

1 Del 1

1.1 Oppgave 1

a)

$$f'(x) = 6(-\sin(2x - 1)) \cdot \frac{d}{dx}[2x - 1] = -12 \sin(2x - 1)$$

b)

$$g'(x) = \frac{d}{dx} [\cos^2(x) + \sin^2(x)] = \frac{d}{dx}[1] = 0$$

1.2 Oppgave 2

a)

$$\int (2x^2 - 3x) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

b) La $u = x^2 + 2 \implies dx = \frac{1}{2x} du$. Da fås

$$\int 4x \cdot \cos(x^2 + 2) dx = 2 \int \cos(u) = 2 \sin(u) + C = 2 \sin(x^2 + 2) + C$$

c) Observer at $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ og bruk delbrøksoppspalting. Det gir

$$\int \frac{4}{x^2 - 4} = \int \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \ln|x - 2| - \ln|x + 2| + C = \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$$

1.3 Oppgave 3

a) For at rekka skal konvergere må $|e^{-x}| < 1$. Siden $e^x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, holder det med å sjekke når $e^{-x} < 1 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

b) Vi ønsker å løse $S(x) = 3$. Siden $S(x)$ er en geometrisk rekke er den for alle $x > 0$ slik at

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Sett nå dette lik 3 så får vi likningen

$$2e^x = 3 \iff x = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

1.4 Oppgave 4

b) Vi skal finne skjæringspunktene til $\sin(x)$ og $\cos(x)$, altså løse

$\sin(x) - \cos(x) = 0 \iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1 = 0$, når $\cos(x) \neq 0$. Dette forenkles igjen til $\tan(x) = 1$, som skjer når $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Så skjæringspunktene er $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

c)

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x)) dx = -\cos(x) - \sin(x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

1.5 Oppgave 5

a) Vi observerer at amplituden er 1.2 og at perioden er 8 sekunder. Jeg tolker likevektslinja til å være 1.2 m utifra oppgavebeskrivelsen. Siden $f(t)$ er på sitt høyeste når $t = 0$, kan vi konkludere med at den er faseforskjøvet med $\frac{\pi}{2}$. Konklusjonen er

$$f(t) = 1.2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) + 1.2$$

b) Her skal vi løse $f(t) = 1.2 + 0.6 = 1.8 \iff \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Dette er ekvivalent med å løse

$$\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{og} \quad \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

der $n \in \mathbb{Z}$ og $t \in [0, 8]$. Dette er igjen ekvivalent med å løse

$$t = -\frac{4}{3} + 8n \quad \text{og} \quad t = \frac{4}{3} + 8n$$

Herifra ser vi at løsningene på det ønskede intervallet er $t \in \{\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\}$. Så bøyen er 0.6 m over likevektslinja etter 1.33 sekunder og etter 6.66 sekunder.

1.6 Oppgave 6

a) Observer at tangenten i $(1, -1)$ peker nedover, så alternativ 1 ($y' = x + y$) kan ikke være rett, fordi da hadde $y' = 1 - 1 = 0$ i $(1, -1)$, altså skulle tangenten vært flat. Hvis alternativ 2 hadde vært korrekt skulle tangenten gått mot å stige mer og mer når y nærmet seg 0 og x er liten (og positiv i dette eksempelet), for når $y' = \frac{x}{y}$, og $y \rightarrow 0$, vokser helt klart y' . Men her går y' mot å være mer og mer "flat". Eneste gjenstående alternativ er alternativ 3, så $y' = x \cdot y$ må være korrekt.

b) $y' = x \cdot y \iff \frac{y'}{y} = x$ Dette er en separabel diff.likning., vi får

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx \iff \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \iff y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

1.7 Oppgave 7

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$

b) $A(-1, 1, 1)$ inn i planlikningen gir $3(-1) + 2(1) + 2(1) - 1 = -3 + 2 + 2 - 1 = 0$ så A ligger i planet. Akkurat den samme prosessen kan brukes for å vise at B og C ligger i planet.

c) Vi er gitt $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$, $s \in \mathbb{R}$. Vektorene \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} og \overrightarrow{AD} utspenner et tetraeder $ABCD$ med volum

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

Vi regner ut at $\overrightarrow{AD} = (s^2, 3s, 9)$, og at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -2, -2)$, så vi får at

$$V = \frac{1}{6} |(-3, -2, -2) \times (s^2, 3s, 9)| = \frac{1}{6} |-3s^2 - 6s - 18| = \frac{1}{6} |-3||s^2 + 2s + 6| = \frac{1}{2} |s^2 + 2s + 6|$$

Observer at $s^2 + 2s + 6 = (s + 1)^2 + 5$, så $s^2 + 2s + 6$ er aldri negativ, og vi kan se bort ifra absoluttverditegnet, så funksjonen for volumet av s er gitt ved

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 + s + 3$$

b) Deriverer vi $V(s)$, får vi at $V'(s) = s + 1$ så $V'(s) = 0$ når $s = -1$. Observer at $V'(-2) = -1$ og $V'(0) = 1$, så $(-1, V(-1))$ er et bunnpunkt. Det minste volumet tetraederet kan ha er altså $V(-1) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = \frac{5}{2}$.

1.8 Oppgave 8

Vi skal vise at $P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ved induksjon.

Basistilfellet, $n = 1$ gir venstre side lik $1^3 = 1$ og høyre side $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$, så høyre side er lik venstre side og basistilfellet stemmer.

Induksjonshypotesen, $n = k$. Vi antar at formelen stemmer for $n = k$, altså at

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Induksjonssteget, vi ønsker nå å vise at $P(k) \implies P(k+1)$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &\stackrel{\text{i.h.}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right) \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{(k+2)^2}{4} \right) \\ &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$