

Løsningsforslag eksamen R1 våren 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = x^4 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{4x^3 - 1}}$

b) $g(x) = x^3 \cdot \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 = \underline{\underline{x^2(3\ln(x) + 1)}}$

c) $h(x) = e^{2x^2+x} \Rightarrow h'(x) = \underline{\underline{(4x+1)e^{2x^2+x}}}$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-2)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3}{2(x-3)} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2x-6}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2\ln(x \cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) &= 2(\ln x + \ln y^3) - \frac{1}{2}(\ln x^4 - \ln y^2) \\ &= 2(\ln x + 3\ln y) - \frac{1}{2}(4\ln x - 2\ln y) \\ &= 2\ln x + 6\ln y - 2\ln x + \ln y \\ &= \underline{\underline{7\ln y}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a)

$$\overrightarrow{AB} = [-1 - (-2), -3 - (-1)] = [-1 + 2, -3 + 1] = \underline{\underline{[1, -2]}}$$

og

$$\overrightarrow{BC} = [3 - (-1), -1 - (-3)] = [3 + 1, -1 + 3] = \underline{\underline{[4, 2]}}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

og

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

så

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \text{ så } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}, \text{ som skulle vises}$$

c)

$$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ der } k \text{ er en konstant}$$

$$\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[t - 3, t^2 + 2 - (-1)] = k \cdot [1, -2]$$

$$[t - 3, t^2 + 3] = [k, -2k]$$

gir

$$t - 3 = k \wedge t^2 + 3 = -2k$$

Erstatter k med $t - 3$ i likningen til høyre

$$t^2 + 3 = -2(t - 3)$$

$$t^2 + 3 = 6 - 2t$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

gir

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2$$

så

$$\underline{\underline{\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \text{ når } t = 1 \vee t = -3}}$$

Oppgave 4

$$f(x) = x^3 + k \cdot x + 12$$

- a) Dersom divisjonen $f(x) : (x-1)$ går opp, har vi $f(1) = 0$

$$f(1) = 0$$

$$1^3 + k \cdot 1 + 12 = 0$$

$$1 + k + 12 = 0$$

$$\underline{\underline{k = -13}}$$

- b) Siden det ikke er noe andregradsledd i funksjonsuttrykket til f , setter jeg inn $0x^2$ for oversiktighet når jeg gjennomfører polynomdivisjonen.

$$(x^3 + 0x^2 - 13x + 12) : (x - 1) = x^2 + x - 12$$

$$\underline{x^3 - x^2}$$

$$x^2 - 13x + 12$$

$$\underline{x^2 - x}$$

$$-12x + 12$$

$$\underline{-12x + 12}$$

$$0$$

Bruker "sum og produkt" og finner at $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$

Her kunne jeg også brukt abc-formelen til å finne nullpunktene

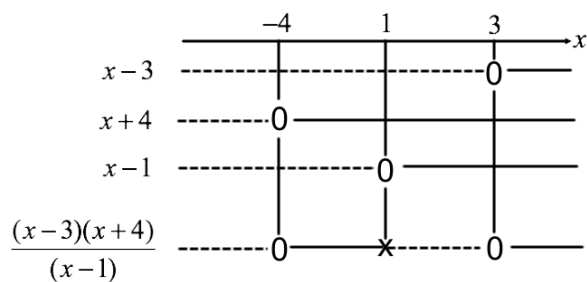
$$f(x) = \underline{\underline{(x - 3)(x - 1)(x + 4)}}$$

- c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 1)} \geq 0$$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{\frac{x^2 + x - 12}{x - 1} \geq 0 \text{ når } x \in [-4, 1) \cup [3, \rightarrow]}}$$

Oppgave 5

$$a) P(\text{Laderen er fra leverandør A og er defekt}) = \frac{40}{100} \cdot \frac{3}{100} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{12}{1000} = \frac{1,2}{100} = \underline{\underline{1,2\%}}$$

- b) 60% av laderne er fra leverandør B, og av disse er 2% defekte. Det betyr at sannsynligheten for at en tilfeldig lader er fra leverandør B og defekt er 1,2%.

$$\left(\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{120}{10000} = \frac{1,2}{100} = 1,2\% \right)$$

Dette forteller oss at halvparten av de defekte laderne er fra leverandør A og halvparten er fra leverandør B.

Sannsynligheten for at en lader som er defekt kommer fra leverandør A er 50%

Her vil det også være naturlig å bruke total sannsynlighet og Bayes' setning for å vise dette.

Oppgave 6

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$$

$$a) e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

$$u = e^x$$

gir

$$u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$(u-1)(u-3) = 0$$

så

$$u = 1 \vee u = 3$$

Da har vi $e^x = 1 \vee e^x = 3$, som gir $x = \ln 1 = 0 \vee x = \ln 3$

f har nullpunktene $x = 0$ og $x = \ln 3$

$$b) f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2(e^x - 2)e^x$$

Siden $e^x > 0$ for alle x , har vi $f'(x) = 0$ når $e^x - 2 = 0$, altså når $x = \ln 2$

Bruker andrederiverttesten for å avgjøre om vi har topp- eller bunnpunkt
(må uansett bruke den andrederiverte i neste deloppgave)

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x = 4(e^x - 1)e^x$$

så

$$f''(\ln 2) = 4(e^{\ln 2} - 1)e^{\ln 2} = 4(2 - 1) \cdot 2 = 8$$

$f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$ når $x = \ln 2$, så $(\ln 2, f(\ln 2))$ er et bunnpunkt på grafen til f .

$$f(\ln 2) = e^{2 \ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 = (e^{\ln 2})^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 2^2 - 8 + 3 = -1$$

$(\ln 2, -1)$ er bunnpunkt på grafen til f

c)

$$f'' = 0$$

$$4(e^x - 1)e^x = 0$$

Siden $e^x > 0$ for alle x , har vi $f'' = 0$ når $e^x - 1 = 0$, altså når $x = 0$

Sjekker om den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktet, for å avgjøre om det er snakk om vendepunkt på grafen til f .

$$f''(-1) = 4e^{2(-1)} - 4e^{-1} = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e}$$

så

$$f''(-1) < 0$$

og

$$f''(1) = 4e^{2 \cdot 1} - 4e^1 = 4e^2 - 4e$$

så

$$f''(1) > 0$$

Siden den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktet vet vi da at $(0, f(0))$ er et vendepunkt på grafen til f .

$$f(0) = e^{2 \cdot 0} - 4e^0 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

Grafen til f har vendepunkt i origo

- d) Markerer nullpunkter, bunnpunkt og vendepunkt på grafen til f i et koordinatsystem. Her tar jeg i bruk tilnærningsverdiene som er oppgitt i oppgaveteksten.

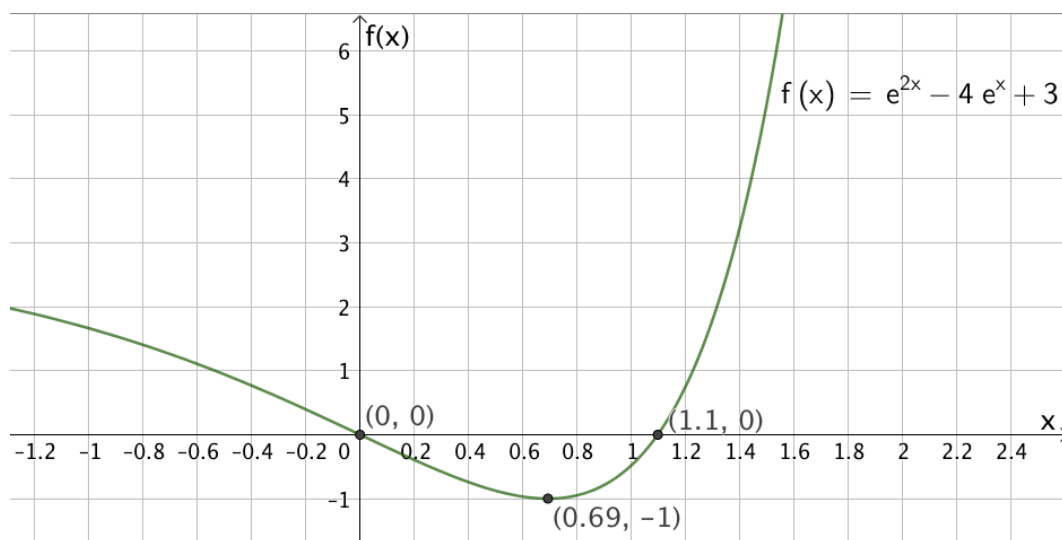
Bunnpunkt: $(\ln 2, -1) \approx (0,69, -1)$

Nullpunkter: Origo og $(\ln 3, 0) \approx (1,10, 0)$

Når x er negativ og beveger seg mot minus uendelig, vil leddene som i funksjonsuttrykket til f som inneholder e^x , gå mot 0, slik at verdien til $f(x)$ vil nærme seg 3.

Når x er positiv og vokser, vil verdien til $f(x)$ stige raskt.

Skisserer grafen:



Oppgave 7

- a) Man har her laget tre nye trekanter ved å i hvert tilfelle multiplisere *alle* sidene i den opprinnelige trekanten med henholdsvis c , b og a . Det betyr at alle de tre nye trekantene er formlike med den opprinnelige trekanten. Da må de også være formlike med hverandre.

De tre trekantene er formlike, som skulle begrunnes

- b) Vi vet at $\angle ADB = 90^\circ$, så må vise at $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$, slik at $\angle EDC = 180^\circ$. Da vet vi i så fall at E , D og C ligger på en rett linje.

Trekant EDA er rettvinklet, så vet at $\angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$.

$\angle DAE$ i trekant EDA er samsvarende med vinkel $\angle BDC$ i trekant CBD , så disse to vinklene må være like store.

Da har vi at $\angle ADE + \angle BDC = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$, slik at $\angle EDC = 180^\circ$

- Siden $\angle EDC = 180^\circ$, må E , D og C ligge på en rett linje, som skulle begrunnes
- c) Har allerede vist at E , D og C ligger på en rett linje. Vet at $\angle E = \angle C = 90^\circ$, så sidene AE og BC er parallelle og står normalt på siden EC . Vi ser også at AE og BC er like lange, med lengde ab . Da må også sidene EC og AB være parallelle og like lange.

Siden firkanten $ABCE$ har sider som er parvis parallelle, parvis like lange og to av de parallelle sidene står normalt på de to andre, vet vi at firkanten er et rektangel, som skulle forklares

Sidene EC og AB er like lange, så vi kan si:

$$EC = AB$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Når vi nå ser på trekanten som er utgangspunkt for oppgaven, ser vi at dette tilsvarer at summen av kvadratene til katetene i en rettvinklet trekant er lik kvadratet til hypotenusen, så Pytagoras' setning gjelder.

Del 2

Oppgave 1

- a) $\angle DCB$ er en periferivinkel som spenner over sirkelbuen \widehat{BD} . Størrelsen til sentralvinkelen som spenner over den samme buen er $360^\circ - u$. Periferivinkelsetningen sier at en periferivinkel vil være halvparten så stor som en sentralvinkel som spenner over samme bue.

$$\angle DCB = \frac{1}{2}(360^\circ - u) = 180^\circ - \frac{1}{2}u, \text{ som skulle forklares}$$

- b) $\angle BAD$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som sentralvinkelen u , så $\angle BAD = \frac{1}{2}u$.

$$\text{Da har vi } \angle BAD + \angle DCB = \frac{1}{2}u + 180^\circ - \frac{1}{2}u = 180^\circ$$

Vinkelsummen i firkant $ABCD$ er 360° .

$$\angle BAD + \angle DCB + \angle CBA + \angle ADC = 360^\circ$$

$$\angle CBA + \angle ADC = 360^\circ - (\angle BAD + \angle DCB)$$

$$\angle CBA + \angle ADC = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$$

så

$$\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180^\circ, \text{ som skulle vises}$$

Her kunne vi alternativt argumentert med at summen av de to siste vinkene *må* være

180 grader når vi har funnet at summen av de to første er 180 grader, siden vinkelsummen i en firkant er 306 grader, uten å vise så "formelt" som jeg har gjort på slutten her.

Oppgave 2

- a) Setter inn x- og y-koordinatene til de tre punktene i sirkellikningen som er oppgitt og får et likningssystem av tre likninger med tre ukjente:

CAS	
1	$3^2 + 8^2 + a \cdot 3 + b \cdot 8 + c = 0$ $\rightarrow 3a + 8b + c + 73 = 0$
2	$9^2 + 6^2 + a \cdot 9 + b \cdot 6 + c = 0$ $\rightarrow 9a + 6b + c + 117 = 0$
3	$13^2 + (-2)^2 + a \cdot 13 + b \cdot (-2) + c = 0$ $\rightarrow 13a - 2b + c + 173 = 0$

Likningene i rad 1, 2 og 3 utgjør likningssystemet.

b)

CAS	
1	$3^2 + 8^2 + a \cdot 3 + b \cdot 8 + c = 0$ $\rightarrow 3a + 8b + c + 73 = 0$
2	$9^2 + 6^2 + a \cdot 9 + b \cdot 6 + c = 0$ $\rightarrow 9a + 6b + c + 117 = 0$
3	$13^2 + (-2)^2 + a \cdot 13 + b \cdot (-2) + c = 0$ $\rightarrow 13a - 2b + c + 173 = 0$
4	$\{\$1, \$2, \$3\}$ Løs: $\{\{a = -6, b = 4, c = -87\}\}$

$$\underline{\underline{a = -6 \wedge b = 4 \wedge c = -87}}$$

Oppgave 3

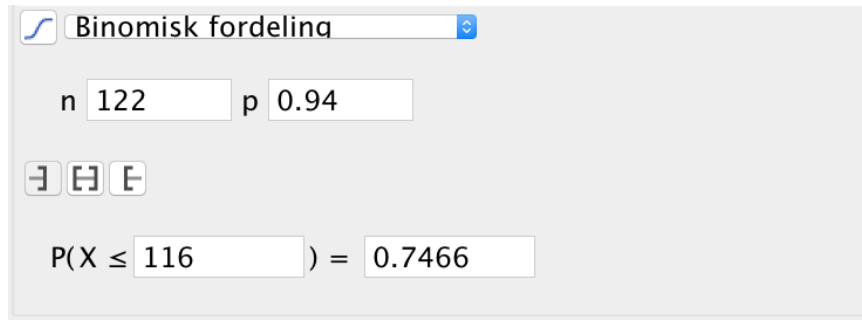
- a) For å kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell her, må vi forutsette *uavhengighet*. I praksis ville vi kanskje tenke at dersom to personer har planlagt å reise sammen, men den ene blir syk og må avlyse, vil dette påvirke sannsynligheten for at også den andre personen lar være å møte opp til flyavgangen. Dette må vi se bort fra dersom vi skal bruke binomisk sannsynlighetsmodell. Det må altså alltid være 6 % sannsynlig at en hvilken som

helst passasjer ikke møter opp, uavhengig av hva som skjer med andre passasjerer.

- b) Her skal vi finne sannsynligheten for at *maksimalt* 116 av 122 passasjerer møter opp. Vi skal altså regne ut $P(X \leq 116)$.

Siden sannsynligheten er 6 % for at en passasjer som har kjøpt billett ikke møter til flyavgang, vil sannsynligheten være 94 % for at passasjerer møter opp.

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



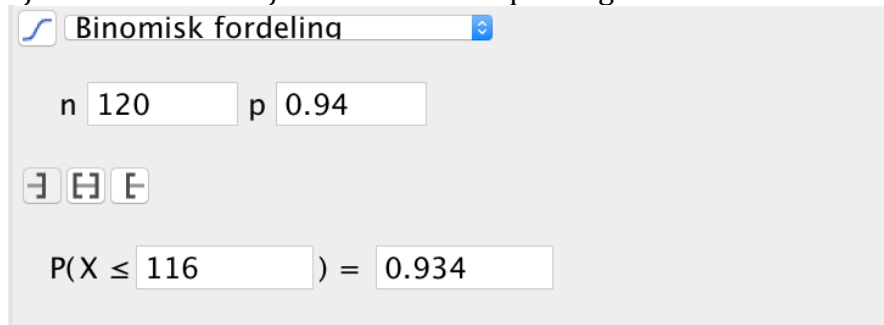
Binomisk fordeling

n 122 p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.7466$

Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er 74,66 %

- c) Sjekker hva som skjer dersom selskapet selger maksimalt 120 billetter:

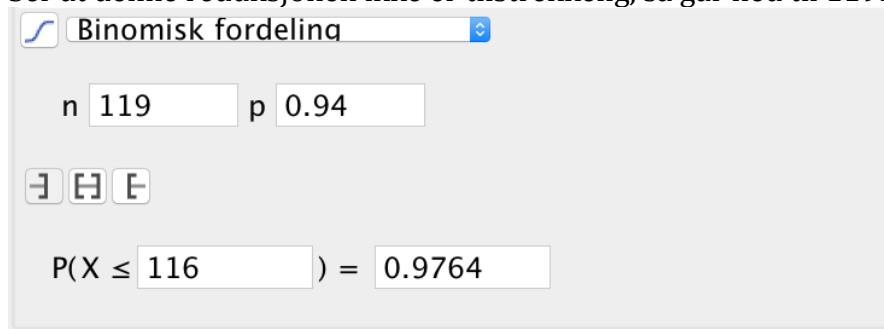


Binomisk fordeling

n 120 p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.934$

Ser at denne reduksjonen ikke er tilstrekkelig, så går ned til 119:



Binomisk fordeling

n 119 p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.9764$

Ser at denne reduksjonen vil føre til at sannsynligheten for at samtlige som møter skal få plass, vil være 97,64 %

Flyelskapet må selge maksimalt 119 billetter dersom det skal være minst 95 % sannsynlig at alle som møter skal få plass på flyet

Oppgave 4

- a) Den samlede veilengden vil være $x + 4s$, så må finne et uttrykk for s .
Ser at trekant CDF og trekant ABE er kongruente, så de har lik høyde, som er gitt ved $\frac{10-x}{2}$.

Siden trekantene er likebeinte kan jeg nå finne et uttrykk for s ved hjelp av Pytagoras' setning.

s er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter 5 og $\frac{10-x}{2}$

CAS	
1	$s := \text{sqrt}(5^2 + ((10-x)/2)^2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow s := \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 20x + 200}$

Da kan jeg finne et uttrykk for $g(x)$

3	$g(x) := x + 4s$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow g(x) := x + 2 \sqrt{x^2 - 20x + 200}$

En liten omskriving gir:

$$g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200} = x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 100 + 100} = x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2},$$

som skulle vises

Alternativt kan vi skrive inn uttrykket slik det står i oppgaveteksten og se at vi får like uttrykk i CAS:

3	$g(x) := x + 4s$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow g(x) := x + 2 \sqrt{x^2 - 20x + 200}$
4	$x + 2 * \text{sqrt}((10-x)^2 + 10^2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow x + 2 \sqrt{x^2 - 20x + 200}$

b)

	Ekstremalpunkt(g)
4	$\rightarrow \left\{ \left(\frac{-10\sqrt{3} + 30}{3}, 10\sqrt{3} + 10 \right) \right\}$
5	$\{((-10\sqrt{3} + 30) / 3, 10\sqrt{3} + 10)\}$ $\approx \{(4.23, 27.32)\}$
6	$g''(4.23)$ ≈ 0.13

Finner ekstremalpunkt i rad 4, og avrundede verdier i rad 5.

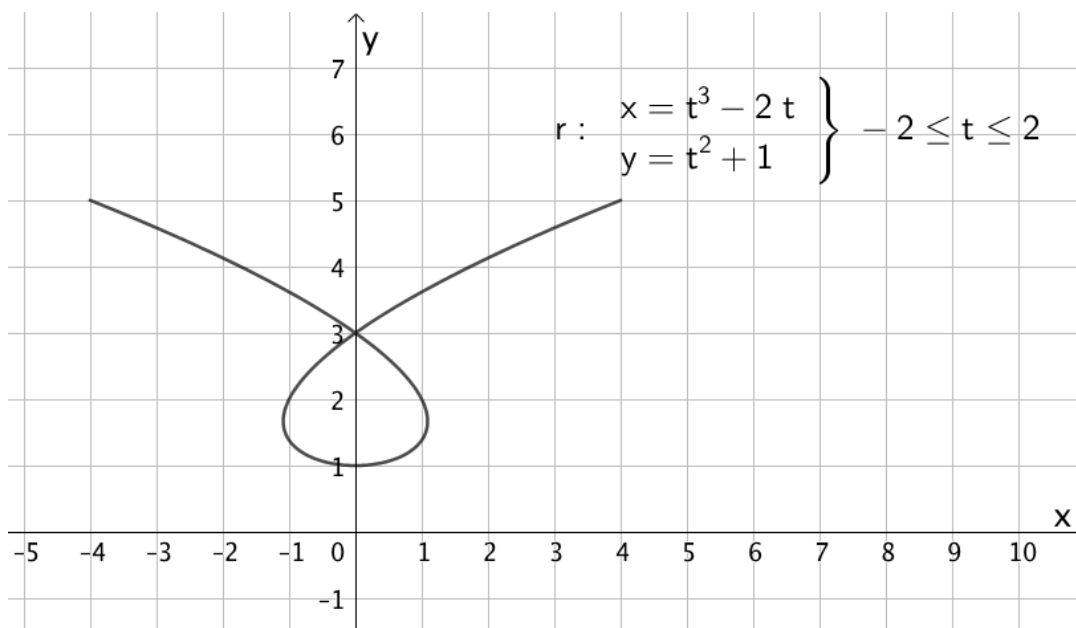
I rad 6 gjennomfører jeg andrederiverttest for å avgjøre at det er snakk om et bunnpunkt.

Den samlede veilengden blir minst når x er 4,23 km. Da er den samlede veilengden 27,32 km

Oppgave 5

a) Bruker kommandoen

"Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)" og tegner grafen.



b)

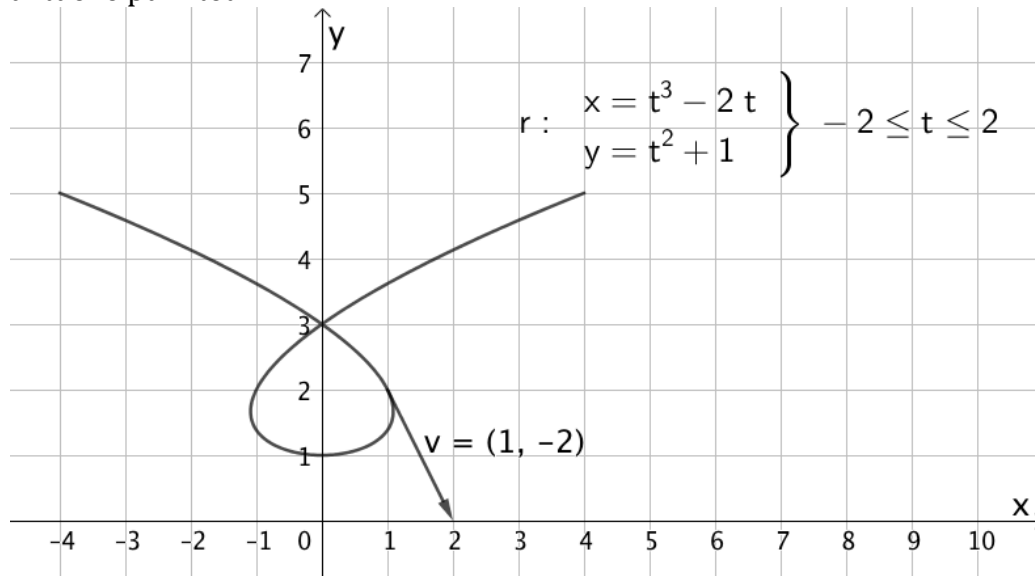
$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [3t^2 - 2, 2t]$$

$$\vec{v}(-1) = [3(-1)^2 - 2, 2(-1)] = [3 - 2, -2] = \underline{\underline{[1, -2]}}$$

og

$$|\vec{v}(-1)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Skriver inn "Vektor(r(-1), r(-1)+r'(-1))" og tegner fartsvektoren inn på grafen det aktuelle punktet



c)

CAS	
1	$\vec{v}(t) := \text{Vektor}(3t^2 - 2, 2t)$ $\rightarrow \vec{v}(t) := \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2t \end{pmatrix}$
2	$\text{abs}(\vec{v}) = 2$ $\text{Løs: } \left\{ t = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}, t = 0, t = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$
3	$\{t = -2 \sqrt{2} / 3, t = 0, t = 2 \sqrt{2} / 3\}$ $\approx \{t = -0.94, t = 0, t = 0.94\}$

Banefarten er 2 når $t = -0.94 \vee t = 0 \vee t = 0.94$

d)

CAS	
1	$v(t) := \text{Vektor}(3t^2 - 2, 2t)$ $\rightarrow v(t) := \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2t \end{pmatrix}$
2	$a(t) := v'(t)$ $\rightarrow a(t) := \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \end{pmatrix}$
3	$a \cdot v = 0$ $\text{Løs: } \left\{ t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3} \right\}$
4	Definerer absoluttverdien til fartsvektoren som en funksjon h
5	$h(t) := \text{abs}(v)$ $\rightarrow h(t) := \sqrt{9t^4 - 8t^2 + 4}$
6	$h'(t) = 0$ $\text{Løs: } \left\{ t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3} \right\}$

I rad 3 finner vi de verdiene av t som gjør at fartsvektoren står normalt på akselerasjonsvektoren.

I rad 6 finner vi at de samme verdiene for t gir oss ekstremalverdiene til banefarten til partikkelen, som skulle vises