To oppgaver i kontrollteori

Oppgave 1

Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 4ty - u^2 \,\mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = y + u & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \\ y(1) = 2 + 3(e - e^{-1}) & (3) \end{cases}$$

(a) Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (angi både y og u).

(b) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Oppgave 2

Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} 2uy - 5y^2 - u^2 \,\mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = u + t & (1) \\ y(0) = -\frac{1}{5} & (2) \\ y(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 7(e - e^{-1}) - \frac{1}{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1) & (3) \end{cases}$$

(a) Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (angi både y og u).

(b) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Løsningsforslag

Oppgave 1

(a) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (som står i formelsamlingen) $H = 4ty - u^2 + p(y + u)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y, u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = 4t + p \\ H'_u = -2u + p \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} H''_{yy} = 0 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = 0(-2) - 0^2 = 0 \geqslant 0$ og $C = -2 < 0$ så H er konkav i (y, u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagin-betingelsene (som står i formelsamlingen) gir

$$\begin{cases} p = 2u & (4) \\ p' + p = -4t & (5) \end{cases}$$

Vi vil finne en differensiallikning som bare innholder y og dens deriverte (ikke p eller u). Fra (1) får vi at $u = y' - y$ som innsatt i (4) gir

$$p = 2y' - 2y \quad (6)$$

og hvis vi deriverer på begge sider får vi

$$p' = 2y'' - 2y' \quad (7)$$

I (5) bruker vi (7) til å erstatte p' og (6) til å erstatte p. Vi får differensiallikningen $(2y'' - 2y') + (2y' - 2y) = -4t$, eller

$$y'' - y = -2t \quad (8)$$

Den har karakteristisk likning $r^2 - 1 = 0$ har løsningene $r = \pm 1$ som gir løsningen $y_{\mathrm{h}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ på den homogene likningen. Siden $-2t$ er et førstegradspolynom, gjetter vi på at det finnes et førstegradspolynom $At + B$ som gir en partikulær løsning på den ikke-homogene likningen. (8) gir da likningen $-At - B = -2t$. For at dette skal være sant for alle t må koeffisientene være like: $-A = -2$ og $-B = 0$. Dermed gir $y_{\mathrm{p}}(t) = 2t$ en partikulær løsning og

$$y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2t$$

er den generelle løsningen på (8). For å bestemme C_1 og C_2 bruker vi (2) og (3): Fra (2) får vi at $C_2 = -C_1$. Fra (3) får vi $C_1 e - C_1 e^{-1} + 2 = 2 + 3(e - e^{-1})$. Vi trekker fra 2 på begge sider og faktoriserer ut C_1. Det gir $C_1(e - e^{-1}) = 3(e - e^{-1})$, dvs $C_1 = 3$ og $C_2 = -3$. Det gir

$$\underline{\underline{y(t) = 3e^t - 3e^{-t} + 2t}}$$

For å finne u bruker vi (1) som gir $u = y' - y$. Siden $y'(t) = 3e^t + 3e^{-t} + 2$ får vi

$$\underline{\underline{u(t) = 6e^{-t} - 2t + 2}}$$

(b) Vi erstatter $u = y' - y$ fra (1) i kontrollproblemet og får variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 4ty - (y')^2 + 2y'y - y^2 \, \mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y(0) = 0 & \text{(i)} \\ y(1) = 2 + 3(e + e^{-1}) & \text{(ii)} \end{cases}$$

Vi setter $F = 4ty - (y')^2 + 2y'y - y^2$. Vi avgjør først om F er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = 4t + 2y' - 2y \\ F'_{y'} = -2y' + 2y \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} F''_{yy} = -2 = A \\ F''_{yy'} = 2 = B \\ F''_{y'y'} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-2)(-2) - 2^2 = 0 \geqslant 0$ og $A = -2 < 0$ så H er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi et maksimum.

Vi har videre at

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = -2y'' + 2y'$$

Euler-likningen (oppgitt i formelsamlingen) gir dermed

$$\begin{aligned} 4t + 2y' - 2y - (-2y'' + 2y') = 0 \quad \text{dvs} \\ y'' - y = -2t \end{aligned}$$

Dette er likning (8) og da initialbetingelsene er de samme vil også løsningen bli den samme som for $y(t)$ i (a).

Oppgave 2

(a) For normalløsningen er Hamilton-funksjonen (se formelsamlingen) $H = 2uy - 5y^2 - u^2 + p(u+t)$. Vi avgjør først om H er konkav i (y,u). Vi har

$$\begin{cases} H'_y = 2u - 10y \\ H'_u = 2y - 2u + p \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} H''_{yy} = -10 = A \\ H''_{yu} = 2 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases}$$

Dermed er $AC - B^2 = (-10)(-2) - 2^2 = 20 - 4 \geqslant 0$ og $A = -10 < 0$ så H er konkav i (y,u) og en løsning på Pontryagin-betingelsene vil derfor gi et maksimum.

Pontryagins første ordens betingelser gir

$$\begin{cases} p = 2u - 2y & (4) \\ p' = 10y - 2u & (5) \end{cases}$$

Fra (1) får vi $u = y' - t$ som innsatt i (4) gir

$$\begin{cases} p = 2y' - 2t - 2y & \text{(6) og ved derviasjon} \\ p' = 2y'' - 2 - 2y' & (7) \end{cases}$$

Så eliminerer vi p' fra (5) og (7) og substituerer $u = y' - t$:
$2y'' - 2 - 2y' = 10y - 2(y' - t)$, dvs

$$y'' - 5y = t + 1 \qquad (*)$$

Karakteristisk likning er $r^2 - 5 = 0$ som har løsningene $r = \pm\sqrt{5}$. Det gir den homogene løsningen $y_\mathrm{h}(t) = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t}$. Gjetter på en partikulær løsning $y_\mathrm{p}(t) = At + B$ for konstanter A og B. Med y_p innsatt i $(*)$ får vi $-5(At + B) = t + 1$ som skal holde for alle t. Da må $-5A = 1$ og $-5B = 1$, dvs $y_\mathrm{p}(t) = -\frac{1}{5}(t+1)$. Det gir

$$y(t) = y_\mathrm{h}(t) + y_\mathrm{p}(t) = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t} - \frac{1}{5}(t+1)$$

Initialbetingelsen $y(0) = -\frac{1}{5}$ gir $C_1 + C_2 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$, dvs $C_2 = -C_1$. Den andre initialbetingelsen gir $C_1(e - e^{-1}) - \frac{1}{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1) = 7(e - e^{-1}) - \frac{1}{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1)$, dvs $C_1 = 7$ og $C_2 = -7$. Dette gir

$$y(t) = \underline{\underline{7e^{\sqrt{5}t} - 7e^{-\sqrt{5}t} - \frac{1}{5}(t+1)}}$$

og

$$u(t) = y'(t) - t = \underline{\underline{7\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} + 7\sqrt{5}e^{-\sqrt{5}t} - (t + \frac{1}{5})}}$$

(b) Vi erstatter $u = y' - t$ fra (1) i kontrollproblemet og får variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} 2yy' - 2ty - 5y^2 - (y')^2 + 2ty' - t^2 \, \mathrm{d}t \quad , \quad \begin{cases} y(0) = -\frac{1}{5} & \text{(i)} \\ y(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 7(e - e^{-1}) - \frac{1}{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1) & \text{(ii)} \end{cases}$$

Vi setter $F = 2yy' - 2ty - 5y^2 - (y')^2 + 2ty' - t^2$. Vi avgjør først om F er konkav i (y, y'). Vi har

$$\begin{cases} F'_y = 2y' - 2t - 10y \\ F'_{y'} = 2y - 2y' + 2t \end{cases}$$

som gir

$$\begin{cases} F''_{yy} = -10 = A \\ F''_{yy'} = 2 = B \\ F''_{y'y'} = -2 = C \end{cases}$$

Med samme tall som i (a) blir konklusjonen: F er konkav i (y, y') og en løsning på Euler-likningen vil derfor gi et maksimum.

Vi har videre at

$$\frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}t} = 2y' - 2y'' + 2$$

Euler-likningen (se formelsamlingen) gir dermed

$$\begin{aligned} 2y' - 2t - 10y - (2y' - 2y'' + 2) = 0 \quad \text{dvs} \\ y'' - 5y = t + 1 \end{aligned}$$

som er samme differensiallikning som i (a). Med de samme initialbetingelsen får vi samme løsning $y(t)$ som i (a).