Løsningsforslag eksamen S1 våren 2018

Del 1

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
2x^2-5x+1&=x-3\\
2x^2-5x+1-x+3&=0\\
2x^2-6x+4&=0\\
x^2-3x+2&=0
\end{aligned}
$$

$$gir$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$$

$$så$$

$$\underline{\underline{x=1\vee x=2}}$$

b)

$$
\begin{aligned}
2\lg(x+7)&=4\\
\lg(x+7)&=2\\
10^{\lg(x+7)}&=10^2\\
x+7&=100\\
x&=100-7\\
\underline{\underline{x}}&\underline{\underline{=93}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
3\cdot2^{3x+2}&=12\cdot2^6 \quad |\cdot\frac{1}{3}\\
2^{3x+2}&=4\cdot2^6\\
2^{3x+2}&=2^2\cdot2^6\\
2^{3x+2}&=2^{6+2}\\
3x&=6\\
\underline{\underline{x}}&\underline{\underline{=2}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

$$I. \quad x^2+3y=7$$

$$II. \quad 3x-y=1 \Rightarrow y=3x-1$$

Setter II inn i I:

$$x^2+3(3x-1)=7$$
$$x^2+9x-3-7=0$$
$$x^2+9x-10=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{-9\pm 11}{2}$$
$$så$$
$$x=-10 \vee x=1$$

Setter inn i II:
$x=-10$ gir $y=3(-10)-1=-31$
og
$x=1$ gir $y=3\cdot 1-1=2$

$$\underline{\underline{x=-10\wedge y=-31 \quad \vee \quad x=1\wedge y=2}}$$

Oppgave 3

a) $(2x-3)^2-2x(2x-6)=4x^2-12x+9-4x^2+12x=\underline{\underline{9}}$

b)

$$\lg(2a)+\lg(4a)+\lg(8a)-\lg(16a)=\lg\left(\frac{2a\cdot 4a\cdot 8a}{16a}\right)$$
$$=\lg(4a^2)$$
$$=\lg(2a)^2$$
$$=\underline{\underline{2\lg(2a)}}$$

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a-b}{ab}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}-\frac{a-b}{ab}=\frac{b+a-a+b}{ab}=\frac{2b}{ab}=\frac{2}{\underline{\underline{a}}}$

Oppgave 4

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$
$$(x-2)(x-1) \geq 0$$

Nullpunktene er $x = 1$ og $x = 2$.
Uttrykket på venstre side er et andregradspolynom men positiv andregradskoeffisient, så grafen til dette uttrykket vil være en parabel som vender den hule siden opp. Da er verdien negativ mellom nullpunktene og positiv ellers.
(bortsett fra i selve nullpunktene, hvor verdien er null)

$$\underline{\underline{x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \text{når} \quad x \in \langle \leftarrow, 1] \cup [2, \rightarrow \rangle}}$$

Oppgave 5

a)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

b)

$$P(\text{Trekker tre blå kuler}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{35}}}$$

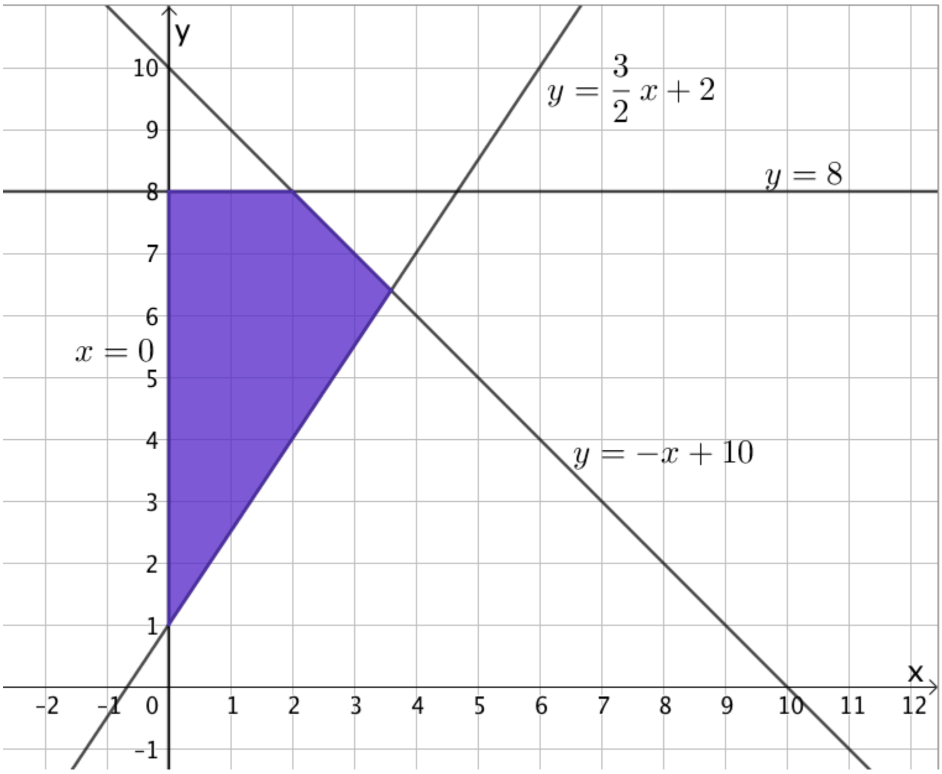
c) For å finne sannsynligheten for at det er både røde og blå kuler blant de tre kulene jeg trekker, finner jeg sannsynligheten for å trekke én eller to blå kuler. Lar X være antall blå kuler jeg trekker.

$$P(X=1) + P(X=2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 3}{35} = \frac{12 + 18}{35} = \frac{30}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

Oppgave 6

Området avgrenses av linjene $x = 0$ (altså y-aksen), $y = 8$, $y = -x + 10$ og $y = \frac{3}{2}x + 2$.

Tegner linjene og skraverer området som avgrenses av disse.



Oppgave 7

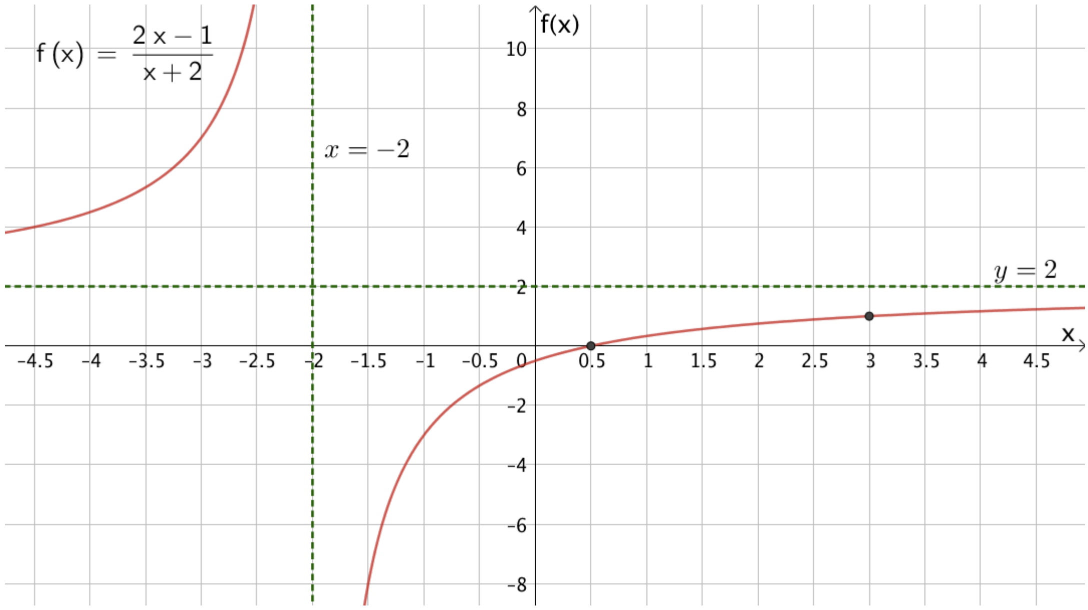
a) Finner først likningen for eventuelle asymptoter.

Nevneren er lik 0 når $x = -2$, så dette er likningen til den vertikale asymptoten.

Når x går mot $\pm\infty$ kan vi si $\frac{2x-1}{x+2} \approx \frac{2x}{x} = 2$, så $y = 2$ er likningen til den horisontale asymptoten.

$x = \frac{1}{2}$ er nullpunkt, $f(0) = -\frac{1}{2}$ og $f(3) = 1$, så da har jeg noen punkter i tillegg til asymptotene.

Skisserer grafen til *f*. (se neste side)



b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x-2 \\
\frac{2x-1}{x+2} &= x-2 \\
2x-1 &= (x-2)(x+2) \\
2x-1 &= x^2-4 \\
x^2-2x-3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$gir$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$$så$$

$$\underline{\underline{x = -1 \vee x = 3}}$$

Oppgave 8

a) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \Rightarrow g'(x) = \underline{\underline{6x^2 + 6x - 12 = 6\left(x^2 + x - 2\right)}}$

b)

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x+2)(x-1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$så$$

$$x = -2 \vee x = 1$$

Uttrykket for den deriverte av *g* forteller meg at grafen til den deriverte er en parabel som vender den hule siden opp. Den deriverte vil derfor skifte fortegn fra positivt til negativt når $x=-2$ og fra negativt til positivt når $x=1$.

Grafen til *g* har altså toppunkt i $\left(-2,g(-2)\right)$ og bunnpunkt i $\left(1,g(1)\right)$

$$g(-2)=2\left(-2\right)^3+3\left(-2\right)^2-12\left(-2\right)=-16+12+24=20$$
$$og$$
$$g(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1=2+3-12=-7$$

Grafen til *g* har toppunktet (-2, 20) og bunnpunktet (1, -7)

c)

$$\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{2\cdot 2^3+3\cdot 2^2-12\cdot 2-0}{2}=8+6-12=2$$

Den gjennomsnittlige vekstfarten til *g* i intervallet [0,2] er 2

d)

$$\begin{aligned} g'(x)&=24\\ 6\left(x^2+x-2\right)&=24\\ x^2+x-2&=4\\ x^2+x-6&=0\\ \left(x+3\right)\left(x-2\right)&=0\\ &så\\ &x=-3\vee x=2 \end{aligned}$$

$$g(-3)=2\left(-3\right)^3+3\left(-3\right)^2-12\left(-3\right)=-54+27+36=9$$

Vet fra oppgave c) at $g(2)=4$

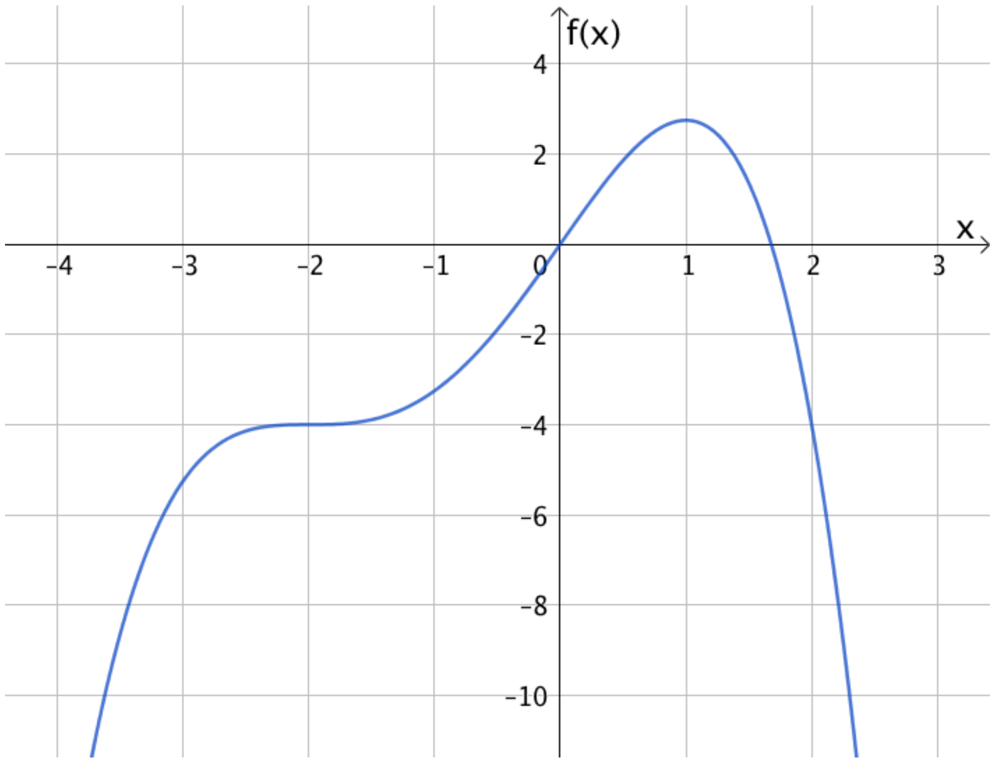
Den momentane vekstfarten er 24 i punktene (-3,9) og (2,4)

Oppgave 9

a) $f'(x)>0$ når $x\in\langle\leftarrow,2\rangle\cup\langle 2,1\rangle$ og $f'(x)<0$ når $x>1$

Grafen til *f* stiger når $x\in\langle\leftarrow,2\rangle\cup\langle 2,1\rangle$ og den synker når $x>1$

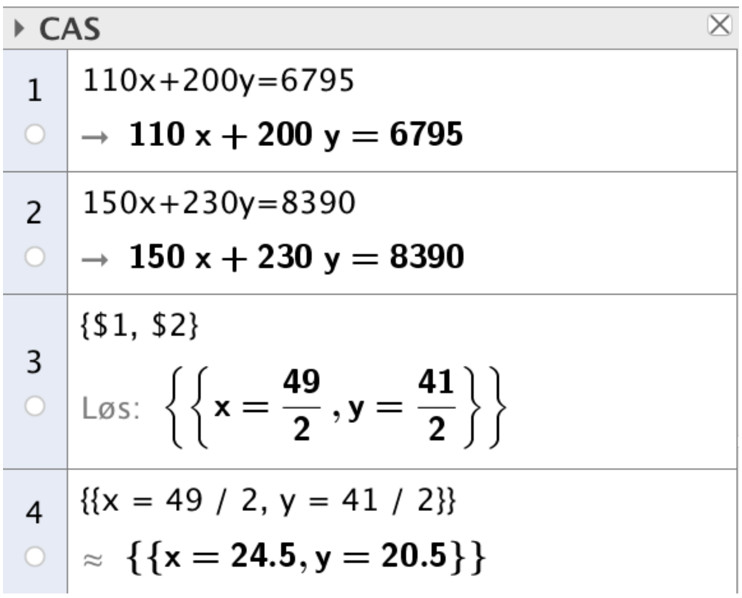
b) Grafen til *f* har terrassepunkt for $x=-2$ og toppunkt for $x=1$.
Den *kan* se slik ut:



Del 2

Oppgave 1

Lar *x* representere kiloprisen for torsk og *y* representere kiloprisen for sei.



<u>Einar fikk 24,50 kroner per kilo for torsk og 20,50 kroner per kilo for sei</u>

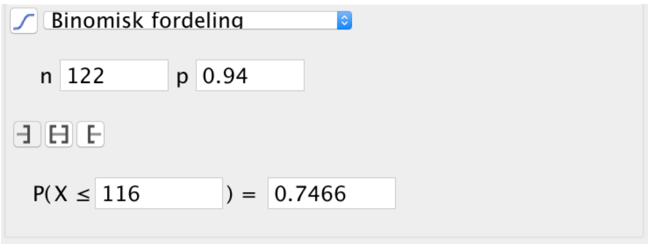
Oppgave 2

a) For å kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell her, må vi forutsette *uavhengighet*. I praksis ville vi kanskje tenke at dersom to personer har planlagt å reise sammen, men den ene blir syk og må avlyse, vil dette påvirke sannsynligheten for at også den andre personen lar være å møte opp til flyavgangen. Dette må vi se bort fra dersom vi skal bruke binomisk sannsynlighetsmodell. Det må altså alltid være 6 % sannsynlig at en hvilken som helst passasjer ikke møter opp, uavhengig av hva som skjer med andre passasjerer.

b) Her skal vi finne sannsynligheten for at *maksimalt* 116 av 122 passasjerer møter opp. Vi skal altså regne ut $P\left(X \leq 116\right)$.

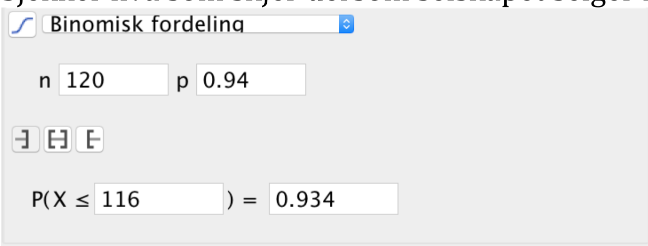
Siden sannsynligheten er 6 % for at en passasjer som har kjøpt billett ikke møter til flyavgang, vil sannsynligheten være 94 % for at passasjeren møter opp.

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

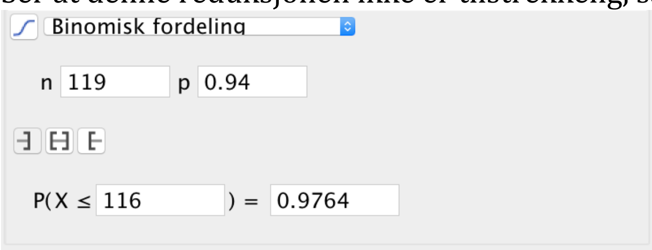


<u>Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er 74,66 %</u>

c) Sjekker hva som skjer dersom selskapet selger maksimalt 120 billetter:



Ser at denne reduksjonen ikke er tilstrekkelig, så går ned til 119:



Ser at denne reduksjonen vil føre til at sannsynligheten for at samtlige som møter skal få plass, vil være 97,64 %

<u>Flyselskapet må selge maksimalt 119 billetter dersom det skal være minst 95 % sannsynlig at alle som møter skal få plass på flyet</u>

Oppgave 3

a) Det gir ikke mening å produsere et negativt antall fuglekasser, så vi må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

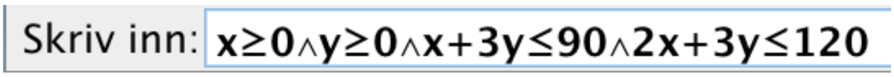
Frode kan jobbe 15 timer, altså 900 minutter, per uke.
Dette gir følgende ulikhet:
$10x + 30y \leq 900 \Leftrightarrow x + 3y \leq 90$

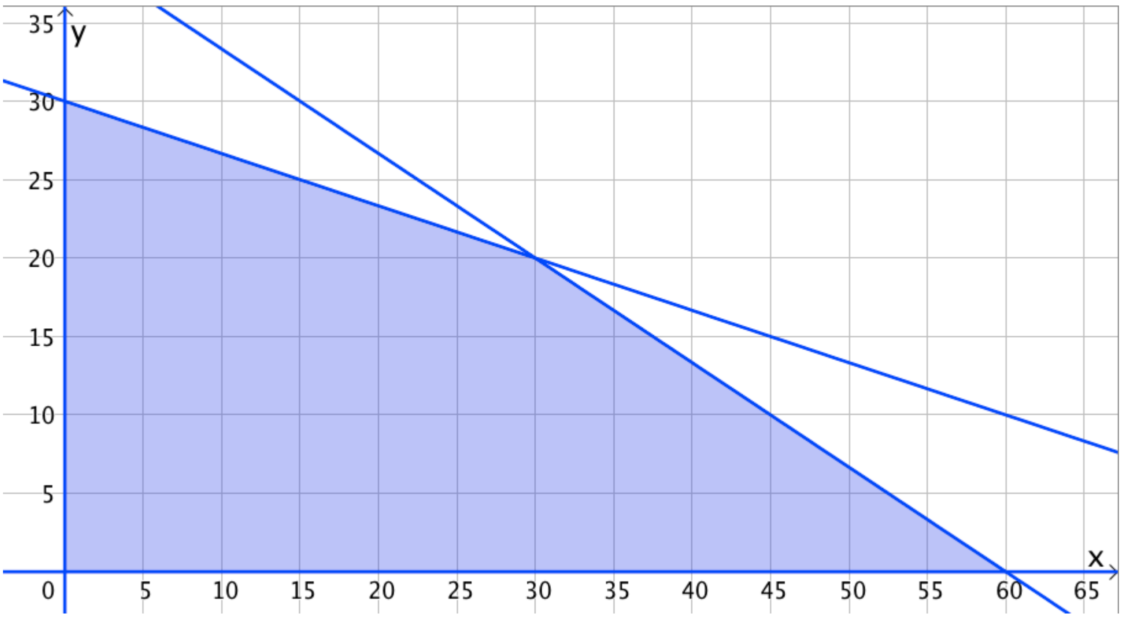
Peter kan jobbe 20 timer, altså 1200 minutter, per uke.
Dette gir følgende ulikhet:
$20x + 30y \leq 1200 \Leftrightarrow 2x + 3y \leq 120$

(ekvivalensene over fordrer at både x og y er positive, som avklart i starten)

x og y må ligger i området som er avgrenset av ulikhetene
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \leq 90$ og $2x + 3y \leq 120$, <u>som skulle forklares</u>

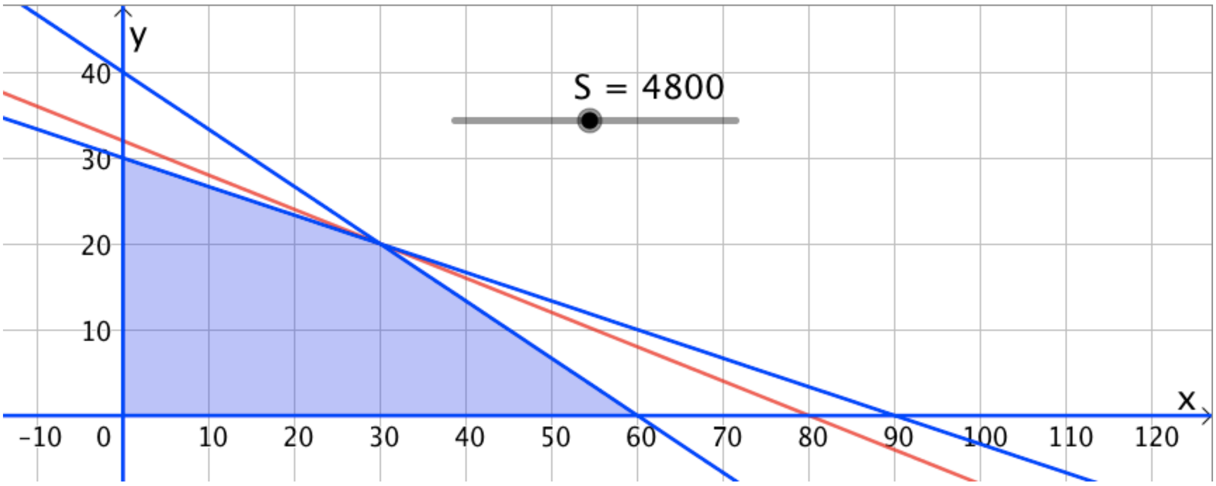
b) Skriver inn systemet av ulikheter i inntastingsfeltet GeoGebra:





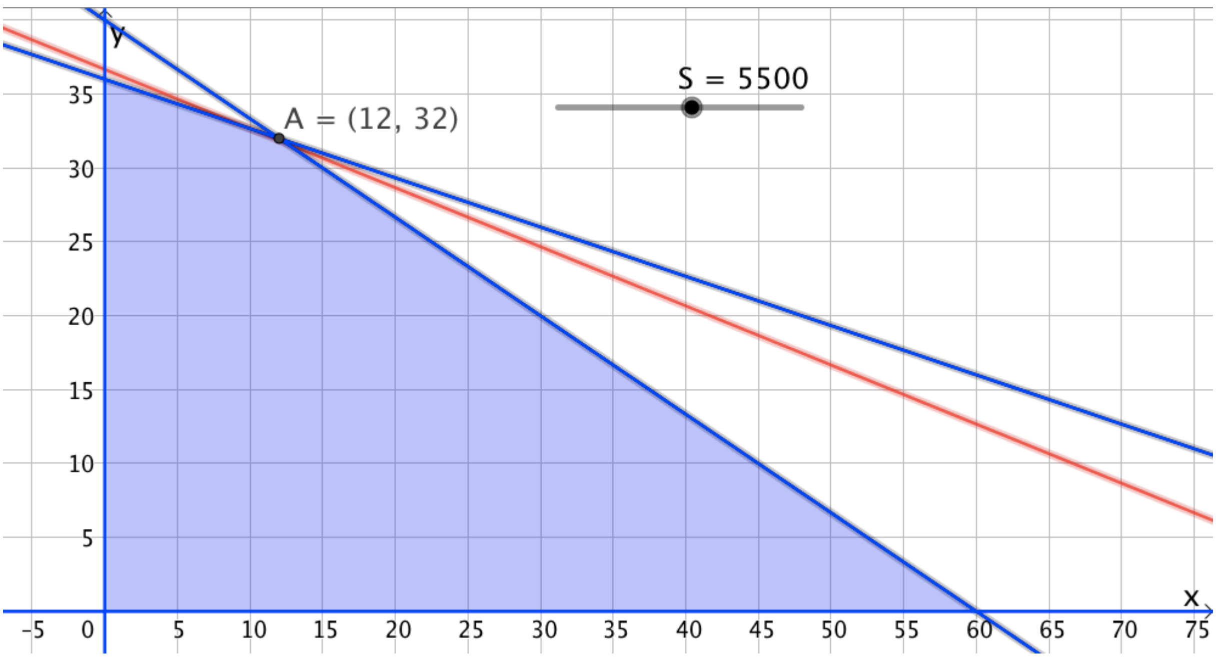
c) Lager en glider for et tall S og sier at $S = 60x + 150y$. Nå har jeg en nivålinje som kan justeres.
Justerer glideren og finner den nivålinja som går gjennom hjørnepunktet som gir størst verdi for $S(x, y)$.

<u>De bør produsere 30 kasser av type A og 20 av type B for størst mulig fortjeneste</u>
(se øverst neste side)



d) Når Frode kan jobbe 3 timer, altså 180 minutter, ekstra per uke, endres den ene ulikheten.
$10x + 30y \leq 900 \Leftrightarrow x + 3y \leq 90$ endres til $10x + 30y \leq 1080 \Leftrightarrow x + 3y \leq 108$

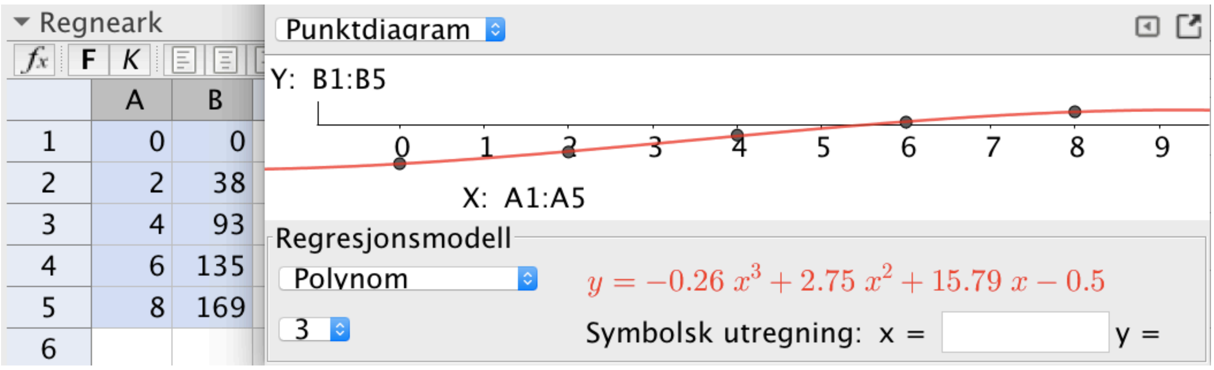
Gjør denne endringen i GeoGebra og justerer nivålinja på nytt.
Her er det ikke like enkelt å avgjøre koordinatene til alle hjørnepunktene, så tegner linjene $y = \dfrac{108 - x}{3}$ og $y = \dfrac{120 - 2x}{3}$ og finner skjæringspunktene mellom disse linjene ved hjelp av "skjæring mellom to objekt".



<u>Denne uken bør de produsere 12 fuglekasser av type A og 32 av type B</u>

Oppgave 4

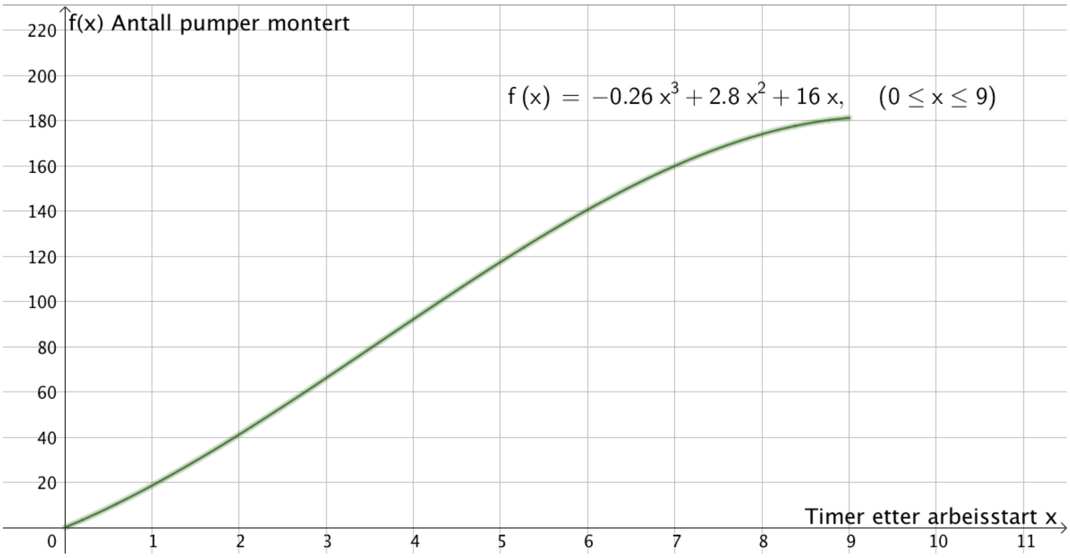
a) Legger inn verdiene i regneark i GeoGebra og velger regresjonsanalyse og polynommodell av 3.grad.



Informasjonen i tabellen gir følgende modell:

$$\underline{\underline{g(x) = -0{,}26x^3 + 2{,}75x^2 + 15{,}79x - 0{,}5}}$$

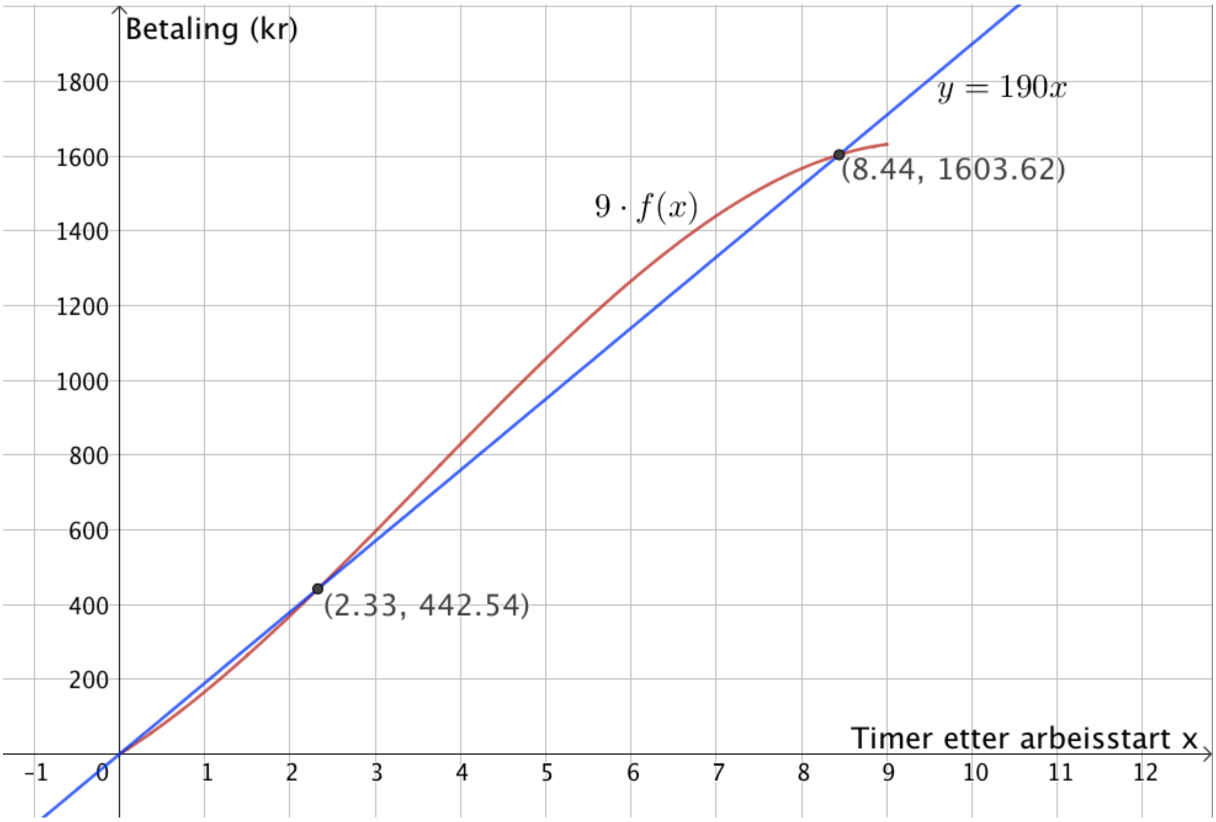
b)



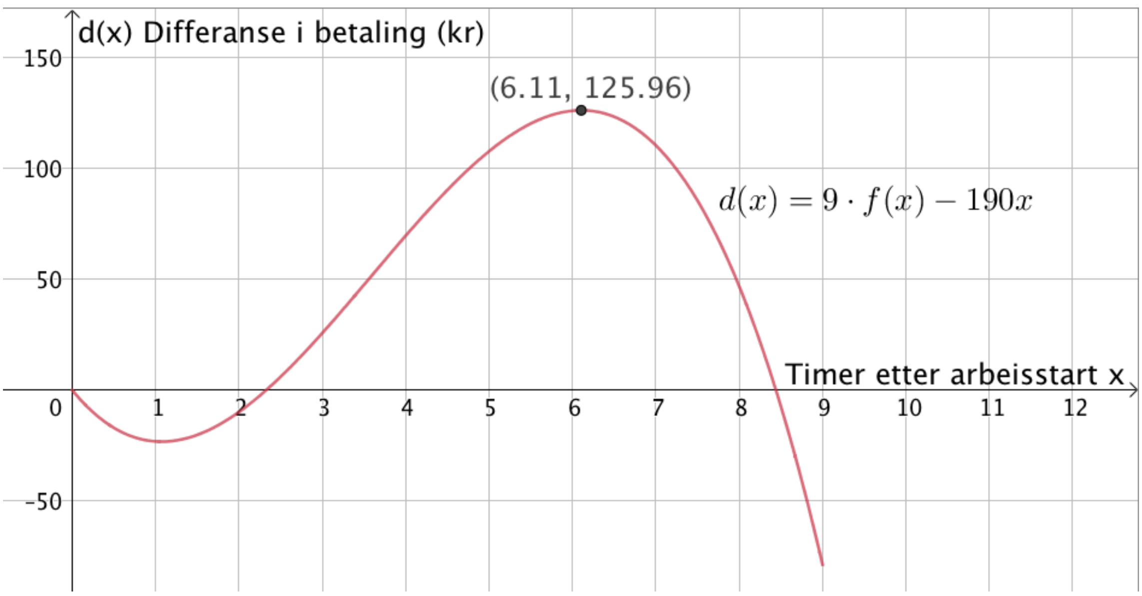
c) Tegner grafen til en funksjon definert som $9 \cdot f(x)$ sammen med linja $y = 190x$ og finner skjæringspunktene mellom disse ved hjelp av "skjæring mellom to objekt".

<u>Det vil lønne seg for Arne å velge betaling per montert pumpe dersom han jobber mellom 3 og 8 timer per dag, forutsatt at han betales for hele timer.</u>

Hvis ikke, vil det være mer nøyaktig å si mellom 2 timer og 20 minutter og 8 timer og 26 minutter
(se øverst neste side)



d) Tegner grafen til en funksjon $d(x)$, som er definert som differansen mellom betaling per pumpe og betaling per time. Finner toppunktet på denne ved hjelp av ”ekstremalpunkt”.



(Ser at absoluttverdien til differansen er større i toppunktet enn for $x = 9$)

<u>Forskjellen mellom lønnsalternativene er størst når Arne jobber 6 timer per dag</u>