enheter gir minste enhetskostnader</ins>. De minste enhetskostnadene er kr 100

Oppgave 2

Vi har kopiert tabellen og lagd punkter og tilpasset ved regresjon en logistisk funksjon

1	t, dager	Antall dyr
2	10	35
3	20	130
4	30	245
5	40	289
6	50	297
7	60	300



Vi ser at funksjonen vi fant var:

$$\mathbf{g(t)} = \frac{\mathbf{299.8}}{\mathbf{1 + 44.27\, e^{-0.176t}}}$$

b.

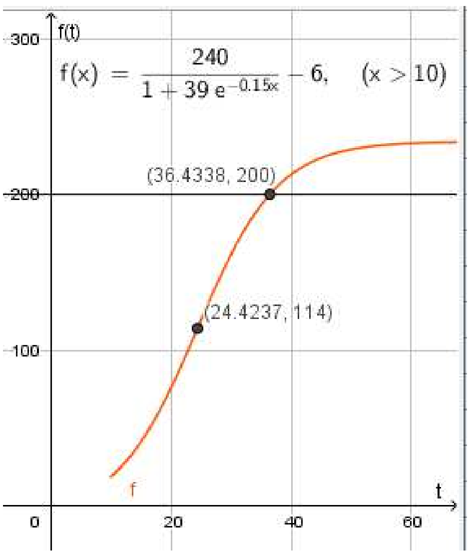
I CAS nedenfor har vi derivert f(t) i linje 1. Vi bruker x istedenfor t når vi regner her.

I linje 2 har vi løst ligningen f’’(x) = 0 og finner da det tidspunktet der f vokser raskest, vi får

$\underline{\underline{t = \frac{20}{3}\ln(39) \approx 24.40}}$ Punktet på grafen der antallet vokser raskest er markert nedenfor, og vi ser at veksten her <u>er f’(24.42) = 9. Antall skadedyr vokser med 9 dyr per døgn</u>.

1	f'(x):=Derivert(240/(1+39* ℯ ^(-0.15*x))) $\rightarrow \; f'(x) := 1404 \cdot \frac{e^{-\frac{3}{20}x}}{\left(39\, e^{-\frac{3}{20}x} + 1\right)^2}$
2	Derivert(1404ℯ^((-3) / 20 x) / (39ℯ^((-3) / 20 x) + 1)²)=0 Løs: $\left\{x = \frac{20}{3} \ln(39)\right\}$
3	$2 $\approx \; \{x = 24.4237\}$
4	f'(20 / 3 ln(39)) $\rightarrow \; 9$
5	f(x)=200 NLøs: $\{x = 36.4338\}$

c.



På grafen ovenfor ser vi at det er 200 skadedyr 36.4 dager etter invasjonen. Vi har tegnet inn y = 200 og funnet skjæring med grafen i tillegg til løsningen i linje 5 ovenfor.

Oppgave 3

Ved en stor vgs. blir 100 tilfeldige elever plukket ut til en mattetest. Fra tidligere år har skolen erfaring med at skåren på testen, X er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 50$ og standardavvik $\sigma = 8$ poeng.

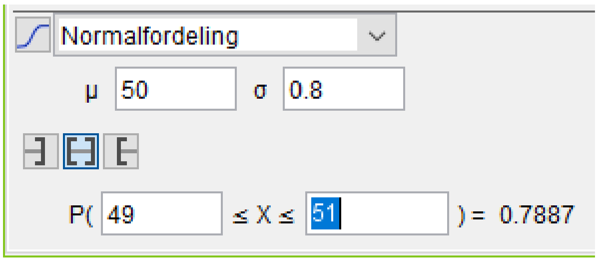
a.

Vi vet at gjennomsnittsskåren $\overline{X}$ er normalfordelt med forventningsverdi $E(\overline{X}) = \mu = 50$ og standardavviket $SD(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$, som vi skulle vise.

b.

Sannsynligheten <u>$P(49 \le \overline{X} \le 51) = 0.7887 = 78.9\ \%$</u>

Sannsynlighetskalkulatoren i GG viser regningen.

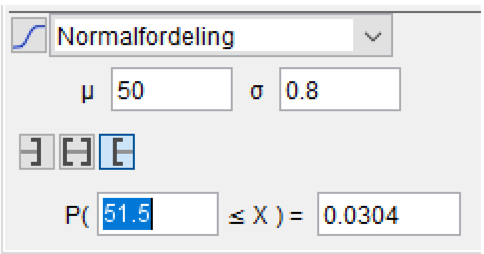


c.

Vi velger nå som vår nullhypotese H_0 : $E(\overline{X}) = 50$. Den alternative hypotesen blir da H : $E(\overline{X}) > 50$

Antar vi at H_0 er sann kan vi ved hjelp av sannsynlighetskalkulatoren i GG regne ut

$P(\overline{X} > 51.5) = 0.0304$. Vi fikk:



Siden signifikansnivået er 0.05 ser vi at vår sannsynlighet er mindre. Det er altså ganske liten sannsynlighet å få et gjennomsnitt på hele 51.5 når forventningsverdien er 50 poeng. <u>Det er grunnlag for skolens mistanke</u> med bakgrunn i disse målingene.

Oppgave 4.

a.

Vi setter opp hvor mye virkestoff det er igjen av de 7 tablettene han har tatt akkurat idet han tar den 7.

Den 7. tabletten har igjen 2.4 (vi skriver ikke enheten hver gang, men regner med mg.), den 6. har igjen $2.4 \cdot 0.75^1$, den 5. har igjen $2.4 \cdot 0.75^2$ ………den 1. har igjen $2.4 \cdot 0.75^6$. Disse tallene danner ei geometrisk rekke med 7 ledd og kan summeres med «sumformelen», men i GG kan vi bruke kommandoen «Sum» og får da

CAS

1	Sum(2.4*0.75^n, n, 0, 6)
	≈ **8.3186**

Han har altså <u>8.32 mg</u> av virkestoffet i kroppen.

b.

I det lange løp kan vi la summen gå til ∞ og da blir summen

1	Sum(2.4*0.75^n, n, 0, ∞)
	≈ **9.6**

Han akkumulerer <u>9.6 mg</u> etter lang tid.

c.

Vi finner vekstfaktoren for en akkumulert mengde på 5.5 mg

4	2.4/(1-k)=5.5,k=1
	NLøs: $\{k = 0.5636\}$

En periode med lengde x når vi har en vekstfaktor på 0.5636, når nedbrytingen er på 25 % per dag vil være gitt ved

$$0.75^x = 0.5636$$

Dette løser vi i GG og får:

5	0.75^x=0.5636,x=1
	NLøs: $\{x = 1.9932\}$

<u>Han kan altså ta en tablett annen hver dag da svaret rundes av til 2.0</u>