Eksamen Matematikk S2 23.11.2018 – løsningsforslag

Del 1 – uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere funksjonen

$f(x) = e^{2x}$

Vi må bruke kjerneregelen: $f(x) = g\big(u(x)\big) \Rightarrow f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

La $g(u) = e^u \Rightarrow g'(u) = e^u$

La $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$

$f'(x) = e^u \cdot u'(x)$

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

$f'(x) = 2e^{2x}$

b) Vi skal derivere funksjonen

$g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

Vi kan bruke brøkregelen for derivasjon

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$g'(x) = \dfrac{(x^4 - 1)' \cdot x^2 - (x^4 - 1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$

$g'(x) = \dfrac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4 - 1) \cdot 2x}{x^4}$

$g'(x) = \dfrac{4x^5 - 2x^5 + 2x}{x^4}$

$g'(x) = \dfrac{2x^5 + 2x}{x^4}$

$g'(x) = \dfrac{2(x^4 + 1)}{x^3}$

c) Vi skal derivere funksjonen

$h(x) = x^3 \cdot \ln x$

Her må vi bruke produktregelen for derivasjon

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$h'(x) = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)'$

$h'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$

$h'(x) = x^2(3 \ln x + 1)$

Oppgave 2

En uendelig geometrisk rekke er konvergent dersom $-1 < k < 1$.

a) $54 + 18 + 6 + 2 + \cdots$

$$k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Siden $-1 < k < 1$ er rekken konvergent.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{54}{1-\frac{1}{3}} = \frac{54}{\frac{2}{3}} = 54 \cdot \frac{3}{2} = 27 \cdot 3 = 81$$

Rekken er konvergent, og summen er 81.

b) $4 - 8 + 16 - 32 + \cdots$

$$k = \frac{-8}{4} = -2$$

$k < -1$ og rekken er dermed ikke konvergent.

Oppgave 3

a) La a_n være beløpet Lise tjener på å løpe runde nr. n. Da vil a_n være en aritmetisk rekke der

$$a_1 = 10 \wedge d = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot 5$$

$$a_n = 10 + 5n - 5$$

$$a_n = 5n + 5$$

Nå må vi løse likningen $a_n = 100$

$$5n + 5 = 100$$

$$5n = 95$$

$$n = \frac{95}{5}$$

$$n = 19$$

Lise må løpe 19 runder dersom hun skal tjene kr 100 på den siste runden.

b) Vi må beregne s_{25}

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$s_{25} = 25 \cdot \frac{10 + (5 \cdot 25 + 5)}{2}$$

$$s_{25} = 25 \cdot \frac{140}{2}$$

$$s_{25} = 25 \cdot 70$$

$$s_{25} = 1750$$

Dersom Lise løper 25 runder, må bedriften gi totalt kr 1 750.

Oppgave 4

a) Dersom $(x-1)$ er en faktor i $f(x)$, må $f(1)=0$.

$f(1)=1^3-5\cdot 1^2+8\cdot 1-4=1-5+8-4=0$

Vi har vist at $(x-1)$ er en faktor i $f(x)$.

b) Vi må utføre divisjonen $f(x):(x-1)$

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3-5x^2+8x-4):(x-1)=x^2-4x+4 \\
-(x^3-x^2) \\
\qquad\quad -4x^2+8x \\
\qquad -(-4x^2+4x) \\
\qquad\qquad\qquad 4x-4 \\
\qquad\qquad\quad -(4x-4) \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+4)$

Videre kan vi faktorisere x^2-4x+4 ved å bruke 1. kvadratsetning.

$f(x)=(x-1)(x-2)^2$

c) Vi begynner med å faktorisere nevneren i brøken ved å bruke konjugatsetningen.

$$\frac{x^3-5x^2+8x+d}{x^2-4}=\frac{x^3-5x^2+8x+d}{(x+2)(x-2)}$$

Brøken kan forkortes dersom $(x+2)\vee(x-2)$ er faktorer i (x^3-5x^2+8x+d).

Fra oppgave b) vet vi at $(x-2)$ er en faktor i telleren dersom $d=-4$.

Vi må undersøke hva d må være for at telleren skal bli lik 0 når $x=-2$.

$(-2)^3-5\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)+d=0$

$-8-20-16+d=0$

$-44+d=0$

$d=44$

Dersom brøken skal kunne forkortes, må $d=-4\vee d=44$.

Oppgave 5

a) $q(p) = 500e^{-0.04p}$

$I(p) = p \cdot q(p)$

$I(p) = 500 \cdot p \cdot e^{-0.04p}$

Vi må bestemme $I'(p)$ og deretter løse $I'(p) = 0$ for å finne eventuelle stasjonære punkter på grafen til I.

$I'(p) = (500p)' \cdot e^{-0.04p} + 500p \cdot (e^{-0.04p})'$

$I'(p) = 500e^{-0.04p} + 500p(-0.04e^{-0.04p})$

$I'(p) = 500e^{-0.04p} - 20pe^{-0.04p}$

$I'(p) = 20e^{-0.04p}(25 - p)$

$I'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 25$

Av uttrykket til $I'(p)$ ser vi at $I'(p) > 0$ når $p < 25$ og at $I'(p) < 0$ når $p > 25$. Dermed har grafen til I et toppunkt når $p = 25$.

Inntekten er størst når prisen er kr 25.

b) $q = 500e^{-0.04p}$

$\ln q = \ln(500e^{-0.04p})$

$\ln q = \ln 500 + \ln(e^{-0.04p})$

$\ln q = \ln 500 - 0.04p$

$0.04p = \ln 500 - \ln q$

$0.04p = -(-\ln 500 + \ln q)$

$0.04p = -\ln\left(\frac{q}{500}\right) \,|\cdot 25$

$p = -25\ln\left(\frac{q}{500}\right)$

$p(q) = -25\ln\left(\frac{q}{500}\right)$

c) Bestemmer først $p'(q)$

$p'(q) = -25 \cdot \left(\ln\left(\frac{q}{500}\right)\right)'$

$p'(q) = -25 \cdot (\ln u)' \cdot u'(q)$

$p'(q) = -25 \cdot \frac{1}{\frac{q}{500}} \cdot \frac{1}{500}$

$p'(q) = -\frac{25}{q}$

$p'(25) = -\frac{25}{25} = -1$

Dette forteller oss at dersom etterspørselen øker fra 25 til 26 enheter, vil prisen synke med *omtrent* 1 kr per enhet.

Oppgave 6

a) Siden $x = 1$ er et nullpunkt til f, må $f(1) = 0$. Det gir oss likningen

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$

Siden $x = -2$ er et nullpunkt til f, må $f(-2) = 0$. Det gir oss likningen

$a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 0 \Leftrightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$

Siden $x = 1$ gir et ekstremalpunkt, må $f'(1) = 0$. Bestemmer først $f'(x)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Det gir oss likningen

$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$

Siden grafen til f skjærer y-aksen i $y = 2$, må $f(0) = 2$. Det gir oss likningen

$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \Leftrightarrow d = 2$

Vi har nå vist at opplysningene gir likningssystemet som er gitt i oppgaven.

b) Vi skal løse likningssystemet. Vi begynner med å sette $d = 2$ inn i de øvrige likningene.

A $\quad a + b + c + 2 = 0$

B $\quad -8a + 4b - 2c + 2 = 0$

C $\quad 3a + 2b + c = 0$

Bruker A til å finne c uttrykt ved a og b

A $\quad c = -a - b - 2$

Setter A inn i B og C

B $\quad -8a + 4b - 2(-a - b - 2) + 2 = 0$

B $\quad -8a + 4b + 4a + 2b + 2 + 2 = 0$

B $\quad -4a + 6b + 4 = 0$

C $\quad 3a + 2b + (-a - b - 2) = 0$

C $\quad 2a + b - 2 = 0$

C $\quad b = 2 - 2a$

Setter C inn i B

B $\quad -4a + 6(2 - 2a) + 4 = 0$

B $\quad -4a + 12 - 12a + 4 = 0$

B $\quad -16a = -16$

B $\quad a = 1$

Setter B inn i C

C $\quad b = 2 - 2 \cdot 1$

C $\quad b = 0$

Oppgave 6 fortsatt

b) Setter B og C inn i A

A $\quad c = -1 - 0 - 2$

A $\quad c = -3$

$a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -3 \wedge d = 2$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Oppgave 7

a)

k	0	20	60	200
$P(X = k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Bestemmer først forventningsverdien til X

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 20 \cdot \frac{2}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} + 200 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{40}{6} + \frac{60}{6} + \frac{200}{6}$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{300}{6}$$

$$\mathrm{E}(X) = 50$$

Bestemmer så variansen til X.

$$\mathrm{Var}(X) = (0 - 50)^2 \cdot \frac{2}{6} + (20 - 50)^2 \cdot \frac{2}{6} + (60 - 50)^2 \cdot \frac{1}{6} + (200 - 50)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = 2500 \cdot \frac{2}{6} + 900 \cdot \frac{2}{6} + 100 \cdot \frac{1}{6} + 22500 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{5000 + 1800 + 100 + 22500}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{29400}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = 4900$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{4900}$$

$$\mathrm{SD}(X) = 70$$

c) La p være prisen for å delta i ett spill.

$E(X) - p = -10$

$50 - p = -10$

$p = 60$

Dersom man som arrangør skal i det lange løp få et gjennomsnittlig overskudd per spill på kr 10, må prisen for å delta i ett spill være kr 60.

Oppgave 7 fortsatt

d) Sentralgrenseteoremet sier at summen av n uavhengige stokastiske variabler med lik sannsynlighetsfordeling, er tilnærmet normalfordelt dersom n er tilstrekkelig stor ($n \geq 30$).

La $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$, da er $\mathrm{E}(S) = n \cdot \mathrm{E}(Y) \wedge \mathrm{SD}(S) = \sqrt{n} \cdot \mathrm{SD}(Y)$.

e) La $Y = X - p$, der $p = 60$

Da er $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) - p = 50 - 60 = -10$ og $\mathrm{SD}(Y) = \mathrm{SD}(X) = 70$

$\mathrm{E}(S) = 100 \cdot (-10) = -1000$

$\mathrm{SD}(S) = \sqrt{100} \cdot 70 = 700$

f) Vi skal bestemme $P(S > 0)$

Bestemmer Z

$$Z = \frac{S - \mu}{\sigma} = \frac{0 - (-1000)}{700} = \frac{1000}{700} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

$P(S > 0) = P(Z > 1.43) = 1 - P(Z \leq 1.43) = 1 - 0.9236 = 0.0764$

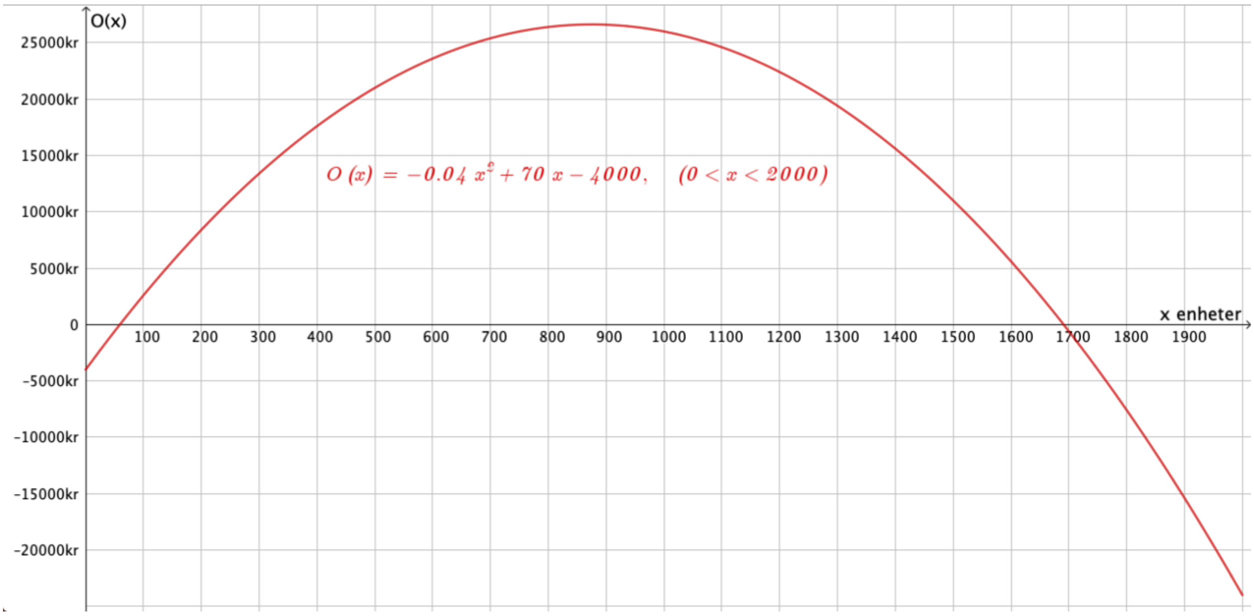
Sannsynligheten for å gå med overskudd på de 100 spillene er ca. 7.64%

Del 2 – med hjelpemidler

Oppgave 1

a) $O(x) = I(x) - K(x)$

1	K(x):=0.025x^2+80x+4000 ≈ $K(x) := 0.025\,x^2 + 80\,x + 4000$
2	I(x):=-0.015x^2+150x ≈ $I(x) := -0.015\,x^2 + 150\,x$
3	O(x):=I-K ≈ $O(x) := -0.04\,x^2 + 70\,x - 4000$



$O(x) = -0.04x^2 + 70x - 4000 \quad , \quad 0 < x < 2000$

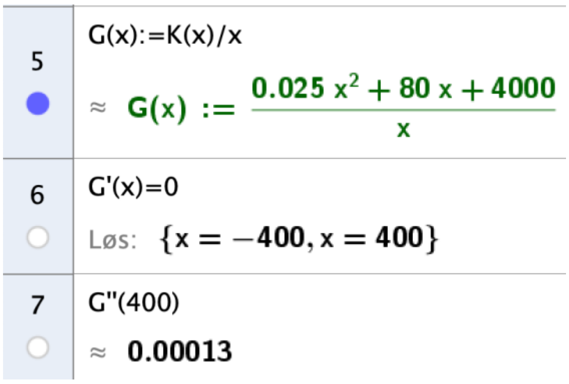
b) Siden O er en annengradsfunksjon der annengradsleddet er negativt, har O et toppunkt når $O'(x) = 0$.

1	K(x):=0.025x^2+80x+4000 √ $K(x) := 0.025\,x^2 + 80\,x + 4000$
2	I(x):=-0.015x^2+150x √ $I(x) := -0.015\,x^2 + 150\,x$
3	O(x):=I-K ≈ $O(x) := -0.04\,x^2 + 70\,x - 4000$
4	O'(x)=0 Løs: $\{x = 875\}$

Overskuddet er størst når produksjonsmengden er på 875 enheter per uke.

Oppgave 1 fortsatt

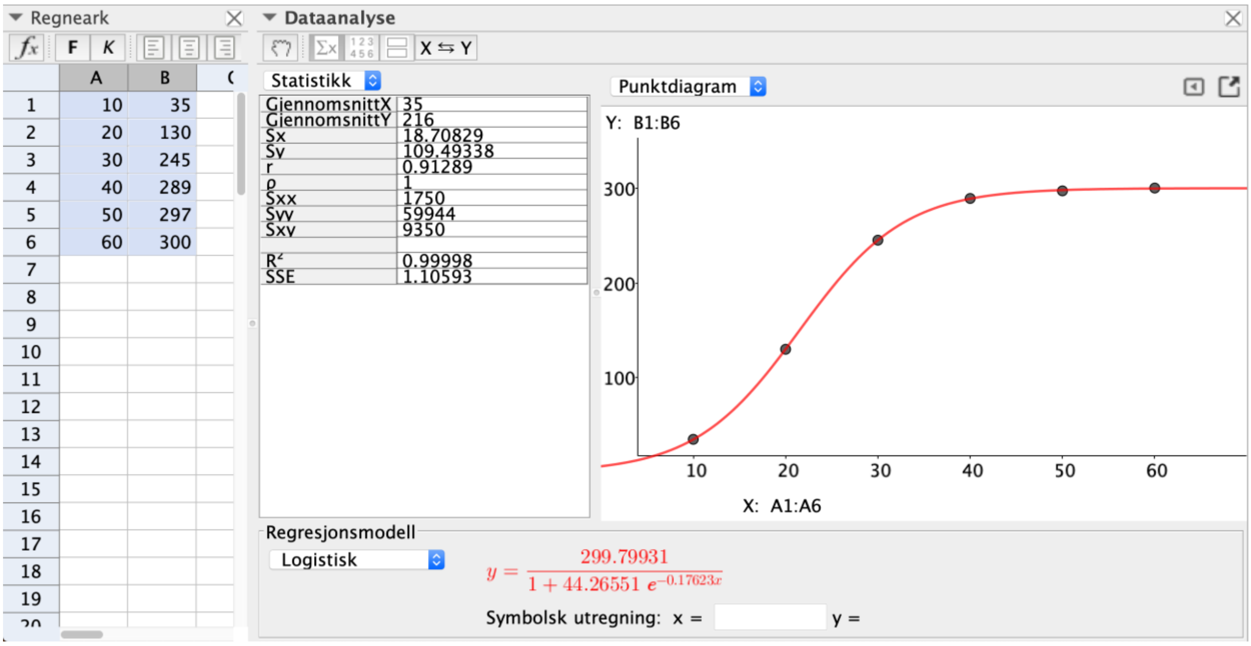
c) Vi skal bestemme den laveste enhetskostnaden (kostnaden per enhet).



Produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet er 400 enheter per uke.

Oppgave 2

a) Jeg plotter punktene fra tabellen inn i GeoGebras regneark og utfører en regresjonsanalyse. Jeg prøver meg frem med ulike modeller, og finner at en logistisk modell passer best med punktene fra tabellen.



Vi ser at R^2 er nærme 1, og dermed er dette en god modell for antall skadedyr etter t dager.

$$g(t) = \frac{299.79931}{1 + 44.26551e^{-0.17623t}}$$

Oppgave 2 fortsatt

b) Vi skal bestemme toppunktet på grafen til $f'(t)$. Vi vet at når f' har et stasjonært punkt, har f et vendepunkt.

1	f(t):=240/(1+39 e ^(−0.15t))−6 ✓ $f(t) := \dfrac{240}{1+39\,e^{-0.15t}} - 6$
2	Vendepunkt(f) ≈ $\{(24.42374, 114)\}$
3	f'(24.42374) ≈ 9
4	0.42374*24 ≈ 10.16976

Antall skadedyr øker raskest ca. 24 dager og 10 timer etter invasjonen. Da øker antall skadedyr med 9 skadedyr per dag.

c) Vi må bestemme t slik at $f(t) = 200$.

5	Løs(f(t)=200) ≈ $\{t = 36.43385\}$
6	0.43385*24 ≈ 10.4124

Det hadde vært skadedyr i huset i ca. 36 dager og 10 timer da huset ble kontrollert.

Oppgave 3

a) La $S = X_1 + X_2 + \cdots X_{100}$

Siden vi antar at ferdighetene til ulike elever er uavhengige av hverandre, og alle X_i-ene har samme sannsynlighetsfordeling, og $n = 100$, er kravene i sentralgrenseteoremet oppfylt.

Da er S tilnærmet normalfordelt med $\mathrm{E}(S) = 100 \cdot 50 = 5000$ og $\mathrm{SD}(S) = \sqrt{100} \cdot 8$

La $\bar{X} = \frac{1}{100} \cdot S$

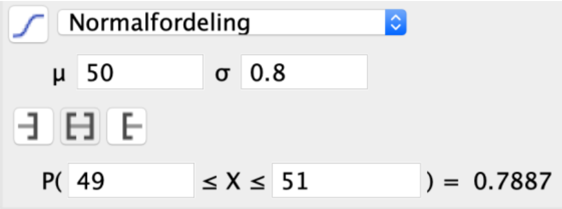
Da er $\bar{X}$ tilnærmet normalfordelt med

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \frac{1}{100} \cdot \mathrm{E}(S) = \frac{1}{100} \cdot 5000 = 50$$

$$\mathrm{SD}(\bar{X}) = \frac{1}{100} \cdot \mathrm{SD}(S) = \frac{1}{100} \cdot \sqrt{100} \cdot 8 = 0.8$$

Oppgave 3 fortsatt

b) Antagelsene i a) gjelder fortsatt. Bruker GeoGebras sannsynlighetskalkulator:



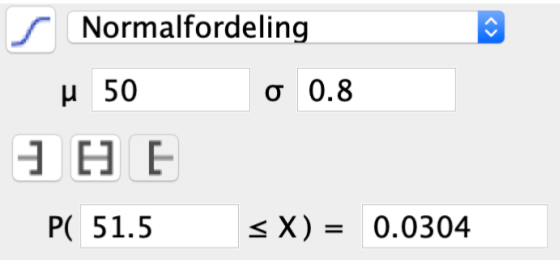
Sannsynligheten for at gjennomsnittskarakteren til de 100 elevene blir mellom 49 og 51 poeng er ca. 78.87%.

c) Antagelsene i a) gjelder fortsatt.

$H_0: \mu_{\bar{X}} = 50$

$H_1: \mu_{\bar{X}} > 50$

Vi setter signifikansnivået til 5%. Vi antar at nullhypotesen stemmer. Vi skal bestemme sannsynligheten for å observere noe minst så ekstremt som at gjennomsnittsskåren til 100 tilfeldig valgte elever som tok testen, blir 51.5. Altså $P(\bar{X} \geq 51.5)$. Dersom sannsynligheten er lavere enn 5%, kan vi forkaste H_0 og hevde H_1.



Testens p-verdi ble på 0.0304 og dermed lavere enn signifikansnivået.

Ja, skolens mistanke er berettiget.

Oppgave 4

a) Lager en oversikt over hvor mye medisin Mads har i kroppen:

Rett etter 1. tablett:

2.4

Rett etter 2. tablett:

$2.4 + 2.4 \cdot 0.75$

Rett etter 3. tablett:

$2.4 + 2.4 \cdot 0.75 + 2.4 \cdot 0.75^2$

Rett etter n-te tablett:

$2.4(1 + 0.75 + 0.75^2 + 0.75^3 + \cdots + 0.75^{n-1})$

Vi ser at leddene danner den geometriske rekken

$a_n = 2.4 \cdot 0.75^{n-1}$

For å finne ut hvor mye at det virksomme stoffet Mads har i kroppen like etter at han har tatt den syvende tabletten, kan vi beregne s_7:

1	a(n):=2.4*0.75^(n−1) ✓ $a(n) := 2.4 \cdot 0.75^{n-1}$
2	Sum(a, n, 1, 7) $\approx$ 8.31855

Like etter den syvende tabletten er inntatt, vil Mads ha 8.31855 mg av det virksomme stoffet i kroppen.

b) Siden $-1 < k < 1$ er rekken konvergent og vi kan bestemme s:

3	Sum(a, n, 1,∞) $\approx$ 9.6

I det lange løp vil Mads ha 9.6 mg virkestoff i kroppen.

Oppgave 4 fortsatt

c) La x være antall reduksjonsperioder (24 timer). Vi setter opp en ny rekke a_n

$a_n = 2.4 \cdot (0.75^x)^{n-1}$

Vi må bestemme x slik at $s = 5.5$

1	a(n):=2.4*((0.75^x))^(n−1) ✓ $a(n) := 2.4\ (0.75^x)^{n-1}$
2	Sum(a, n, 1, ∞)=5.5 NLøs: $\{x = 1.99298\}$

Vi ser at $x \approx 2$. Det må altså gå ca. 48 timer mellom hver gang Mads tar medisinen for at det ikke skal samles mer enn 5.5 mg av det virksomme stoffet i kroppen over tid.