Løsningsforslag eksamen 1T høsten 2018

Del 1

Oppgave 1
Bruker definisjonen av sinus:

$$\sin v = \frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{8}{\sqrt{36+64}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

Oppgave 2

$$\frac{4x^2-4}{x^2-2x+1} = \frac{4(x^2-1)}{(x-1)^2} = \frac{4(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \underline{\underline{\frac{4x+4}{x-1}}}$$

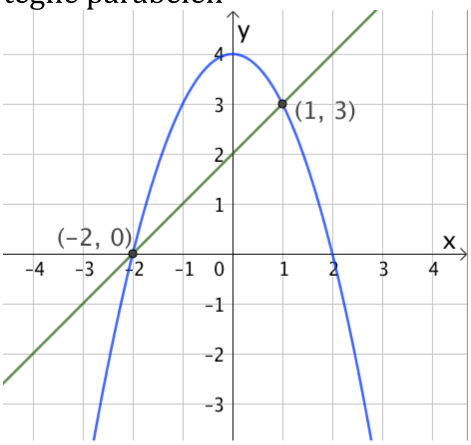
Oppgave 3
Faktoriserer venstresiden ved hjelp av "sum og produkt"

$$x^2-4x-12<0$$
$$(x-6)(x+2)<0$$

Siden grafen til $x^2-4x-12$ er en parabel som vender den hule siden opp (smilemunn), vil grafen ligge under x-aksen mellom nullpunktene.

$$\underline{\underline{x^2-4x-12<0 \text{ når } -2<x<6}}$$

Oppgave 4
Grafisk:
Tegner først den rette linja og regner så ut verdien av y for noen x-verdier for å kunne tegne parabelen



Løsningene er gitt ved skjæringspunktene på bildet over.

Ved regning:

$$
\begin{aligned}
y &= x+2 \\
&\textit{gir} \\
x+2 &= -x^2+4 \\
x^2+x-2 &= 0 \\
(x-1)(x+2) &= 0 \\
&\textit{så} \\
x &= -2 \vee x = 1
\end{aligned}
$$

Dette gir videre:
$y=-2+2=0$ eller $y=1+2=3$

$$\underline{\underline{x=-2 \wedge y=0 \vee x=1 \wedge y=3}}$$

Oppgave 5

$$
\begin{aligned}
\sqrt{12}-\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[4]{9} &= \sqrt{4\cdot 3}-\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[4]{3^2} \\
&= \sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-3^{\frac{3}{6}}-3^{\frac{2}{4}} \\
&= 2\sqrt{3}-3^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3} \\
&= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

$$
\begin{aligned}
2^x \cdot 2^{\frac{x}{2}} &= \frac{1}{8} \\
2^{x+\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2^3} \\
2^{\frac{3x}{2}} &= 2^{-3} \\
\frac{3x}{2} &= -3 \\
x &= -3\cdot\frac{2}{3} \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -2}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 7

Dersom forholdet mellom arealene til S_2 og S_1 er 4, vil forholdet mellom radiene være $\sqrt{4}=2$. Det betyr at radius i sirkelen S_2 er dobbelt så stor som radius i S_1.
Vi kjenner omkretsen til S_1 og kan dermed finne radius i S_1 ved å dele omkretsen på 2π.
Vi må doble dette igjen for å ha radius i S_2

$2\cdot\frac{5\pi}{2\pi}=5$, så radius i S_2 er 5

Oppgave 8

a) $f'(0)=(0-1)(0-1)(0+2)=(-1)(-1)\cdot 2=1\cdot 2=\underline{\underline{2}}$ @

b) Tangenten til grafen i punktet (0,0) har stigningstall $f'(0)$ og konstantledd 0.
Likningen for denne tangenten er da $\underline{\underline{y=2x}}$

c) $f'(-2)=(-2-1)(-2-1)(-2+2)=(-3)(-3)\cdot 0=0$
For å vise at det er snakk om *bunn*punkt, setter jeg inn to *x*-verdier på hver side av det aktuelle nullpunktet til den deriverte.
$f'(-3)=(-3-1)(-3-1)(-3+2)=(-4)(-4)(-1)=-16$
$f(-1)=(-1-1)(-1-1)(-1+2)=(-2)(-2)\cdot 1=4$

Den deriverte skifter fortegn fra negativ til positiv i det aktuelle nullpunktet, så punktet $(-2,-6)$ er et bunnpunkt. Som skulle vises

$f'(x)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$

Faktoren $(x-1)^2$ forteller at den deriverte har et dobbelt nullpunkt for *x*=1. Det betyr at den ikke skifter fortegn her.

Da må punktet $\left(1,\frac{3}{4}\right)$ være et terrassepunkt. Som skulle vises

Oppgave 9

a) Det er 36 mulige utfall totalt. Lister opp utfallene som er gunstige for hendelsen "nøyaktig én toer": {(2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)}

$P(\text{Nøyaktig én toer})=\frac{10}{36}=\underline{\underline{\frac{5}{18}}}$

b) Lister opp alle de mulige utfallene: {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}
Det er altså 5 mulige utfall, der 3 av utfallene er gunstige for hendelsen "ingen toer"

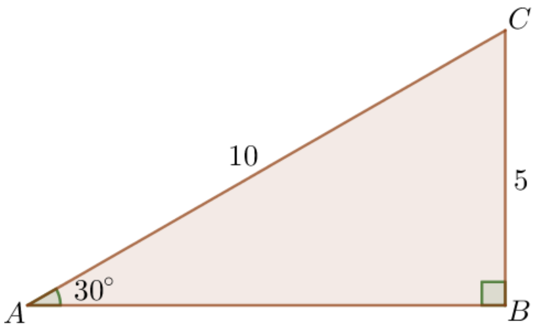
$P(\text{Ingen toer} \mid \text{Summen av antall øyne er } 8)=\underline{\underline{\frac{3}{5}=0{,}6=60\%}}$

Oppgave 10

a) Den minste avstanden fra et punkt til ei rett linje, er en normal fra punktet ned på linja. Det betyr at *BC* står normalt på *AB* når avstanden fra *B* til *C* er minst mulig. Da har vi en "30-60-90-trekant", der *BC* er korteste katet og *AC* er hypotenus. I en slik trekant er korteste katet halvparten så lang som hypotenusen.

<u>Den korteste lengden *BC* kan ha er 5</u>

Skisse:



b) Her får jeg bruk for å vite hva sinus til 30 grader er, men det kan jeg bestemme ut fra figuren i forrige deloppgave.

Definisjonen av sinus forteller at det må være $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}$$

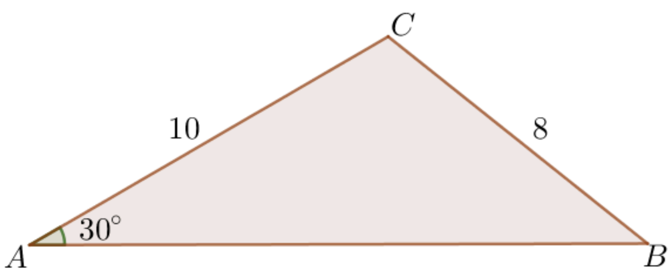
gir

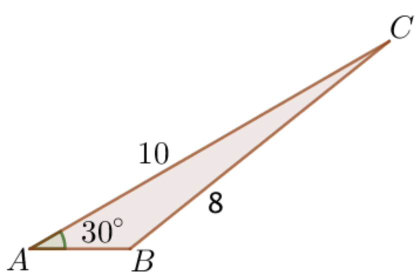
$$\sin B = \frac{\sin A}{BC} \cdot AC = \frac{\sin 30^\circ}{8} \cdot 10 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

c)

$$\angle B = 38{,}7^\circ \vee \angle B = 180^\circ - 38{,}7^\circ = \underline{\underline{141{,}3^\circ}}$$

Skisser:





Oppgave 11

a) Trekant *DBE* og trekant *FEC* er begge rettvinklede.
Vinkel *DBE* og vinkel *FEC*, dannes begge ved at linjestykket *BC* skjærer de parallelle linjestykkene *DB* og *FE*. Da vet vi at disse to vinklene er like store.
Vi har da kommet frem til at samsvarende vinkler er like store i de to trekantene.

Trekant *DBE* og trekant *FEC* er formlike. Som skulle forklares.

b) Setter opp en likning der venstresiden er arealet av trekant *ABC*, uttrykt som summen av arealene til trekant *DBE*, trekant *FEC* og rektangelet. Høyresiden er arealet av trekant *ABC*, beregnet ut fra de gitte målene på trekanten.

$$\frac{(6-x)\cdot h}{2}+\frac{x\cdot(8-h)}{2}+x\cdot h=\frac{6\cdot 8}{2}$$
$$6h-x\cdot h+8x-x\cdot h+2\cdot x\cdot h=48$$
$$6h+8x=48$$
$$6h=-8x+48$$
$$h=-\frac{8}{6}x+8$$
$$h=-\frac{4}{3}x+8$$

Som skulle vises

c) Vi må ha $x>0$ for at rektangelet skal ha noe areal i det hele tatt.
(Grunnlinja må være lengre enn 0)
Samtidig må også $x<6$ for at vi skal ha en høyde i rektangelet.
(Rektangelet er *innskrevet* i trekanten, så punktet *E* beveger seg mot punktet *B* når punktet *D* beveger seg mot punktet *B*).
Det betyr at vi må ha $x\in\langle 0,6\rangle$, som skulle forklares

$$g(x)=x\cdot h=x\left(-\frac{4}{3}x+8\right)=-\frac{4}{3}x^2+8x$$, som skulle vises

d)

$$g'(x)=-\frac{8}{3}x+8=-\frac{8}{3}(x-3)$$

så

$$g'(x)=0\Rightarrow x=3$$

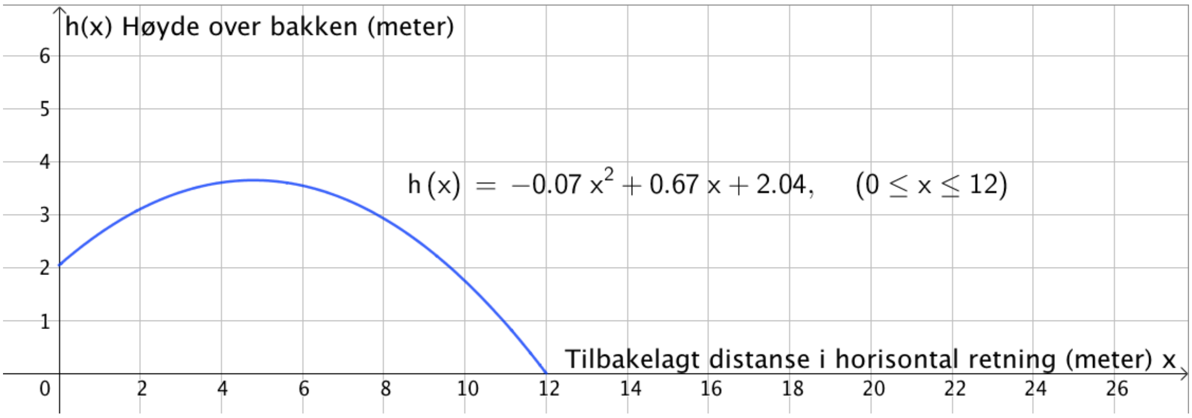
Ser av uttrykket til den deriverte at grafen til *g* er en parabel som vender den hule siden ned (sur munn), så nullpunktet til den deriverte gir oss *x*-koordinaten til et *toppunkt* på grafen til *g*.

Arealet av rektangelet er størst når *x*=3

Del 2

Oppgave 1

a) Tegner grafen til *h* ved hjelp av GeoGebra:



a)

Nettet er plassert 9 meter i horisontal retning fra der hvor ballen blir slått. Skriver $h(9)$ i inntastingsfeltet og får tallet a i algebrafeltet.

Tall

a = 2.4

Ballen vil altså være 2,4 meter over bakken når den er på linje med nettet.

Dersom høyden på nettet er stilt inn ut fra spesifikasjonene til kvinnekamper, vil ballen gå over nettet. Det vil den ikke gjøre dersom høyden til nettet er stilt inn ut fra spesifikasjonene til herrekamper.

Oppgave 2

a)

CAS

1	f(x):=-x^3+k*x^2 → $f(x) := k\,x^2 - x^3$
2	Nullpunkt(f) → $\{x = k, x = 0\}$

Nullpunktene er oppgitt i linje 2 i CAS-vinduet over b)

CAS

1	f(x):=-x^3+k*x^2 $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := k\,x^2 - x^3}$
2	f'(x) $\rightarrow\ \mathbf{2\,k\,x - 3\,x^2}$
3	f'(x)=0 Løs: $\left\{\mathbf{x = \frac{2}{3}\,k, x = 0}\right\}$
4	f((2/3)k) $\rightarrow\ \mathbf{\frac{4}{27}\,k^3}$
5	f(0) $\rightarrow\ \mathbf{0}$

Uttrykket i linje 2 forteller at grafen til den deriverte er en parabel som vender den hule siden ned (sur munn).
Siden $k \geq 1$, vet vi at den deriverte har ett nullpunkt når $x=0$ og ett når $x>0$.
(Se linje 3 i bildet over).
Vi kan nå si at den deriverte skifter fortegn fra negativt til positivt når $x=0$ og fra positivt til negativt når $x = \frac{2}{3}k$. Det gir henholdsvis bunnpunkt og toppunkt.
Regner ut maksimalverdi og minimalverdi i linje 4 og 5.

Grafen til f har bunnpunkt i (0,0) og toppunkt i $\left(\frac{2}{3}k, \frac{4}{27}k^3\right)$, <u>som skulle vises</u>

c)

CAS

1	f(x):=-x^3+k*x^2 $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := k\,x^2 - x^3}$
2	Tangent(1, f) $\rightarrow\ \mathbf{y = 2\,k\,x - k - 3\,x + 2}$
3	y=(2k-3)x+2-k

d)

CAS

1	f(x):=-x^3+k*x^2 → $f(x) := k\,x^2 - x^3$
2	f'(1) → $2\,k - 3$
3	(f(2)-f(0))/(2-0) → $2\,k - 4$

Den momentane vekstfarten til *f* når $x=1$ er gitt ved uttrykket i linje 2 på bildet over.
I linje 3 har jeg regnet ut den gjennomsnittlige vekstfarten til *f* fra $x=0$ til $x=2$

Siden k≥1, vil alltid uttrykket i linje 2 ha større verdi enn uttrykket i linje 3

Den momentane vekstfarten til *f* når $x=1$, vil altså alltid være større enn den gjennomsnittlige vekstfarten til *f* fra $x=0$ til $x=2$. Som skulle vises

Oppgave 3

a) Lager *krysstabell:*

	Popcorn	Ikke popcorn	Sum
Smågodt	80	140	220
Ikke smågodt	200	30	230
Sum	280	170	450

b)

$$P(\text{Popcorn} \cap \text{Smågodt}) = \frac{80}{450} = \underline{\underline{\frac{8}{45} \approx 0{,}178 = 17{,}8\%}}$$

c)

$$P(\text{Ikke popcorn} \mid \text{Smågodt}) = \frac{140}{220} = \underline{\underline{\frac{7}{11} \approx 0{,}636 = 63{,}6\%}}$$

Oppgave 4

a) Bruker arealsetningen:

$$A = \frac{2s \cdot 5s \cdot \sin 60°}{2} = 5s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{5s^2 \cdot \sqrt{3}}{2}}}$$

b) Bruker cosinussetningen:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2s)^2+(5s)^2-2\cdot 2s\cdot 5s\cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{4s^2+25s^2-20s^2\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{19s^2} \\ &= \underline{\underline{s\cdot\sqrt{19}}} \end{aligned}$$

c) Dersom trekanten skal være rettvinklet, må vi ende opp med en ”30-60-90-trekant”. Siden vinkel *A* er fast 60 grader, vil det bety at vi enten må ha *AC* som korteste katet og *AB* som hypotenus, eller omvendt.
I en slik trekant er hypotenusen alltid dobbelt så lang som korteste katet.
Det er umulig at $5s = 2\cdot 2s$, eller at $2s = 2\cdot 5s$
(vi tar her utgangspunkt i at *s* ikke er lik null)

Trekanten er ikke rettvinklet for noen verdi av *s*. <u>Som skulle vises</u>

Oppgave 5

1	a+b+c=18 → $a+b+c=18$
2	sqrt(s(s−a)(s−b)(s−c))=12 → $\sqrt{s\,(-a+s)\,(-b+s)\,(-c+s)}=12$
3	s=(a+b+c)/2 → $s=\frac{1}{2}\,(a+b+c)$
4	a=b → $a=b$
5	{\$1, \$2, \$3, \$4} Løs: $\left\{\{a=5,b=5,c=8,s=9\},\left\{a=\frac{-\sqrt{33}+35}{4},b=\frac{-\sqrt{33}+35}{4},c=\frac{\sqrt{33}+1}{2},s=9\right\},\left\{a=\frac{\sqrt{33}+35}{4},b=\frac{\sqrt{33}+35}{4},c=\frac{-\sqrt{33}+1}{2},s=9\right\}\right\}$

De to trekantene som oppfyller kravene, har lengder som er oppgitt i de to første løsningene i rad 5 i bildet over (lest fra venstre)

De har sidelengder 5, 5 og 8 eller $\frac{-\sqrt{35}+35}{4}, \frac{-\sqrt{35}+35}{4}$ og $\frac{\sqrt{33}+1}{2}$