Utdanningsdirektoratet

Eksamen

23.11.2018

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du — viser rekneferdigheiter og matematisk forståing — gjennomfører logiske resonnement — ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar — kan bruke formålstenlege hjelpemiddel — forklarer framgangsmåtar og grunngir svar — skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar — vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: — Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 6\cos(2x-1)$

b) $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (2x^2 - 3x)\ \mathrm{d}x$

b) $\int 4x \cdot \cos(x^2 + 2)\ \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$

Oppgåve 3 (4 poeng)

Ei geometrisk rekkje er gitt ved

$$S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots$$

a) For kva verdiar av x konvergerer denne rekkja?

b) Bestem x slik at rekkja konvergerer mot 3.

Oppgåve 4 (6 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$$
$$g(x) = \cos x \; , \quad 0 \le x \le 2\pi$$

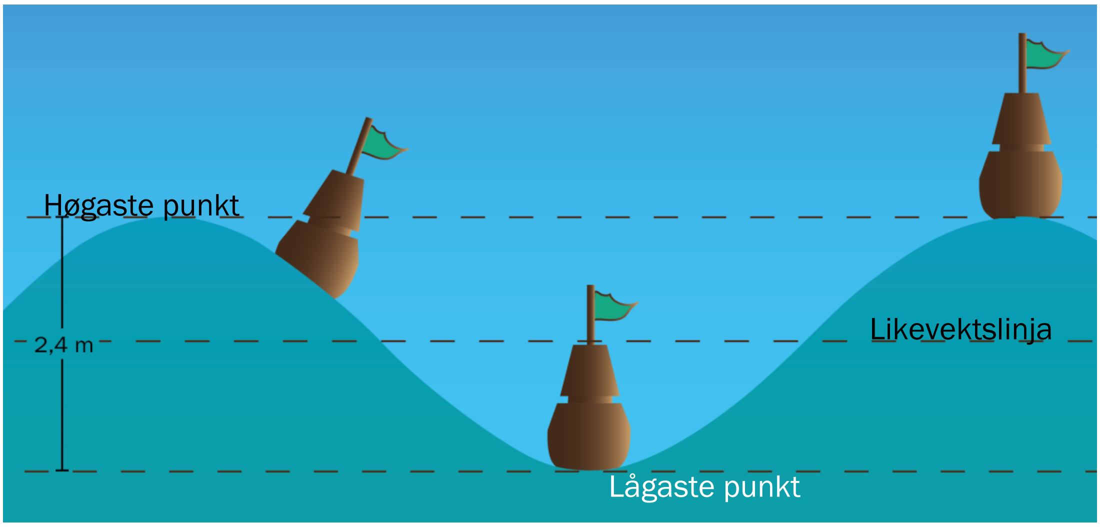
a) Lag ei skisse av grafane til f og g i same koordinatsystem.

b) Bestem eventuelle skjeringspunkt mellom grafane til f og g.

Grafane til f og g avgrensar eit område.

c) Bestem arealet av dette området.

Oppgåve 5 (4 poeng)



Bøyen sett ved tre ulike tidspunkt

Ein bøye beveger seg opp og ned med bølgjene. I løpet av 4 s vil bøyen bevege seg 2,4 m i vertikal retning frå det høgaste punktet til det lågaste punktet.

La $f(t)$ vere høgda til bøyen (i meter) over likevektslinja ved tidspunktet t (målt i sekund). Gå ut frå at bøyen er på sitt høgaste punkt når $t = 0$.

Vi går ut frå at $f(t)$ kan skrivast på forma

$$f(t) = A\sin(ct + \varphi)$$

a) Bestem funksjonsuttrykket til f.

b) Når er bøyen 0,6 m over likevektslinja i løpet av dei 10 første sekunda?

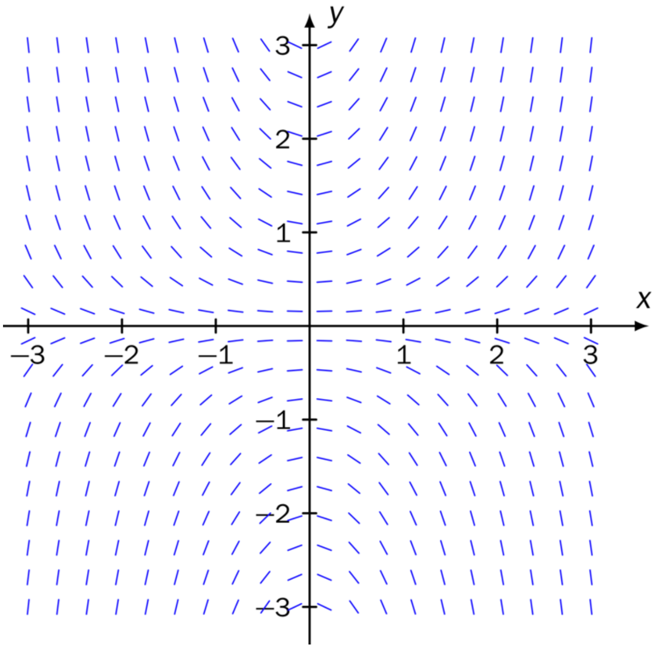
Oppgåve 6 (4 poeng)

Retningsdiagrammet på figuren tilhøyrer éi av differensiallikningane under.

1) $y' = x + y$

2) $y' = \dfrac{x}{y}$

3) $y' = x \cdot y$



a) Avgjer kva for to av dei tre differensiallikningane som ikkje kan ha eit slikt retningsdiagram.

b) Løys differensiallikninga du meiner retningsdiagrammet tilhøyrer.

Oppgåve 7 (7 poeng)

Gitt punkta $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,0)$ og $C(-1,0,2)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at A, B og C ligg i planet gitt ved

$$3x + 2y + 2z - 1 = 0$$

Gitt punktet $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$, der s er eit reelt tal.

c) Bestem volumet av tetraederet *ABCD* uttrykt ved *s*.

d) Bestem det minste volumet tetraederet kan ha.

Oppgåve 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = x^4 - 4x - 1$$
$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

a) Teikn grafane til f og g i eit koordinatsystem.

Dei to grafane avgrensar eit område M i planet.

b) Bestem arealet av M.

Funksjonane F og G er gitt ved

$$F(x) = x^4 - 4r^3 \cdot x - 1$$
$$G(x) = 4r \cdot x^3 - 6r^2 \cdot x^2 - r^4$$

Grafane til F og G avgrensar eit område N i planet.

c) Bruk CAS til å vise at arealet av N er uavhengig av r.

Oppgåve 2 (7 poeng)

Sentrum i ei kuleflate K_1 med radius 2 beveger seg langs ei rett linje. Ved tidspunktet t vil sentrum i K_1 ha koordinatane $(2t, 1, 3)$.

a) Bestem ei likning for K_1 uttrykt ved t.

b) Ved kva tidspunkt vil K_1 tangere yz-planet?

Ei anna kuleflate K_2 med radius r er gitt ved likninga

$$K_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

c) Ved kva tidspunkt vil dei to kuleflatene K_1 og K_2 tangere kvarandre dersom $r = 2$?

d) Bestem eksakt den minste verdien til r som gjer at dei to kulene tangerer kvarandre.

Oppgåve 3 (4 poeng)

Ei bedrift slepper ut 20 000 tonn CO_2 i 2018. Dei har eit mål om å redusere dei årlege utsleppa med 15 % kvart år frå og med 2019.

a) Kor mykje CO_2 vil bedrifta sleppe ut til saman i løpet av dei ti åra 2018–2027 dersom dei klarer å nå målet?

Ei anna bedrift slepper ut 30 000 tonn CO_2 i 2018.

b) Kor mange prosent må denne bedrifta redusere utsleppa med per år for at bedriftene til saman skal sleppe ut like mykje i løpet av åra 2018–2027?

Oppgåve 4 (8 poeng)

I ein tank renn det inn vatn med konstant fart. Samtidig renn det ut vatn gjennom eit hòl i botnen av tanken. Vassmengda som renn ut per minutt, er til kvar tid proporsjonal med vassmengda i tanken. La $y(t)$ liter vere vassmengda i tanken etter t minutt. Da er y løysinga av differensiallikninga

$$y' = 3{,}2 - 0{,}14y \quad , \quad y(0) = 200$$

a) Forklar kva tala 3,2 og 0,14 og 200 står for.

b) Løys differensiallikninga.

c) Kor mykje vatn er det i tanken etter 20 min?

I ein annan tank renn det inn 1,5 L vatn per minutt. Også i denne tanken renn det ut vatn gjennom eit hòl i botnen. Vassmengda som renn ut, er proporsjonal med vassmengda i tanken. Når $t = 0$, er det 0 L i denne tanken. Etter lang tid vil vassmengda i tanken stabilisere seg på 10 L.

d) Kor mykje vatn er det i denne tanken etter 20 min?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du — viser regneferdigheter og matematisk forståelse — gjennomfører logiske resonnementer — ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner — kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler — forklarer framgangsmåter og begrunner svar — skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger — vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: — Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 6\cos(2x - 1)$

b) $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (2x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int 4x \cdot \cos(x^2 + 2)\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

En geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots$$

a) For hvilke verdier av x konvergerer denne rekken?

b) Bestem x slik at rekken konvergerer mot 3.

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$$
$$g(x) = \cos x \; , \quad 0 \le x \le 2\pi$$

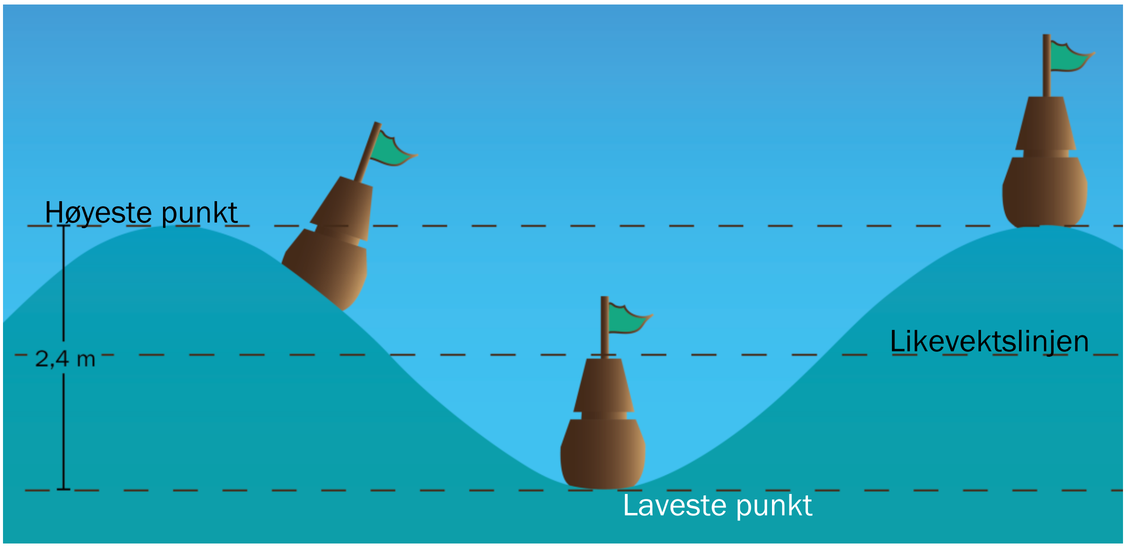
a) Lag en skisse av grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem eventuelle skjæringspunkt mellom grafene til f og g.

Grafene til f og g avgrenser et område.

c) Bestem arealet av dette området.

Oppgave 5 (4 poeng)



Bøyen sett ved tre ulike tidspunkt

En bøye beveger seg opp og ned med bølgene. I løpet av 4 s vil bøyen bevege seg 2,4 m i vertikal retning fra det høyeste punktet til det laveste punktet.

La $f(t)$ være høyden til bøyen (i meter) over likevektslinjen ved tidspunktet t (målt i sekunder). Anta at bøyen er på sitt høyeste punkt når $t = 0$.

Vi går ut fra at $f(t)$ kan skrives på formen

$$f(t) = A\sin(ct + \varphi)$$

a) Bestem funksjonsuttrykket til f.

b) Når er bøyen 0,6 m over likevektslinjen i løpet av de 10 første sekundene?

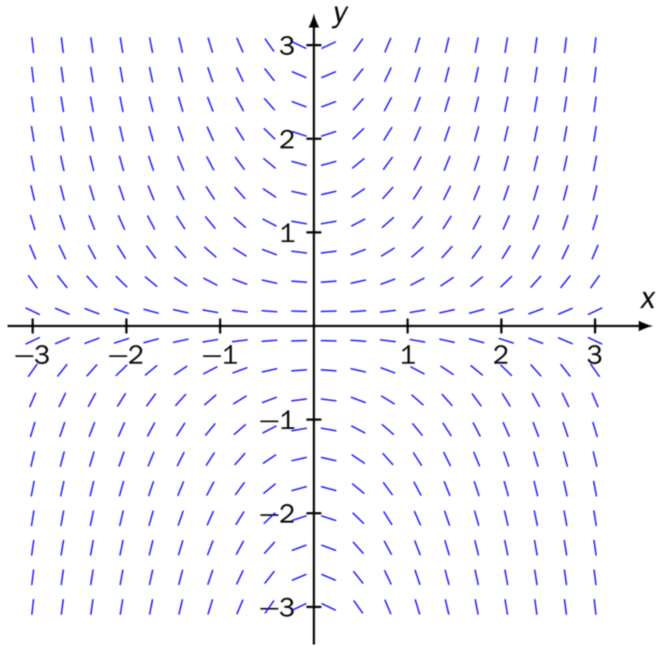
Oppgave 6 (4 poeng)

Retningsdiagrammet på figuren tilhører én av differensiallikningene nedenfor.

1) $y' = x + y$

2) $y' = \dfrac{x}{y}$

3) $y' = x \cdot y$



a) Avgjør hvilke to av de tre differensiallikningene som ikke kan ha et slikt retningsdiagram.

b) Løs differensiallikningen du mener retningsdiagrammet tilhører.

Oppgave 7 (7 poeng)

Gitt punktene $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,0)$ og $C(-1,0,2)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at *A*, *B* og *C* ligger i planet gitt ved

$$3x + 2y + 2z - 1 = 0$$

Gitt punktet $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$, der s er et reelt tall.

c) Bestem volumet av tetraederet *ABCD* uttrykt ved *s*.

d) Bestem det minste volumet tetraederet kan ha.

Oppgave 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Funksjonene *f* og *g* er gitt ved

$$f(x) = x^4 - 4x - 1$$
$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

a) Tegn grafene til *f* og *g* i et koordinatsystem.

De to grafene avgrenser et område M i planet.

b) Bestem arealet av M.

Funksjonene *F* og *G* er gitt ved

$$F(x) = x^4 - 4r^3 \cdot x - 1$$
$$G(x) = 4r \cdot x^3 - 6r^2 \cdot x^2 - r^4$$

Grafene til *F* og *G* avgrenser et område *N* i planet.

c) Bruk CAS til å vise at arealet av *N* er uavhengig av *r*.

Oppgave 2 (7 poeng)

Sentrum i en kuleflate K_1 med radius 2 beveger seg langs en rett linje. Ved tidspunktet *t* vil sentrum i K_1 ha koordinatene $(2t,\ 1,\ 3)$.

a) Bestem en likning for K_1 uttrykt ved *t*.

b) Ved hvilke tidspunkt vil K_1 tangere *yz*-planet?

En annen kuleflate K_2 med radius *r* er gitt ved likningen

$$K_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

c) Ved hvilke tidspunkt vil de to kuleflatene K_1 og K_2 tangere hverandre dersom $r = 2$?

d) Bestem eksakt den minste verdien til *r* som gjør at de to kulene tangerer hverandre.

Oppgave 3 (4 poeng)

En bedrift slipper ut 20 000 tonn CO_2 i 2018. De har et mål om å redusere de årlige utslippene med 15 % hvert år fra og med 2019.

a) Hvor mye CO_2 vil bedriften slippe ut til sammen i løpet av de ti årene 2018–2027 dersom de klarer å nå målet?

En annen bedrift slipper ut 30 000 tonn CO_2 i 2018.

b) Hvor mange prosent må denne bedriften redusere utslippene med per år for at bedriftene til sammen skal slippe ut like mye i løpet av årene 2018–2027?

Oppgave 4 (8 poeng)

I en tank renner det inn vann med konstant fart. Samtidig renner det ut vann gjennom et hull i bunnen av tanken. Vannmengden som renner ut per minutt, er til enhver tid proporsjonal med vannmengden i tanken. La $y(t)$ liter være vannmengden i tanken etter t minutter. Da er y løsningen av differensiallikningen

$$y' = 3{,}2 - 0{,}14y \quad , \quad y(0) = 200$$

a) Forklar hva tallene 3,2 og 0,14 og 200 står for.

b) Løs differensiallikningen.

c) Hvor mye vann er det i tanken etter 20 min?

I en annen tank renner det inn 1,5 L vann per minutt. Også i denne tanken renner det ut vann gjennom et hull i bunnen. Vannmengden som renner ut, er proporsjonal med vannmengden i tanken. Når $t = 0$, er det 0 L i denne tanken. Etter lang tid vil vannmengden i tanken stabilisere seg på 10 L.

d) Hvor mye vann er det i denne tanken etter 20 min?

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet