Løsningsforslag eksamen R1 våren 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = x^4 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{4x^3 - 1}}$

b) $g(x) = x^3 \cdot \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 = \underline{\underline{x^2\left(3\ln(x)+1\right)}}$

c) $h(x) = e^{2x^2+x} \Rightarrow h'(x) = \underline{\underline{\left(4x+1\right)e^{2x^2+x}}}$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)}+\frac{2\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)}-\frac{2(x-2)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3}{2(x-3)} \\
&= \underline{\underline{\frac{3}{2x-6}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2\ln\left(x\cdot y^3\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) &= 2\left(\ln x+\ln y^3\right)-\frac{1}{2}\left(\ln x^4-\ln y^2\right) \\
&= 2\left(\ln x+3\ln y\right)-\frac{1}{2}\left(4\ln x-2\ln y\right) \\
&= 2\ln x+6\ln y-2\ln x+\ln y \\
&= \underline{\underline{7\ln y}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a)

$$\overrightarrow{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [-1+2, -3+1] = \underline{\underline{[1,-2]}}$$

$$og$$

$$\overrightarrow{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [3+1, -1+3] = \underline{\underline{[4,2]}}$$

b) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

og

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [1,-2] \cdot [4,2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

så

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, så $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, <u>som skulle vises</u>

c)

$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, der k er en konstant

$$\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[t-3, t^2+2-(-1)] = k \cdot [1,-2]$$

$$[t-3, t^2+3] = [k, -2k]$$

$$gir$$

$$t-3 = k \wedge t^2+3 = -2k$$

Erstatter k med $t-3$ i likningen til høyre

$$t^2+3 = -2(t-3)$$

$$t^2+3 = 6-2t$$

$$t^2+2t-3 = 0$$

$$gir$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2$$

$$så$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \text{ når } t = 1 \vee t = -3}}$$

Oppgave 4

$$f(x)=x^3+k\cdot x+12$$

a) Dersom divisjonen $f(x):(x-1)$ går opp, har vi $f(1)=0$

$$\begin{aligned} f(1)&=0 \\ 1^3+k\cdot 1+12&=0 \\ 1+k+12&=0 \\ &\underline{\underline{k=-13}} \end{aligned}$$

b) Siden det ikke er noe andregradsledd i funksjonsuttrykket til *f*, setter jeg inn $0x^2$ for oversiktlighet når jeg gjennomfører polynomdivisjonen.

$$\left(x^3+0x^2-13x+12\right):\left(x-1\right)=x^2+x-12$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3-x^2} \\ \quad x^2-13x+12 \\ \quad \underline{x^2-x} \\ \qquad -12x+12 \\ \qquad \underline{-12x+12} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Bruker ”sum og produkt” og finner at $x^2+x-12=\left(x+4\right)\left(x-3\right)$

Her kunne jeg også brukt abc-formelen til å finne nullpunktene

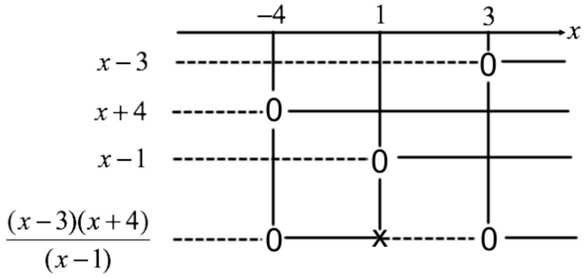
$$f(x)=\underline{\underline{(x-3)(x-1)(x+4)}}$$

c)

$$\frac{x^2+x-12}{x-1}\geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{(x-1)}\geq 0$$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{\frac{x^2+x-12}{x-1}\geq 0 \text{ når } x\in\left[-4,1\right\rangle\cup\left[3,\rightarrow\right\rangle}}$$

Oppgave 5

a) $P(\text{Laderen er fra leverandør A og er defekt}) = \frac{40}{100} \cdot \frac{3}{100} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{12}{1000} = \frac{1,2}{100} = \underline{\underline{1,2\%}}$

b) 60% av laderne er fra leverandør B, og av disse er 2% defekte. Det betyr at sannsynligheten for at en tilfeldig lader er fra leverandør B og defekt er 1,2%.

$$\left(\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{120}{10000} = \frac{1,2}{100} = 1,2\% \right)$$

Dette forteller oss at halvparten av de defekte laderne er fra leverandør A og halvparten er fra leverandør B.

<u>Sannsynligheten for at en lader som er defekt kommer fra leverandør A er 50%</u>

Her vil det også være naturlig å bruke total sannsynlighet og Bayes´ setning for å vise dette.

Oppgave 6

$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$

a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} u &= e^x \\ &\mathit{gir} \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \\ (u-1)(u-3) &= 0 \\ &\mathit{så} \\ u &= 1 \vee u = 3 \end{aligned}$$

Da har vi $e^x = 1 \vee e^x = 3$, som gir $x = \ln 1 = 0 \vee x = \ln 3$

$\underline{\underline{f \text{ har nullpunktene } x = 0 \text{ og } x = \ln 3}}$

b) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2(e^x - 2)e^x$

Siden $e^x > 0$ for alle x, har vi $f'(x) = 0$ når $e^x - 2 = 0$, altså når $x = \ln 2$

Bruker andrederiverttesten for å avgjøre om vi har topp- eller bunnpunkt
(må uansett bruke den andrederiverte i neste deloppgave)

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^{x} = 4\left(e^{x} - 1\right)e^{x}$$
$$så$$
$$f''(\ln 2) = 4\left(e^{\ln 2} - 1\right)e^{\ln 2} = 4\left(2 - 1\right)\cdot 2 = 8$$

$f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$ når $x = \ln 2$, så $\left(\ln 2, f(\ln 2)\right)$ er et bunnpunkt på grafen til *f*.

$$f(\ln 2) = e^{2\cdot\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 = \left(e^{\ln 2}\right)^2 - 4\cdot 2 + 3 = 2^2 - 8 + 3 = -1$$

$$\underline{\underline{\left(\ln 2, -1\right) \text{ er bunnpunkt på grafen til } f}}$$

c)

$$f''(x) = 0$$
$$4\left(e^{x} - 1\right)e^{x} = 0$$

Siden $e^{x} > 0$ for alle *x*, har vi $f''(x) = 0$ når $e^{x} - 1 = 0$, altså når $x = 0$

Sjekker om den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktet, for å avgjøre om det er snakk om vendepunkt på grafen til *f*.

$$f''(-1) = 4e^{2(-1)} - 4e^{-1} = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e}$$
$$så$$
$$f''(-1) < 0$$

og

$$f''(1) = 4e^{2\cdot 1} - 4e^{1} = 4e^{2} - 4e$$
$$så$$
$$f''(1) > 0$$

Siden den andrederiverte skrifter fortegn i nullpunktet vet vi da at $\left(0, f(0)\right)$ er et vendepunkt på grafen til *f*.

$$f(0) = e^{2\cdot 0} - 4e^{0} + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

<u>Grafen til *f* har vendepunkt i origo</u>

d) Markerer nullpunkter, bunnpunkt og vendepunkt på grafen til f i et koordinatsystem. Her tar jeg i bruk tilnærmingsverdiene som er oppgitt i oppgaveteksten.

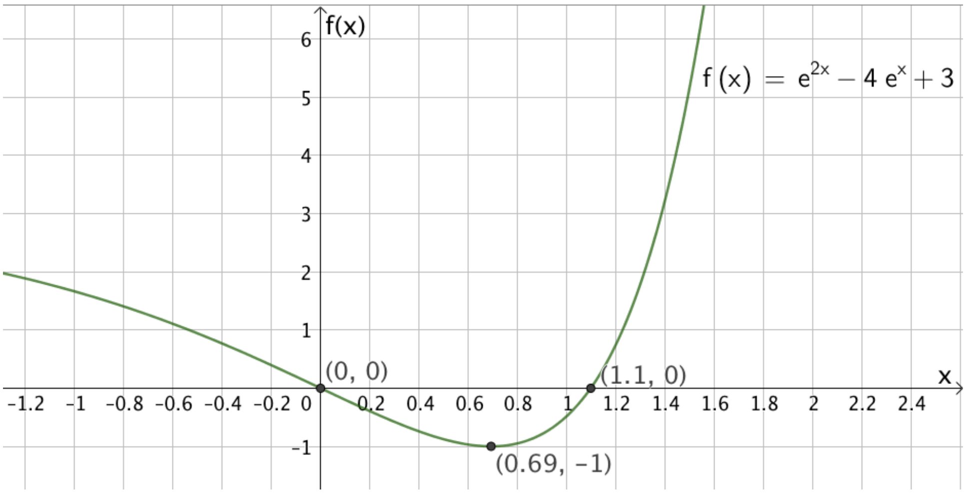
Bunnpunkt: $(\ln 2, -1) \approx (0{,}69\ ,\ -1)$

Nullpunkter: Origo og $(\ln 3, 0) \approx (1{,}10\ ,\ 0)$

Når x er negativ og beveger seg mot minus uendelig, vil leddene som i funksjonsuttrykket til f som inneholder e^x, gå mot 0, slik at verdien til $f(x)$ vil nærme seg 3.

Når x er positiv og vokser, vil verdien til $f(x)$ stige raskt.

Skisserer grafen:



Oppgave 7

a) Man har her laget tre nye trekanter ved å i hvert tilfelle multiplisere *alle* sidene i den opprinnelige trekanten med henholdsvis *c*, *b* og *a*. Det betyr at alle de tre nye trekantene er formlike med den opprinnelige trekanten. Da må de også være formlike med hverandre.

De tre trekantene er formlike, <u>som skulle begrunnes</u>

b) Vi vet at $\angle ADB = 90^\circ$, så må vise at $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$, slik at $\angle EDC = 180^\circ$. Da vet vi i så fall at *E, D* og *C* ligger på en rett linje.

Trekant *EDA* er rettvinklet, så vet at $\angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$.
$\angle DAE$ i trekant *EDA* er samsvarende med vinkel $\angle BDC$ i trekant *CBD*, så disse to vinklene må være like store.
Da har vi at $\angle ADE + \angle BDC = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$, slik at $\angle EDC = 180^\circ$

Siden $\angle EDC = 180^\circ$, må *E, D* og *C* ligge på en rett linje, <u>som skulle begrunnes</u>

c) Har allerede vist at *E, D* og *C* ligger på en rett linje. Vet at $\angle E = \angle C = 90°$, så sidene *AE* og *BC* er parallelle og står normalt på siden *EC*. Vi ser også at *AE* og *BC* er like lange, med lengde *ab.* Da må også sidene *EC* og *AB* være parallelle og like lange.
Siden firkanten *ABCE* har sider som er parvis parallelle, parvis like lange og to av de parallelle sidene står normalt på de to andre, vet vi at firkanten er et rektangel, <u>som skulle forklares</u>

Sidene *EC* og *AB* er like lange, så vi kan si:

$$EC = AB$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Når vi nå ser på trekanten som er utgangspunkt for oppgaven, ser vi at dette tilsvarer at summen av kvadratene til katetene i en rettvinklet trekant er lik kvadratet til hypotenusen, så Pytagoras´ setning gjelder.

Del 2

Oppgave 1

a) $\angle DCB$ er en periferivinkel som spenner over sirkelbuen $\overset{\frown}{BD}$.
Størrelsen til sentralvinkelen som spenner over den samme buen er $360° - u$.
Periferivinkelsetningen sier at en periferivinkel vil være halvparten så stor som en sentralvinkel som spenner over samme bue.

$\angle DCB = \frac{1}{2}\left(360° - u\right) = 180° - \frac{1}{2}u$, <u>som skulle forklares</u>

b) $\angle BAD$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som sentralvinkelen *u*, så $\angle BAD = \frac{1}{2}u$.

Da har vi $\angle BAD + \angle DCB = \frac{1}{2}u + 180° - \frac{1}{2}u = 180°$

Vinkelsummen i firkant *ABCD* er $360°$.

$$\begin{aligned}
\angle BAD + \angle DCB + \angle CBA + \angle ADC &= 360° \\
\angle CBA + \angle ADC &= 360° - \left(\angle BAD + \angle DCB\right) \\
\angle CBA + \angle ADC &= 360° - 180° \\
\angle CBA + \angle ADC &= 180°
\end{aligned}$$

så
$\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180°$, <u>som skulle vises</u>

Her kunne vi alternativt argumentert med at summen av de to siste vinkene *må* være 180 grader når vi har funnet at summen av de to første er 180 grader, siden vinkelsummen i en firkant er 360 grader, uten å vise så "formelt" som jeg har gjort på slutten her.

Oppgave 2

a) Setter inn *x*- og *y*-koordinatene til de tre punktene i sirkellikningen som er oppgitt og får et likningssystem av tre likninger med tre ukjente:

	CAS
1	3^2+8^2+a*3+b*8+c=0 → $3\,a + 8\,b + c + 73 = 0$
2	9^2+6^2+a*9+b*6+c=0 → $9\,a + 6\,b + c + 117 = 0$
3	13^2+(-2)^2+a*13+b*(-2)+c=0 → $13\,a - 2\,b + c + 173 = 0$

Likningene i rad 1, 2 og 3 utgjør likningssystemet.

b)

	CAS
1	3^2+8^2+a*3+b*8+c=0 → $3\,a + 8\,b + c + 73 = 0$
2	9^2+6^2+a*9+b*6+c=0 → $9\,a + 6\,b + c + 117 = 0$
3	13^2+(-2)^2+a*13+b*(-2)+c=0 → $13\,a - 2\,b + c + 173 = 0$
4	{$1, $2, $3} Løs: $\{\{a = -6, b = 4, c = -87\}\}$

$$\underline{\underline{a = -6 \wedge b = 4 \wedge c = -87}}$$

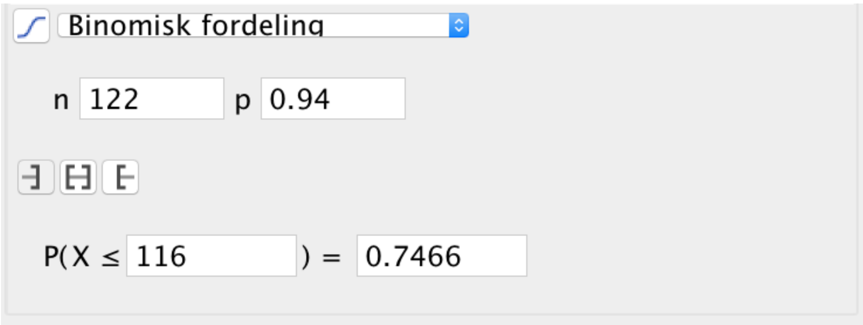
Oppgave 3

a) For å kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell her, må vi forutsette *uavhengighet*. I praksis ville vi kanskje tenke at dersom to personer har planlagt å reise sammen, men den ene blir syk og må avlyse, vil dette påvirke sannsynligheten for at også den andre personen lar være å møte opp til flyavgangen. Dette må vi se bort fra dersom vi skal bruke binomisk sannsynlighetsmodell. Det må altså alltid være 6 % sannsynlig at en hvilken som helst passasjer ikke møter opp, uavhengig av hva som skjer med andre passasjerer.

b) Her skal vi finne sannsynligheten for at *maksimalt* 116 av 122 passasjerer møter opp. Vi skal altså regne ut $P\left(X \leq 116\right)$.

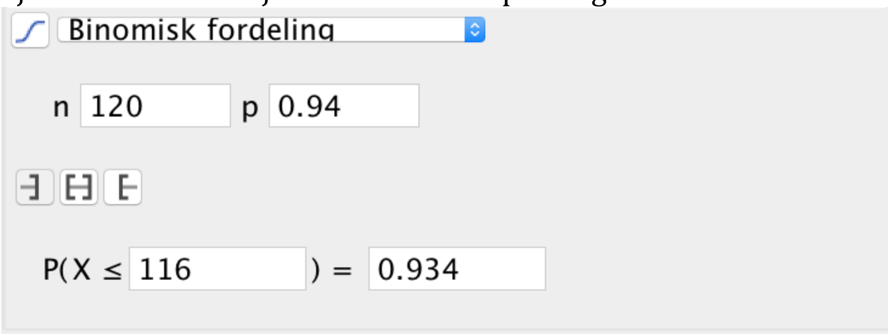
Siden sannsynligheten er 6 % for at en passasjer som har kjøpt billett ikke møter til flyavgang, vil sannsynligheten være 94 % for at passasjeren møter opp.

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

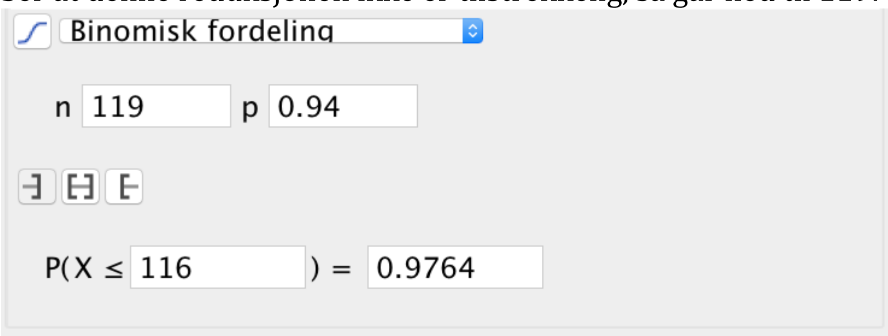


<u>Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er 74,66 %</u>

c) Sjekker hva som skjer dersom selskapet selger maksimalt 120 billetter:



Ser at denne reduksjonen ikke er tilstrekkelig, så går ned til 119:



Ser at denne reduksjonen vil føre til at sannsynligheten for at samtlige som møter skal få plass, vil være 97,64 %

<u>Flyselskapet må selge maksimalt 119 billetter dersom det skal være minst 95 % sannsynlig at alle som møter skal få plass på flyet</u>

Oppgave 4

a) Den samlede veilengden vil være $x+4s$, så må finne et uttrykk for *s*.
Ser at trekant *CDF* og trekant *ABE* er kongruente, så de har lik høyde, som er gitt ved $\dfrac{10-x}{2}$.
Siden trekantene er likebeinte kan jeg nå finne et uttrykk for *s* ved hjelp av Pytagoras´ setning.

s er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter 5 og $\dfrac{10-x}{2}$

CAS

1 s:=sqrt(5²+((10−x)/2)²)

$\rightarrow\ s := \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

Da kan jeg finne et uttrykk for $g(x)$

3 g(x):=x+4s

$\rightarrow\ g(x) := x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

En liten omskriving gir:

$g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200} = x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 100 + 100} = x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}$,
som skulle vises

Alternativt kan vi skrive inn uttrykket slik det står i oppgaveteksten og se at vi får like uttrykk i CAS:

3 g(x):=x+4s

$\rightarrow\ g(x) := x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

4 x+2*sqrt((10−x)²+10²)

$\rightarrow\ x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

b)

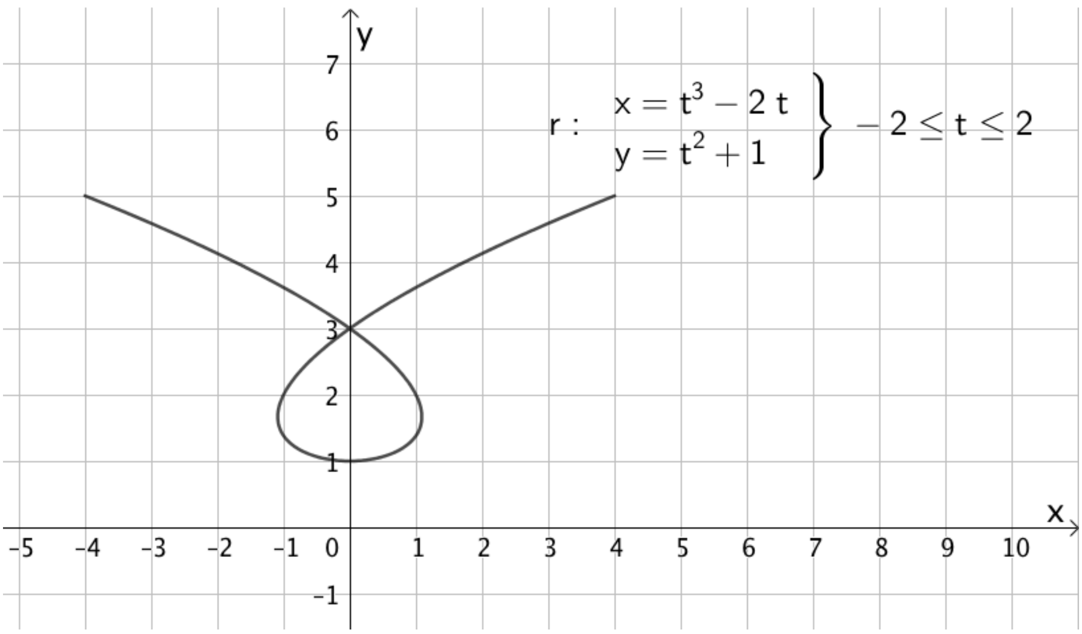
4	Ekstremalpunkt(g) $\rightarrow \left\{ \left(\frac{-10\sqrt{3}+30}{3}, 10\sqrt{3}+10 \right) \right\}$
5	{((−10 sqrt(3) + 30) / 3, 10sqrt(3) + 10)} $\approx$ **{(4.23, 27.32)}**
6	g"(4.23) $\approx$ **0.13**

Finner ekstremalpunkt i rad 4, og avrundede verdier i rad 5.
I rad 6 gjennomfører jeg andrederiverttest for å avgjøre at det er snakk om et bunnpunkt.

<u>Den samlede veilengden blir minst når *x* er 4,23 km. Da er den samlede veilengden 27,32 km</u>

Oppgave 5

a) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)" og tegner grafen.



b)

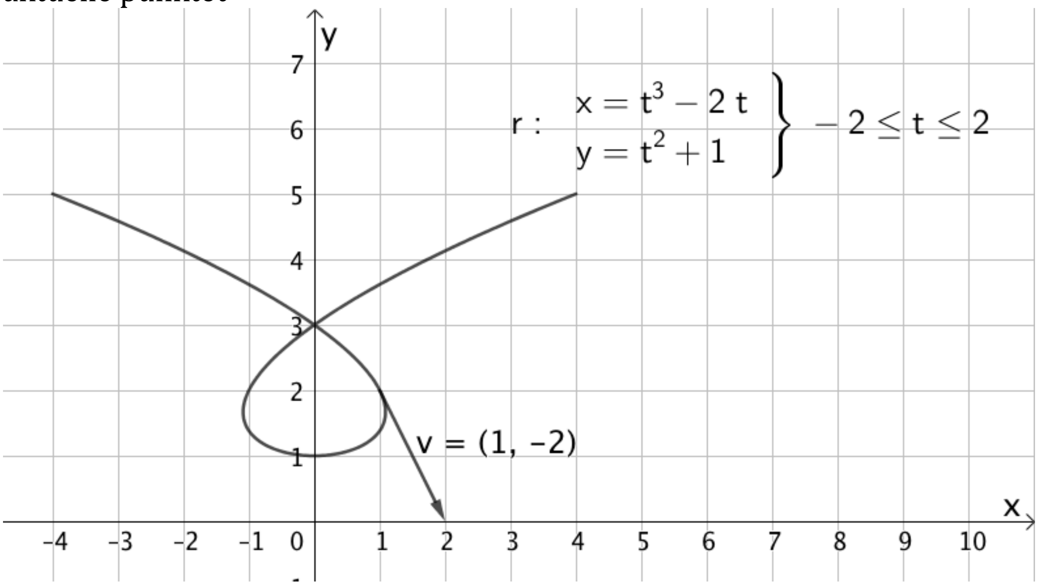
$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [3t^2 - 2, 2t]$$

$$\vec{v}(-1) = [3(-1)^2 - 2, 2(-1)] = [3-2, -2] = \underline{\underline{[1, -2]}}$$

$$og$$

$$|\vec{v}(-1)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Skriver inn *" Vektor(r(-1), r(-1)+r'(-1))"* og tegner fartsvektoren inn på grafen det aktuelle punktet



c)

CAS

1. v(t):=Vektor(3t²−2,2t)
   $\rightarrow \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2t \end{pmatrix}$

2. abs(v)=2
   Løs: $\left\{ t = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}, t = 0, t = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$

3. {t = −2 sqrt(2) / 3, t = 0, t = 2sqrt(2) / 3}
   $\approx \{t = -0.94, t = 0, t = 0.94\}$

Banefarten er 2 når $\underline{\underline{t = -0{,}94 \vee t = 0 \vee t = 0{,}94}}$

d)

CAS

1	v(t):=Vektor(3t²−2,2t) $\rightarrow \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} 3\,t^2 - 2 \\ 2\,t \end{pmatrix}$
2	a(t):=v'(t) $\rightarrow \mathbf{a(t)} := \begin{pmatrix} 6\,t \\ 2 \end{pmatrix}$
3	a*v=0 Løs: $\left\{t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3}\right\}$
4	Definerer absoluttverdien til fartsvektoren som en funksjon h
5	h(t):=abs(v) $\rightarrow \mathbf{h(t)} := \sqrt{9\,t^4 - 8\,t^2 + 4}$
6	h'(t)=0 Løs: $\left\{t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3}\right\}$

I rad 3 finner vi de verdiene av *t* som gjør at fartsvektoren står normalt på akselerasjonsvektoren.

I rad 6 finner vi at de samme verdiene for *t* gir oss ekstremalverdiene til banefarten til partikkelen, som skulle vises