Løsningsforslag eksamen 1T våren 2018

Del 1

Oppgave 1

$$\begin{bmatrix} 5x+2y=4 \\ 3x+4y=-6 \end{bmatrix}$$

Bruker eliminasjon (også kalt addisjonsmetoden)
Trekker den øverste likningen fra den nederste to ganger:

$$3x+4y-2\left(5x+4y\right)=-6-2\cdot 4$$

$$\begin{aligned} 3x+4y-10x-4y&=-6-8 \\ -7x&=-14 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Setter inn $x=2$ i en av likningene:

$$\begin{aligned} 3\cdot 2+4y&=-6 \\ 6+4y&=-6 \\ 4y&=-6-6 \\ y&=-\frac{12}{4} \\ y&=-3 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x=2 \wedge y=-3}}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} 3\cdot 10^x&=3000 \\ 3\cdot 10^x&=3\cdot 10^3 \\ &\textit{så} \\ &\underline{\underline{x=3}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

$$\frac{\left(0{,}5\cdot 10^6\right)^2}{0{,}2\cdot 10^{-4}+3\cdot 10^{-5}}=\frac{\left(5\cdot 10^5\right)^2}{2\cdot 10^{-5}+3\cdot 10^{-5}}=\frac{5^2\cdot 10^{5\cdot 2}}{5\cdot 10^{-5}}=5\cdot 10^{10-(-5)}=\underline{\underline{5\cdot 10^{15}}}$$

Oppgave 4

$$\begin{aligned}\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{48} &= \sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3\cdot 16}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{16}\\ &= 5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Som skulle vises

Oppgave 5

$$\lg 1000\cdot\lg\sqrt[3]{10}\cdot\lg\sqrt[5]{10^2}\cdot\lg 0{,}00001=\lg 10^3\cdot\lg 10^{\frac{1}{3}}\cdot\lg 10^{\frac{2}{5}}\cdot\lg 10^{-5}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot(-5)=\underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 6

a) $x(x+2)(x-4)=(x^2+2x)(x-4)=x^3-4x^2+2x^2-8x=x^3-2x^2-8x$

Som skulle vises

b)

$$\begin{aligned}x^3-2x^2-8x&=0\\ x(x+2)(x-4)&=0\end{aligned}$$

så

$$\underline{\underline{x=-2\vee x=0\vee x=4}}$$

Oppgave 7

$$x^2-2x-8\geq 0$$

Ser at uttrykket på venstre side er uttrykket fra forrige oppgave, dividert med *x*, så kan si med én gang at: $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

Siden andregradskoeffisienten til uttrykket på venstre side er positiv, vet jeg at grafen til uttrykket er en parabel som vende den hule siden opp (smilemunn). Da vet jeg samtidig at verdien er går fra positiv til negativ og tilbake til positiv. Den er altså negativ "mellom" nullpunktene og positiv eller null ellers.

$$\underline{\underline{x^2-2x-8\geq 0 \text{ når } x\in\left\langle\leftarrow,-2\right]\cup\left[4,\rightarrow\right\rangle}}$$

Her ville det også vært helt naturlig å argumentere ved hjelp av fortegnslinjer.

Oppgave 8

Skjæringspunkter med *x*-aksen er det samme som nullpunkter, så må finne hvilken verdi av *k* som gir henholdsvis ingen, én og to løsninger av likningen $f(x)=0$

$$x^2+kx+4=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-16}}{2}$$

Likningen $f(x)=0$ har ingen løsning dersom $k^2-16<0$

$$k^2-16<0$$
$$k^2<16$$
$$gir$$
$$-4<k<4$$

Likningen $f(x)=0$ har én løsning dersom $k^2-16=0$

$$k^2-16=0$$
$$k^2=16$$
$$k=\pm 4$$

Likningen $f(x)=0$ har to løsninger dersom $k^2-16>0$

$$k^2-16>0$$
$$k^2>16$$
$$gir$$
$$k<-4\vee 4<k$$

- Grafen til *f* har ingen skjæringspunkter med *x*-aksen når $-4<k<4$
- Grafen til *f* har ett skjæringspunkt med *x*-aksen når $k=\pm 4$
- Grafen til *f* har to skjæringspunkter med *x*-aksen når $k<-4\vee 4<k$

Oppgave 9

a)

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}}=\frac{3x\left(x+2+\frac{1}{x}\right)}{3x\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}\right)}=\frac{3x^2+6x+3}{x^2-1}$$, som skulle vises

b)

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}} == \frac{3x^2+6x+3}{x^2-1} = \frac{3\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{3\left(x+1\right)^2}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{3\left(x+1\right)}{x-1} = \underline{\underline{\frac{3x+3}{x-1}}}$$

Oppgave 10

$$f(x)=x^3+2x^2+1$$

a)

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{2^3+2\cdot 2^2+1-\left((-2)^3+2(-2)^2+1\right)}{2+2}$$
$$=\frac{8+8+1-\left(-8+8+1\right)}{4}$$
$$=\frac{17-1}{4}$$
$$=\frac{16}{4}$$
$$=4$$

<u>Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet [-2,2] er 4</u>

b) $f(1)=1^3+2\cdot 1^2+1=1+2+1=4$, så tangeringspunktet er (1,4).

$f'(x)=3x^2+4x$, så $f'(1)=3\cdot 1^2+4\cdot 1=3+4=7$

Bruker ettpunktsformelen og finner likningen til tangenten:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$
$$y-4=7\left(x-1\right)$$
$$y=7x-7+4$$
$$\underline{\underline{y=7x-3}}$$

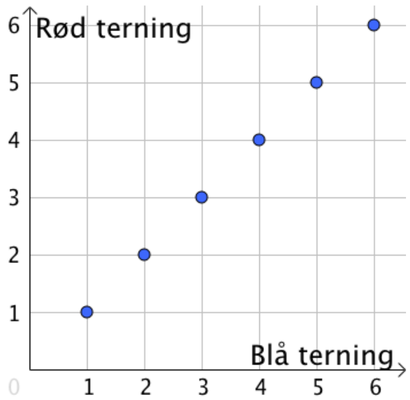
Oppgave 11

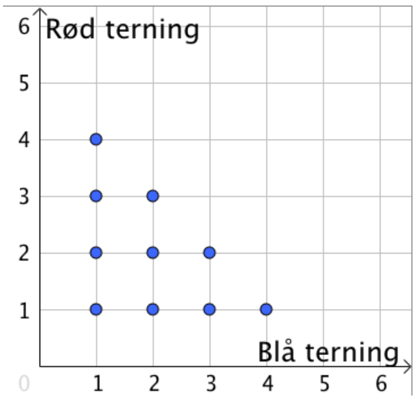
Antall mulige utfall ved kast av to terninger er 36. Sjekker hvor mange av disse 36 som er gunstige for hver av de to hendelsene. Den med flest gunstige utfall, er den mest sannsynlige.

Gunstige utfall for hendelsen "Terningene viser samme antall øyne":
(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)
I alt 6 gunstige utfall

Gunstige utfall for hendelsen "Summen av antall øyne er 5 eller mindre":
(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,2) (4,1)
I alt 10 gunstige utfall

Illustrasjoner på utfallsrommene til de to aktuelle hendelsene:





<u>"Summen av antall øyne er 5 eller mindre" er mest sannsynlig</u>

Oppgave 12

a) Pythagoras´ setning gir:

$$DC = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{4s^2}{4} - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3s^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{s^2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

<u>som skulle vises</u>

b)

$$\sin\angle A = \frac{DC}{s}$$

$$gir$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{s\sqrt{3}}{2}}{s} = \frac{2\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}}{2\cdot s} = \frac{s\sqrt{3}}{2s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Som skulle vises</u>

c) Bruker arealsetningen:

$$A_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$$

d)

$$\tan Q = \frac{SR}{SQ} = \frac{SR}{PQ - PS}$$

Resultatet i deloppgave a) gir $SR = \frac{PR \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$

Trekant PSR er en $30-60-90-$trekant, så $PS = \frac{PR}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Da har vi:

$$\tan Q = \frac{SR}{PQ - PS} = \frac{3}{8 - \sqrt{3}}$$

<u>som skulle vises</u>

Oppgave 13

- $p(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

  Har nullpunkt i origo og for $x = 2$, så <u>graf E tilhører funksjonen *p*.</u>

- $q(x) = x^2 + 2x - 2$

  Grafen til *q* vender hul side opp og krysser *y*-aksen i $(0,-2)$, så både graf C og graf D er mulige kandidater.

  Grafen til *q* er symmetrisk om symmetrilinja $x = \frac{-2}{2} = -1$, noe som samsvarer med graf C, så <u>graf C tilhører funksjonen *q*.</u>

- $r(x) = 4 - x^2 = (2-x)(2+x)$

  Grafen til *r* vender hul side ned og krysser *x* aksen i $(-2,0)$ og $(2,0)$, noe som samsvarer med graf F, så <u>graf F tilhører funksjonen *r*.</u>

- $s(x) = x^2 - 2x - 2$

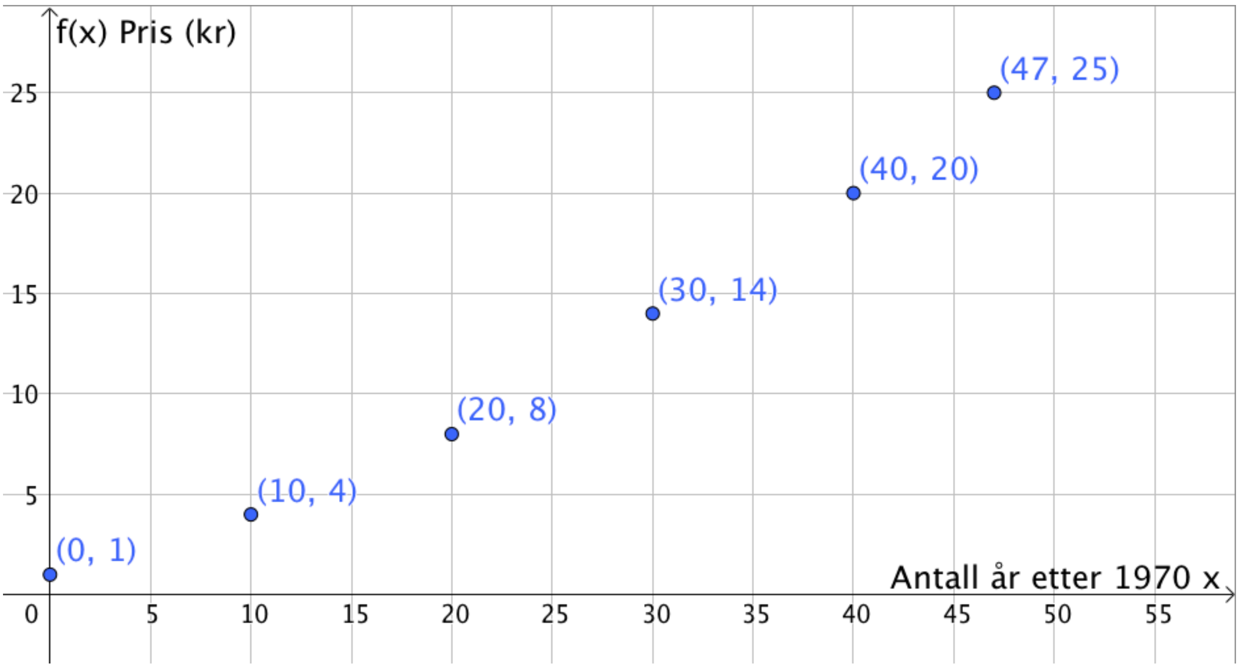
  Grafen til *s* vender hul side opp og krysser *y*-aksen i $(0,-2)$, så både graf C og graf D er mulige kandidater. Men vi vet allerede at graf C tilhører funksjonen q, så <u>det er graf D som tilhører funksjonen *s*.</u>

  (kan også vises at denne er symmetrisk om linja $x = 1$)

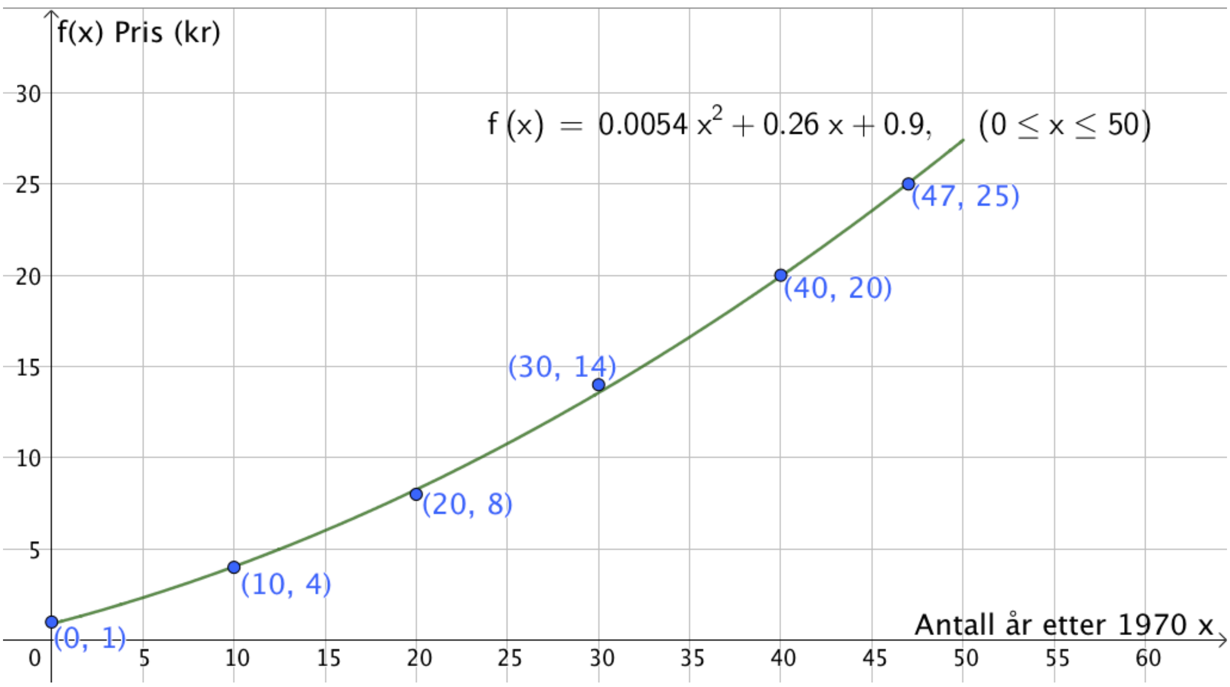
Del 2

Oppgave 1

a)

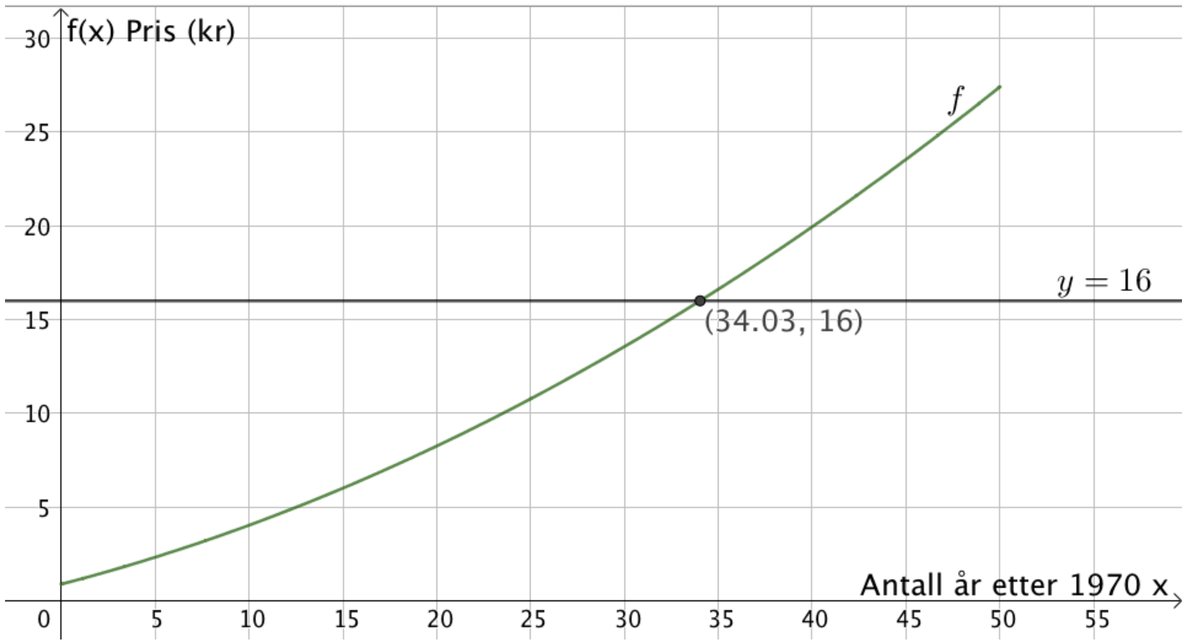


b)



c) Tegner linja $y = 16$ og finner skjæringspunktet mellom denne og grafen til f ved hjelp av ”skjæring mellom to objekt”.

(se neste side)



I følge modellen var prisen 16 kroner 34 år etter 1970, altså i 2004

d)

CAS

1	(f(45)−f(5))/(45−5) ✓ $\frac{f(45) - f(5)}{45 - 5}$
2	(f(45) − f(5)) / (45 − 5) → $\frac{53}{100}$
3	53 / 100 ≈ **0.53**

Prisen har, i gjennomsnitt, steget med 53 øre per år i tidsrommet 1975-2015

Oppgave 2

a) Velger å oppgi verdiene som desimaltall, istedenfor brøk.

	Legger seg før kl.23	Legger seg etter kl.23	Sum
Har karaktersnitt over 4	0,2	0,25	0,45
Har karaktersnitt på 4 eller mindre	0,05	0,5	0,55
sum	0,25	0,75	1

b) $P(\text{Karaktersnitt over } 4) = \underline{\underline{0{,}45 = 45\%}}$

c) $P(\text{Legger seg før kl.23} \mid \text{Karaktersnitt over } 4) = \dfrac{0{,}2}{0{,}45} = \underline{\underline{\dfrac{4}{9} \approx 44{,}4\%}}$

Oppgave 3

Bruker sinussetningen

CAS

1 s*sqrt(6)/sin(45°)=(s+6)/sin(180°−75°−45°)

Løs: $\{s = 3\}$

Ser at vi får løsningen $\underline{\underline{s = 3}}$

Oppgave 4

a) Definisjonen av cosinus gir:

$$\cos u = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \cos u$$

$$og$$

$$\cos v = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \cos v$$

<u>Som skulle vises</u>

b) Definisjonen av sinus gir:

$$\sin u = \frac{c_1}{a} \Rightarrow c_1 = a \cdot \sin u$$

$$og$$

$$\sin v = \frac{c_2}{b} \Rightarrow c_2 = b \cdot \sin v$$

Bruker dette, sammen med resultatet fra a), og får:

$$T = \frac{c_1 \cdot h}{2} + \frac{c_2 \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \sin u \cdot b \cdot \cos v}{2} + \frac{b \cdot \sin v \cdot a \cdot \cos u}{2}$$

<u>Som skulle vises</u>

c)

$$\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin(u+v)=\frac{a\cdot \sin u\cdot b\cdot \cos v}{2}+\frac{b\cdot \sin v\cdot a\cdot \cos u}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$a\cdot b\cdot \sin(u+v)=a\cdot \sin u\cdot b\cdot \cos v+b\cdot \sin v\cdot a\cdot \cos u \qquad |\cdot \frac{1}{ab}$$

$$\sin(u+v)=\sin u\cdot \cos v+\sin v\cdot \cos u$$

<u>Som skulle vises</u>

Oppgave 5

a)

CAS

1	f(x):=x²−6x+8 → $f(x) := x^2 - 6x + 8$
2	Tangent(4, f) → $y = 2x - 8$
3	Linje((2,f(2)), (6,f(6))) → $y = 2x - 4$

Ser at tangenten i punktet $(4, f(4))$ har samme stigningstall som linja gjennom punktene $(2, f(2))$ og $(6, f(6))$.
Det betyr at disse to linjene er parallelle, <u>som skulle vises</u>

b)

CAS

1	g(x):=a*x²+b*x+c → $g(x) := a x^2 + b x + c$
2	M:=((p+q)/2,g((p+q)/2)) → $M := \left(\frac{p+q}{2}, \frac{a p^2 + 2 a p q + a q^2 + 2 b p + 2 b q + 4 c}{4}\right)$
3	Tangent(M, g) → $y = -\frac{1}{4} a p^2 - \frac{1}{2} a p q + a p x - \frac{1}{4} a q^2 + a q x + b x + c$
4	Ser nærmere på alle leddene som inneholder x
5	a p x + a q x + b x → $a p x + a q x + b x$
6	a p x + a q x + b x Faktoriser: $(a p + a q + b)\, x$

<u>Stigningstallet til tangenten til grafen til g i punktet M er $ap+aq+b$</u>

c)

CAS	
1	g(x):=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ \mathbf{g(x)\ :=\ a\,x^2+b\,x+c}$
2	P:=(p,g(p)) $\rightarrow\ \mathbf{P\ :=\ \left(p, a\,p^2+b\,p+c\right)}$
3	Q:=(q,g(q)) $\rightarrow\ \mathbf{Q\ :=\ \left(q, a\,q^2+b\,q+c\right)}$
4	Linje(P, Q) $\rightarrow\ \mathbf{y = x\ (a\,p+a\,q+b)-a\,p\,q+c}$

Vi ser at linja gjennom P og Q har stigningstall $ap+aq+b$, som er samme stigningstall som tangenten i forrige deloppgave.

Linja gjennom punktene P og Q er parallell med tangenten til grafen til g i punktet M.

Som skulle vises