# Løsningsforslag eksamen S2 våren 2018

## Del 1

### Oppgave 1

a) $f(x)=2x^3-4x+1 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}$

b) $g(x)=\dfrac{x}{e^x} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{e^{2x}}=\underline{\underline{\dfrac{1-x}{e^x}}}$

c) $h(x)=\ln\left(x^2+4x\right) \Rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{x^2+4x}\cdot\left(2x+4\right)=\underline{\underline{\dfrac{2x+4}{x^2+4x}}}$

### Oppgave 2

$I.\quad 5x+y+2z=0$
$II.\quad 2x+3y+z=3$
$III.\quad 3x+2y-z=-3$

Legger likning *III* til likning *II* én gang og legger den til likning *II* to ganger, og får likning *IV og V*:

$IV.\ 11x+5y=-6$
$V.\ 5x+5y=0 \Leftrightarrow 5y=-5x$

Setter *V* inn i *IV* og får:

$$11x-5x=-6$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

$x=-1$ gir, innsatt i *V:*

$$5y=-5(-1)$$
$$y=1$$

Setter $x=-1$ og $y=1$ inn i *I* og får:

$$5(-1)+1+2z=0$$
$$2z=4$$
$$z=2$$

$$\underline{\underline{x=-1 \wedge y=1 \wedge z=2}}$$

## Oppgave 3

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

a) $P(x)$ er delelig med $(x-1)$ dersom $P(1) = 0$

$P(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 - 13\cdot 1 + 15 = 1 - 3 - 13 + 15 = 0$, så

$P(x)$ er delelig med $(x-1)$, <u>som skulle vises</u>

b) Vil skrive $P(x)$ som et produkt av lineære faktorer.
Starter med å gjennomføre polynomdivisjon.

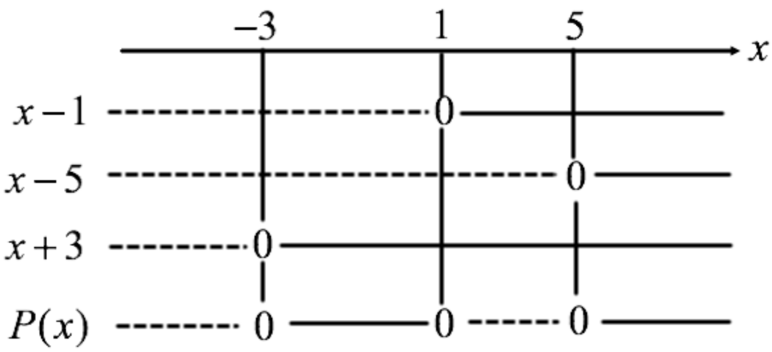
$$\left(x^3 - 3x^2 - 13x + 15\right) : (x-1) = x^2 - 2x - 15$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad -2x^2 - 13x + 15 \\
\quad \underline{-2x^2 + 2x} \\
\qquad\quad -15x + 15 \\
\qquad\quad \underline{-15x + 15} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 2x - 15\right) = (x-1)(x-5)(x+3)$$

*Her har jeg brukt "sum og produkt" for å faktorisere andregradspolynomet som ble resultatet av polynomdivisjonen.*

Tegner fortegnslinjer:




$$\underline{\underline{P(x) > 0 \text{ når } x \in \langle -3, 1\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle}}$$

## Oppgave 4

a)

$$d = \frac{14-2}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 2 + (n-1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = \underline{\underline{4n-2}}$$

b)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{2 + 4 \cdot 100 - 2}{2} \cdot 100 = 200 \cdot 100 = \underline{\underline{20000}}$$

## Oppgave 5

a) Vi ser her at vi må multiplisere et ledd i rekka med $\frac{1}{4}$ for å få det neste leddet,

så $k = \frac{1}{4}$.

Vi har altså $-1 < k < 1$, så rekka konvergerer.

Som skulle vises

Bestemmer summen av rekka:

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4}}$$

b)

$$0{,}242424\ldots = 0{,}24 + 0{,}0024 + 0{,}000024 + \cdots = \frac{24}{100} + \frac{24}{1000} + \frac{24}{1000000} + \cdots = \frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \cdots$$

Den uendelige geometriske rekka har $k = \frac{1}{100}$

Summen av rekka er 0,242424... og kan skrives slik:

$$0{,}242424\ldots = \frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{24}{100-1} = \underline{\underline{\frac{24}{99}}}$$

## Oppgave 6

$$f(x)=\frac{6}{1+e^{-x}}$$

a) Grafen til *f* er alltid stigende dersom $f'(x)>0$ for alle *x*.

$$f'(x)=\frac{0\cdot\left(1+e^{-x}\right)-6\left(-e^{x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

Siden $e^{-x}>0$ for alle *x*, vil både teller og nevner alltid være positive, uansett hvilken verdi *x* har.

$f'(x)>0$ for alle *x*, så grafen til *f* er alltid stigende.

Som skulle vises

b) Når *x* blir svært liten (går mot minus uendelig), vil $e^{-x}$ gå mot uendelig. Da vil hele nevneren gå mot uendelig, slik at verdien av brøken går mot null

Når *x* blir svært stor (går mot uendelig), vil $e^{-x}$ gå mot null. Da vil verdien til nevneren nærme seg 1, slik at verdien av brøken går mot 6.

Derfor har vi $0<f(x)<6$ for alle verdier av *x*, som skulle vises

c)

$$f''(x)=\frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^2-6e^{-x}\cdot 2\left(1+e^{-x}\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^4}$$

$$=\frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)+12e^{-2x}}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

$$=\frac{-6e^{-x}-6e^{-2x}+12e^{-2x}}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

$$=\frac{6e^{-2x}-6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

$$=\frac{6\left(e^{-x}-1\right)e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

$f''(x) = 0$ når $e^{-x} - 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
e^{-x} - 1 &= 0 \quad |\cdot e^x \\
1 - e^x &= 0 \\
e^x &= 1 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

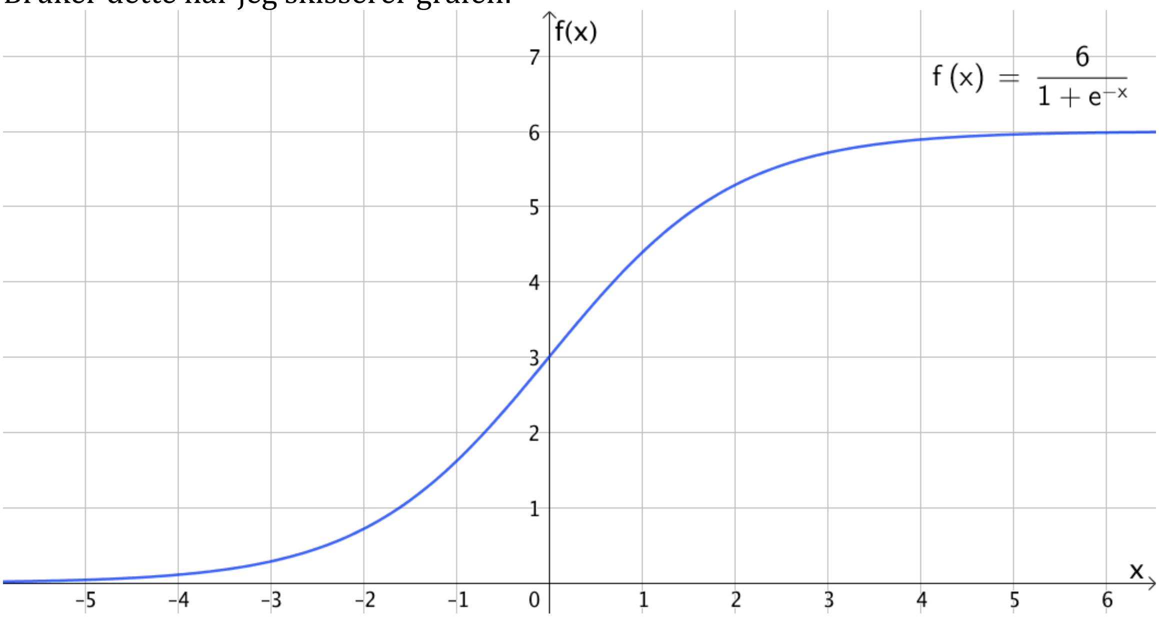
Den eneste faktoren i den andrederiverte som kan skifte fortegn er $e^{-x} - 1$.
Denne faktoren er positiv når $x < 0$ og negativ når $x > 0$.
Siden den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktet, vet vi at dette er et infleksjonspunkt.

$$f(0) = \frac{6}{1+e^0} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

Grafen til *f* har vendepunkt i (0,3) , som skulle vises

d) Vet at grafen alltid er stigende, at den har vendepunkt i (0,3) og at $0 < f(x) < 6$ for alle *x*.

Bruker dette når jeg skisserer grafen:




## Oppgave 7

a) Vi skal gjenta et forsøk flere ganger og se på om en hendelse inntreffer eller ikke. Sannsynligheten for at hendelsen inntreffer er lik i hvert forsøk, siden vi legger tilbake kula vi har trukket før vi trekker på nytt. Alle forsøkene er altså uavhengige av hverandre.

Da kan vi si at *X* er binomisk fordelt

b) $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{6}{10} = \underline{\underline{6}}$

$$Var(X) = n \cdot p(1-p) = 10 \cdot \frac{6}{10}\left(1 - \frac{6}{10}\right) = 6 \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \underline{\underline{2{,}4}}$$

## Oppgave 8

a)

$$\begin{aligned} P(0{,}9 < X < 1{,}1) &= P(X < 1{,}1) - P(X < 0{,}90) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1{,}1-1}{0{,}05}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0{,}9-1}{0{,}05}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{0{,}1}{0{,}05}\right) - P\left(Z < \frac{-0{,}1}{0{,}05}\right) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -2) \end{aligned}$$

Tabellen med standard normalfordeling gir da:

$$P(0{,}9 < X < 1{,}1) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 0{,}9544 \approx 95{,}4\%$$

<u>Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt rugbrød veier mellom 0,90 kg og 1,10 kg er 95,4 %</u>

b) Sentralgrensesetningen gir at vi kan anta at $X$ er normalfordelt, grunnet det store antallet rugbrød.

$$E(x) = n \cdot \mu = 100 \cdot 1{,}00 = 100$$

og standardavviket er $\sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{100} \cdot 0{,}05 = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$

$$\begin{aligned} P(99{,}5 < X < 100{,}5) &= P(X < 100{,}5) - P(X < 99{,}5) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100{,}5-100}{0{,}5}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{99{,}5-100}{0{,}5}\right) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \end{aligned}$$

Tabellen med standard normalfordeling gir da:

$$P(99{,}5 < X < 100{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826 \approx 68{,}3\%$$

<u>Sannsynligheten for at vekten av rugbrødene på en tilfeldig pall er mellom 99,5 kg og 100,5 kg, er 68,3%</u>

## Oppgave 9

$$g(x) = -5 \cdot f(x) + 3$$

$$gir$$

$$g'(x) = -5 \cdot f'(x)$$

Da vet vi at $g'(x) = 0$ når $f'(x) = 0$.
Siden grafen til *f* har toppunkt i (2,3) og bunnpunkt i (3-4), vet vi da at $g'(x) = 0$ når $x = 2 \vee x = 3$

Siden grafen til *f* har toppunkt i (2,3) og bunnpunkt i (3-4), vet vi også at $f'(x) < 0$ når $2 < x < 3$ og at $f'(x) > 0$ når $x < 2$ og når $x > 3$

Når $f'(x) < 0$, har vi $g'(x) > 0$ og når $f'(x) > 0$ har vi $g'(x) < 0$

$g'(x)$ skifter altså fortegn fra negativ til positiv når $x = 2$ og fra positiv til negativ når $x = 3$

$\left(2, g(2)\right)$ er et bunnpunkt på grafen til *g*, mens $\left(3, g(3)\right)$ er et topppunkt på grafen til *g*.

$$g(2) = -5 \cdot f(2) + 3 = -5 \cdot 3 + 3 = -12$$

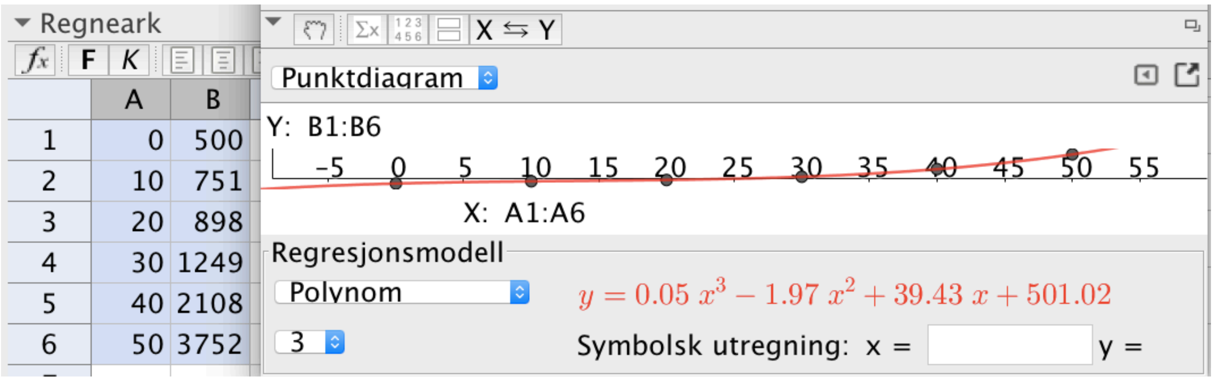
$$g(3) = -5 \cdot f(3) + 3 = -5 \cdot (-4) + 3 = 23$$

<u>Grafen til *g* har bunnpunkt (2,-12) og toppunkt (3,23)</u>

# Del 2

## Oppgave 1

a) Bruker regresjon til å komme frem til et uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$. Når funksjonsuttrykket til overskuddsfunksjonen er et tredjegradspolynom, må også funksjonsuttrykket til $K$ være et tredjegradspolynom.



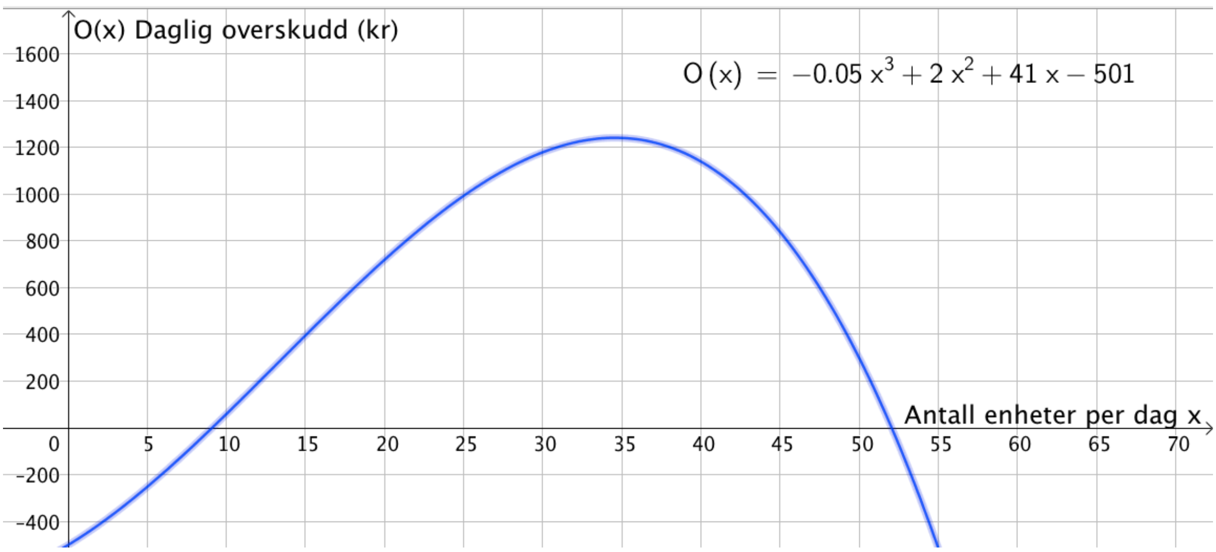

Regresjonsanalysen viser at vi kan sette $K(x) = 0{,}05x^3 - 2{,}0x^2 + 39x + 501$

Når bedriften får solgt hele produksjonsmengden for 80 kroner per enhet, har vi:

$$O(x) = I(x) - K(x) = 80x - \left(0{,}05x^3 - 2{,}0x^2 + 39x + 501\right) = -0{,}05x^3 + 2{,}0x^2 + 41x - 501$$

<u>Som skulle vises</u>

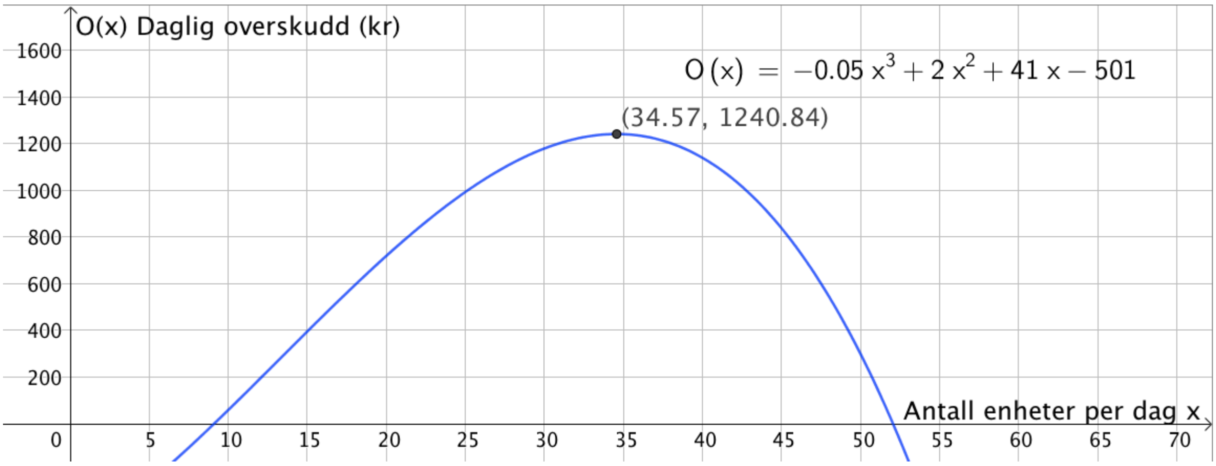
b)




c) Ekstremalpunktene til overskuddsfunksjonen sammenfaller med de verdiene av $x$ som gjør at grensekostnaden er lik grenseinntekten. Ser av utviklingen til grafen til $O$ at denne har et bunnpunkt for en $x$-verdi som er mindre enn null.

Siden det ikke gir mening å produsere et negativt antall enheter, tar vi her kun hensyn til den *x*-verdien som gir størst overskudd.

Finner toppunktet på grafen til *O* ved hjelp av "ekstremalpunkt"

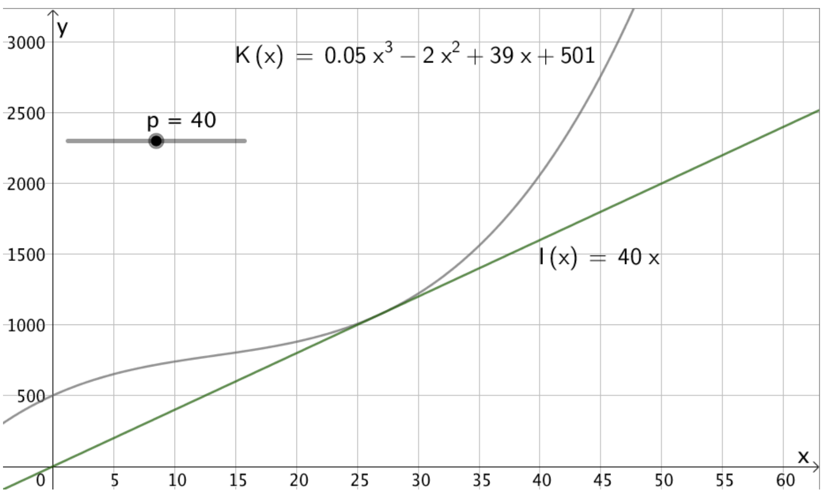



<u>En *gjennomsnittlig* daglig produksjonsmengde på 34,57 enheter gir at grensekostnaden er lik grenseinntekten</u>

Hvis vi ser på produksjonen fra dag til dag, istedenfor gjennomsnitt, må vi runde til hele tall og si 35 enheter per dag

d) Dersom bedriften setter prisen per enhet til *p* kroner, vil inntekstfunksjonen bli $I(x) = p \cdot x$
Kostnadsfunksjonen er uendret.

Tegner grafene til kostnadsfunksjonen og inntektsfunksjonen i samme koordinatsystem og lager en glider for *p* hvor $0 \leq p \leq 80$. Justerer så *p* til inntektsfunksjonen tangerer kostnadsfunksjonen.




<u>Den laveste prisen bedriften kan ta, og likevel unngå underskudd, er 40 kroner. Ser av grafen at bedriften da må produsere omtrent 27 enheter per dag.</u>

## Oppgave 2

a) Eirik skal gjøre 15 innskudd og får rente på alle innskuddene.
Da har vi $a_1 = 40000 \cdot 1{,}05$, $k = 1{,}05$ og $n = 15$, slik at den geometriske rekken blir slik:

$$40000 \cdot 1{,}05 + 40000 \cdot 1{,}05^2 + \cdots + 40000 \cdot 1{,}05^{15}$$

Bruker CAS til å bestemme summen av denne rekka:

CAS

1. Sum(40000*1.05^n, n, 1, 15)
   $\rightarrow \dfrac{742440690241985328321}{819200000000000}$
2. 742440690241985328321 / 819200000000000
   $\approx$ **906299.67**

Vi ser at summen blir 906 299,67, som skulle vises

b) Velger å se på problemstillingen som om Eivind hadde lånt 906 299,67 kroner, etter annuitetsprinsippet, med årlig rente på 5 % med 15 terminer og at det første terminbeløpet skal betales med én gang. Uttakene Eivind gjør, vil tilsvare terminbeløpet han måtte ha betalt om det var snakk om et lån.

Summen av nåverdiene til uttakene er 906 299,67 kroner.

CAS

1. x*((1/1.05)$^{15}$−1)/((1/1.05)−1)=906299.67
   Løs: $\left\{ x = \dfrac{293996356435066558549243527}{3535431858295168230100} \right\}$
2. {x = 293996356435066558549243527 / 3535431858295168230100}
   NLøs: $\{x = 83157.13\}$

Med alternativ 1, blir den årlige utbetalingen 83 157,13 kroner per år

c) Her må ikke utbetalingene være større enn at de årlige rentene kompenserer for uttaket.
Det må altså være like mye penger i fondet 1.juli 2034 som det var før første utbetaling 1.juli 2033

Hvis det skal være 906 299,67 kroner i fondet 1.juli 2034, må det være

$\dfrac{906299{,}67}{1{,}05}$ kroner i fondet rett etter uttaket 1.juli 2033.

Differansen mellom beløpet før og etter uttaket tilsvarer de årlige utbetalingene.

| CAS | |
|---|---|
| 1 | 906299.67−(906299.67/1.05) <br> $\rightarrow \frac{30209989}{700}$ |
| 2 | 30209989 / 700 <br> $\approx$ **43157.13** |

<u>Med alternativ II, blir de årlige utbetalingene 43 157,13 kroner</u>

d) Summen av nåverdiene til de fremtidige uttakene må være lik 906 299,67 kroner.

Finner ut hvor mange uttak han kan gjøre, inkludert det første uttaket.

| CAS | |
|---|---|
| 1 | k:=1.10/1.05 <br> $\rightarrow \mathbf{k} := \frac{22}{21}$ |
| 2 | 30000*(k^x−1)/(k−1)=906299.67 <br> Løs: $\left\{ x = \frac{-\ln(15625) - 6\ \ln(2) - \ln(21) + \ln(51209989)}{\ln(11) + \ln(2) - \ln(21)} \right\}$ |
| 3 | {x = (−ln(15625) − 6ln(2) − ln(21) + ln(51209989)) / (ln(11) + ln(2) − ln(21))} <br> $\approx$ **{x = 19.16}** |

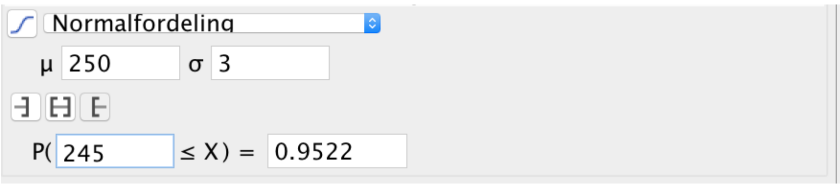
Eivind kan gjøre 20 uttak, der det siste er mindre enn de 19 første, før kontoen er tom.

Det første uttaket skjer 1.juli 2033, så det 20.uttaket må skje 1.juli 2052.

<u>Med alternativ III er kontoen tom etter uttaket 1.juli 2052</u>

## Oppgave 3

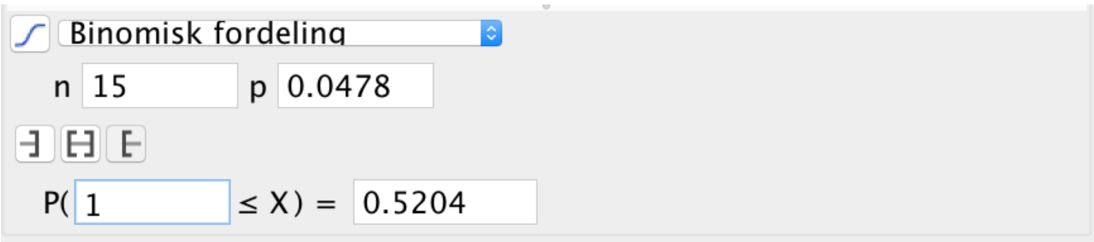
a) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.




$$P(X<245)=1-P(X\geq 245)=1-0{,}9522=0{,}0478\approx 4{,}8\%$$

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig flaske veier for lite er 4,8 %</u>

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

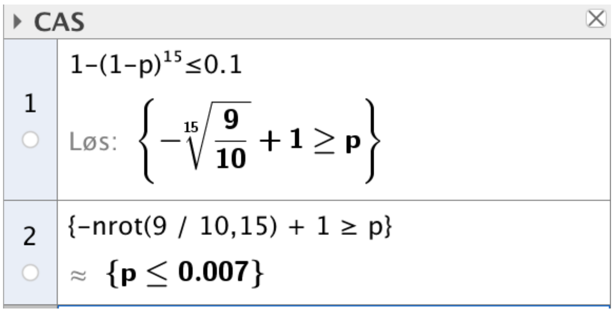



<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt eske inneholder minst én flaske som veier for lite, er 52 %</u>

c) $P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)$. Bedriften ønsker at $P(Y\geq 1)\leq 0{,}1$

$$1-P(Y=0)=1-\binom{15}{0}p^0(1-p)^{15}=1-(1-p)^{15}$$

Løser ulikheten $1-(1-p)^{15}\leq 0{,}1$ i CAS:




Vi ser at sannsynligheten må være høyst 0,070 % dersom målsetningen skal nås.

<u>Som skulle vises</u>

d) Vi antar at *X* er normalfordelt, så

$$P(X < 245) = 0{,}0070$$

$$gir$$

$$P\left(Z \leq \frac{245-\mu}{3}\right) = 0{,}0070$$

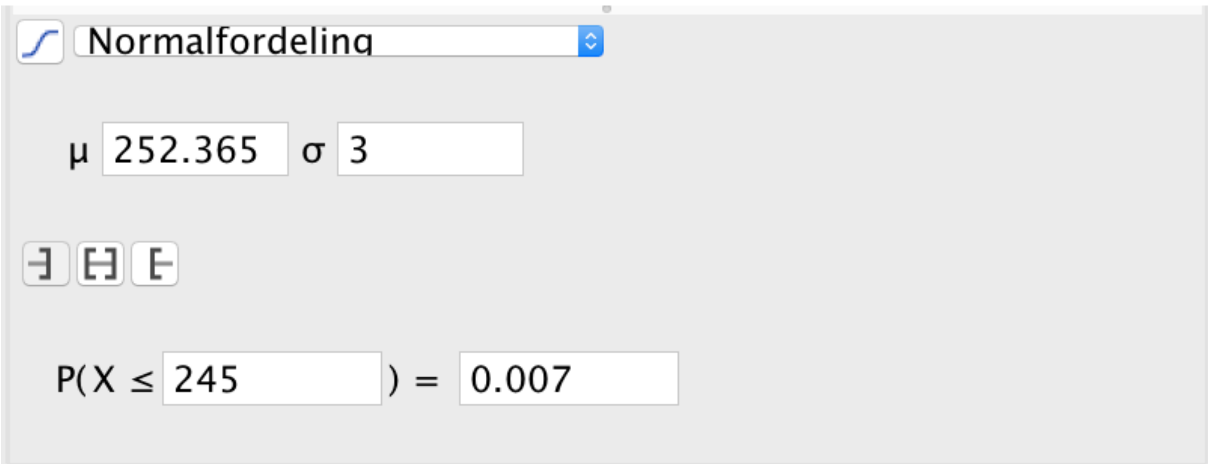
Bruker tabellen for standard normalfordeling og finner hvilken verdi $\frac{245-\mu}{3}$ må ha for at $P\left(Z \leq \frac{245-\mu}{3}\right) = 0{,}0070$.

Finner at vi må ha $\frac{245-\mu}{3} \approx -2{,}455$

Da har vi:

$$\begin{aligned}\frac{245-\mu}{3} &= -2{,}455 \\ 245-\mu &= -7{,}365 \\ \mu &= 245+7{,}365 \\ \mu &= 252{,}365\end{aligned}$$

Tester i GeoGebra:




<u>Forventningsverdien til *X* må være 252,365 g for at kravet i c) skal være oppfylt</u>