Løsningsforslag – Eksamen R2, høsten 2018

Laget av Markus Sist oppdatert: 25. november 2018 Antall sider: 7

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 6\cos(2x-1)$, og bruker kjerneregelen for å få

$$f'(x) = 6(-\sin(2x-1)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2x-1] = \underline{\underline{-12\sin(2x-1)}}.$$

b) Vi bruker at $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ og får

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^2(x) + \sin^2(x)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1] = \underline{\underline{0}}.$$

Oppgave 2

a) Dette integralet er rett frem, vi får

$$\int \left(2x^2 - 3x\right)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C}}.$$

b) Her bruker vi substitusjon med $u = x^2 + 2$. Da har vi at $\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$ og vi får

$$\int 4x\cos(x^2+2)\,\mathrm{d}x = 2\int \cos(u) = 2\sin(u) + C = \underline{\underline{2\sin(x^2+2) + C}}.$$

c) Vi observerer at $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ og bruker delbrøksoppspalting.

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C = \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) For at rekka skal konvergere må $|e^{-x}| < 1$. Siden $e^x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, holder det med å sjekke når $e^{-x} < 1 \iff e^x > 1 \iff x > 0$. Rekka konvergerer altså når $\underline{\underline{x > 0}}$.

b) Vi ønsker å løse $S(x) = 3$, der funksjonen $S(x)$ er summen av rekka. Siden $S(x)$ er en geometrisk rekke er den for alle $x > 0$ slik at

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Vi setter nå dette lik 3 så får vi likningen

$$2e^x = 3 \iff x = \underline{\underline{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}.$$

Oppgave 4

a) Tegningen er ikke vist.

b) Vi skal finne skjæringspunktene til $\sin(x)$ og $\cos(x)$, altså løse

$$\sin(x) - \cos(x) = 0 \iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1 = 0,$$

når $\cos(x) \neq 0$. Dette forenkles igjen til $\tan(x) = 1$, som skjer når $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Så skjæringspunktene er

$$\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ og } \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}.$$

c) Vi finner arealet ved å løse følgende integral.

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x))\ \mathrm{d}x = -\cos(x) - \sin(x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

Oppgave 5

a) Vi observerer at amplituden er 1.2 og at perioden er 8 sekunder. Jeg tolker likevektslinja til å være 0 utifra oppgavebeskrivelsen. Siden $f(t)$ er på sitt høyeste når $t = 0$, kan vi konkludere med at den er faseforskjøvet med $\frac{\pi}{2}$. Konklusjonen er

$$\underline{\underline{f(t) = 1.2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2}\right)}}.$$

b) Her skal vi løse

$$f(t) = 0.6 \iff \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Dette er ekvivalent med å løse

$$\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \text{og} \qquad \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

der $n \in \mathbb{Z}$ og $t \in [0, 10]$. Dette er igjen ekvivalent med å løse

$$t = -\frac{4}{3} + 8n \qquad \text{og} \qquad t = \frac{4}{3} + 8n.$$

Herifra ser vi at løsningene på det ønskede intervallet er $t \in \{\frac{4}{3}, \frac{20}{3}, \frac{28}{3}\}$. Så bøyen er (strikt) 0.6 m over likevektslinja på intervallene $\underline{\underline{\left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ og } \left(\frac{20}{3}, \frac{28}{3}\right)}}$.

Oppgave 6

a) Observer at tangenten i $(1, -1)$ peker nedover, så alternativ 1 ($y' = x + y$) kan ikke være rett, fordi da hadde $y' = 1 - 1 = 0$ i $(1, -1)$, altså skulle tangenten vært flat.

Hvis alternativ 2 hadde vært korrekt skulle tangenten gått mot å stige mer og mer når y nærmet seg 0 og x er liten (og positiv i dette eksempelet), for når $y' = x/y$, og $y \to 0$, vokser helt klart y'. Men her går y' mot å være mer og mer "flat".

Eneste gjenstående alternativ er alternativ 3, så $\underline{\underline{y' = x \cdot y \text{ må være korrekt}}}$.

b) Vi ser at $y' = x \cdot y \iff \frac{y'}{y} = x$ .Dette er en seperabel diff.likning, vi får

$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int x \, \mathrm{d}x \iff \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \iff \underline{\underline{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}}}.$$

Oppgave 7

a) Vi bruker at $\overrightarrow{AB} = B - A$. Svaret blir $\underline{\underline{\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1) \text{ og } \overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)}}$.

b) $A(-1, 1, 1)$ inn i planlikningen gir $3(-1) + 2(1) + 2(1) - 1 = -3 + 2 + 2 - 1 = 0$ så A ligger i planet. Akkurat den samme prosessen kan brukes for å vise at B og C ligger i planet.

c) Vi er gitt $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$, $s \in \mathbb{R}$. Vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$ utspenner et tetraeder $ABCD$ med volum

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|.$$

Vi regner ut at $\overrightarrow{AD} = (s^2, 3s, 9)$,og at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -2, -2)$, så vi får at

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left|(-3,-2,-2)\cdot(s^2,3s,9)\right| = \frac{1}{6}\left|-3s^2-6s-18\right| \\ &= \frac{1}{6}|-3||s^2+2s+6| = \frac{1}{2}|s^2+2s+6| \end{aligned}$$

Observer at $s^2+2s+6 = (s+1)^2+5$, så s^2+2s+6 er aldri negativ, og vi kan se bort ifra absoluttverditegnet. Derfor er funksjonen for volumet gitt ved

$$\underline{\underline{V(s) = \frac{1}{2}s^2 + s + 3.}}$$

d) Deriverer vi $V(s)$, får vi at $V'(s) = s+1$ så $V'(s) = 0$ når $s = -1$. Observer at $V'(-2) = -1$ og $V'(0) = 1$, så $(-1, V(-1))$ er et bunnpunkt. Det minste volumet tetraederet kan ha er altså $V(-1) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = \underline{\underline{5/2}}$.

Oppgave 8

Vi skal vise at $P(n): \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ved induksjon.

Basistilfellet, $n = 1$ gir venstre side lik $1^3 = 1$ og høyre side $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$, så høyre side er lik venstre side og basistilfellet stemmer.

Induksjonshypotesen, $n = k$. Vi antar at formelen stemmer for $n = k$, altså at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Induksjonssteget, vi ønsker nå å vise at $P(k) \implies P(k+1)$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &\overset{\text{i.h}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right) \\ &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Del 2

Oppgave 1

a) Ikke gjort.

b) Fra oppgave a) vet man allerede hvordan dette området ser ut. Skjæringspunktene fås ved å løse $f(x) = g(x)$. Vi får at skjæringspunktene er $\{0, 2\}$. Da er

$$M = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{8}{5}}}.$$

c) Et skjermbilde fra Geogebra er inkludert.

1	F(x):=x^4-4*r^3*x-1 → $\mathbf{F(x) := -4\,r^3\,x + x^4 - 1}$
2	G(x):=4*r*x^3-6*r^2*x^2-r^4 → $\mathbf{G(x) := 4\,r\,x^3 - 6\,r^2\,x^2 - r^4}$
3	Løs(F=G) → $\mathbf{\{x = r - 1, x = r + 1\}}$
4	IntegralMellom(G, F, r-1, r+1) → $\mathbf{\frac{8}{5}}$

Vi ser at arealet mellom grafene er uavhengig av r.

Oppgave 2

a) Sentrumet i kuleflaten K_1 er gitt ved $(2t, 1, 3)$ og kulen har radius 2. Formelen for en kuleflate med radius r og sentrum i (x_0, y_0, z_0) er gitt ved

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Så for vår del blir likningen

$$\underline{\underline{(x - 2t)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 2^2}}.$$

b) Kuleflaten K_1 vil tangere yz-planet når avstanden fra sentrum i K_1 til yz-planet er 2. Likningen for yz-planet er $x = 0$. Bruker vi nå avstandsformelen får vi at avstanden er

$$D = \frac{|ax_1 + d|}{\sqrt{a^2}} = \frac{|1 \cdot 2t|}{\sqrt{1^2}} = |2t|.$$

Så vi må løse $|2t = 2|$, altså tangerer K_1 yz-planet når $\underline{\underline{t = \pm 1}}$.

c) Vi har en ny kuleflate gitt ved $K_2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Herifra ser vi at sentrum for K_2 er $(0, 0, 0)$. Dersom $r = 2$, vil kulene tangere hverandre når avstanden mellom sentrumene til K_1 og K_2 er 4 (radius K_1 + radius K_2). Altså må vi finne når avstanden mellom $(0, 0, 0)$ og $(2t, 1, 3)$ er 4. Avstanden mellom disse punktene er

$$S = \sqrt{(2t)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4t^2 + 10}.$$

Løser vi $\sqrt{4t^2 + 10} = 4$, får vi $t^2 = 3/2$, så $t = \pm\sqrt{3/2}$. Altså vil kulene tangere hverandre når $\underline{\underline{t = \pm\sqrt{3/2}}}$.

d) Fra c) vet vi at avstanden mellom sentrumene, hvis K_2 har radius r, er $A(t) = \sqrt{4t^2 + 10}$, og at kulene tangerer hverandre når $A(t) = 2 + r$. Setter vi $A(t) = 2 + r$, får vi likningen

$$4t^2 + 10 = 4 + 4r + r^2 \iff t^2 = \frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2}.$$

Siden $t^2 \geq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, må vi ha at $\frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2} \geq 0$. Denne likningen har to løsninger, der henholdsvis en er positiv, nemlig $r = \sqrt{10} - 2$. Altså er $\underline{\underline{r = \sqrt{10} - 2}}$ den minste verdien som sørger for at de to kulene tangerer.

Oppgave 3

a) Hvis bedriften klarer å nå målet blir utslippet i 2018 lik 20 000 tonn, i 2019 lik $20000 \cdot (0.85)$, i 2020 vil den være $(20000 \cdot 0.85) \cdot 0.85 = 20000 \cdot 0.85^2$. Vi ser at mønsteret danner en geometrisk rekke, så fra 2018 til 2027 blir summen av utslippene lik

$$\sum_{n=0}^{9} 20000 \cdot 0.85^n \approx \underline{\underline{107083.4 \ \text{(tonn)}}}$$

b) Om den andre bedriften vet vi at utslippene deres over $2018 - 2027$ er

$$S(r) = \sum_{n=0}^{9} 30000 \cdot r^n.$$

Vi er bedt å finne r slik at bedriften i a) og denne bedriften slipper ut like mye. Formelen for summen av en geometrisk rekke lar oss omskrive $S(r)$ til

$$S(r) = 30000 \left(\frac{1 - r^9}{1 - r} \right).$$

Settes $S(r)$ lik svaret i a) (dette kan man for eksempel gjøre i CAS), fås $r \approx 0.74$, så bedriften må redusere utslippene hvert år med omtrent 74 % for at bedriftene skal slippe ut det samme over samme periode.

Oppgave 4

a) Tallet 3.2 sier oss at det renner inn 3.2 liter vann i tanken per min, 0.14 sier oss at det renner ut 14 % av innholdet i tanken per minutt og $y(0) = 200$ sier oss at det var 200 liter vann i tanken til å starte med.

b) Dette er en lineær første ordens diff.likning

$$y' + 0.14y = 3.2,$$

og integrerende faktor er $e^{\int 0.14\,\mathrm{d}t} = e^{0.14t}$. Vi løser likningen ved å skrive

$$\begin{aligned} e^{0.14t}\left(y' + 0.14y\right) &= 3.2e^{0.14t} \\ \left(ye^{0.14t}\right)' &= 3.2e^{0.14t} \\ \int \left(ye^{0.14t}\right)' \,\mathrm{d}t &= \int 3.2e^{0.14t}\,\mathrm{d}t \\ ye^{0.14t} &= \frac{160}{7}e^{0.14t} + C \\ y &= \frac{160}{7} + Ce^{-0.14t} \end{aligned}$$

Med initialverdibetingelsen $y(0) = 200$ fås $C = 200 - \frac{160}{7} = \frac{1240}{7}$, og vi får

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{160}{7} + \frac{1240}{7}e^{-0.14t}}}.$$

c) Vi regner ut $y(20) \approx \underline{\underline{33.63\ \text{(liter)}}}$.

d) Utifra opplysningene danner vi oss diff.likningen $y' = 1.5 - ky$ for en $k \in \mathbb{R}$, der $y(0) = 0$. Denne diff.likningen kan løses likt som i b) og vi får den generelle løsningen

$$y(t) = \frac{1.5}{k} + Ce^{-kt}.$$

Med initialverdibetingelsen $y(0) = 0$ fås

$$y(t) = \frac{1.5}{k} - \frac{1.5}{k}e^{-kt}.$$

Videre vet vi at mengden vann i tanken vil stabilisere seg på 10L etterhvert, med andre ord er

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1.5}{k} - \frac{1.5}{k}e^{-kt}\right] = 10.$$

Vi kan herifra konkludere at $k = \dfrac{1.5}{10}$. Derfor er funksjonen vår er gitt ved

$$y(t) = 10 - 10e^{-0.15t}.$$

Og etter 20 minutter vil da derfor være

$$y(20) \approx \underline{\underline{9.50\ \text{(liter i tanken)}}}.$$