TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2018

Løsningsforslag

$\boxed{15.5.2}$ Kulen er grafen til

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = a\left(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)\right), \quad 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= a\left(\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), -\sin(\phi)\right)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= a(-\sin(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\cos(\theta), 0),\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos(\phi)\cos(\theta) & a\cos(\phi)\sin(\theta) & -a\sin(\phi) \\ -a\sin(\phi)\sin(\theta) & a\sin(\phi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}\\ &= a^2(\sin(\phi)^2\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\phi)^2\sin(\theta)\mathbf{j} + \cos(\phi)\sin(\phi)\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Vi finner så

$$\begin{aligned}dS &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sqrt{\sin(\phi)^4\cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^4\sin(\theta)^2 + \cos(\phi)^2\sin(\phi)^2}\, d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sin(\phi)\sqrt{\sin(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \cos(\phi)^2}\, d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sin(\phi)\, d\phi\, d\theta.\end{aligned}$$

$\boxed{15.5.4}$ Merk at kulen har radius $2a$ og at likningen for sylinderen kan skrives som

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2,$$

slik at denne har radius a og har akse som er parallell med z-aksen og krysser xy-planet i $(0,a)$. Dette er illustrert i Figur 1. Fordi vi arbeider på en kule er det nyttig å gå over til kulekoordinater. Da blir kulen

$$R = 2a,$$

og sylinderen blir

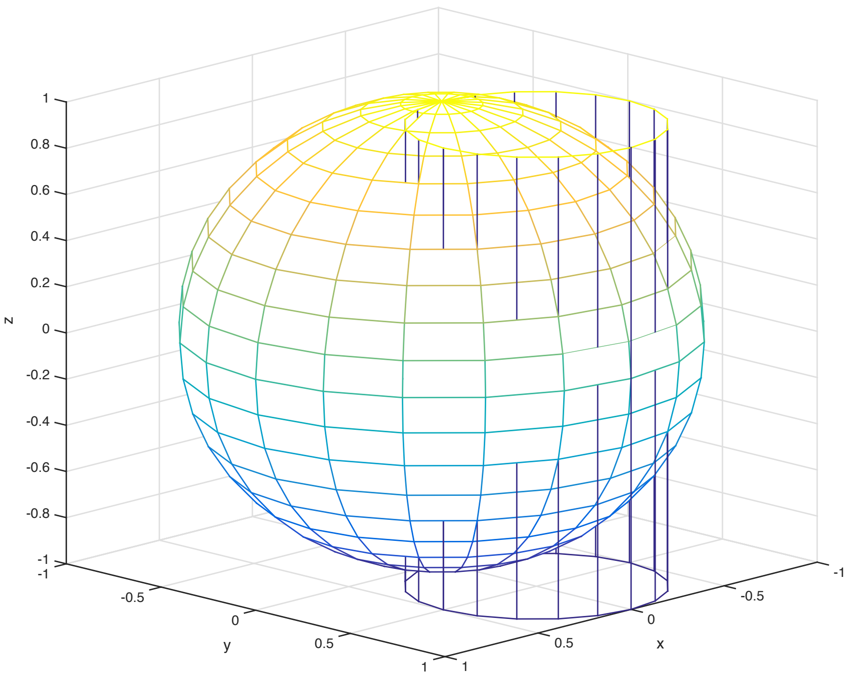
$$R^2\sin(\phi)^2\cos(\theta)^2 + R^2\sin(\phi)^2\sin(\theta)^2 = 2aR\sin(\phi)\sin(\theta),$$

eller

$$R\sin(\phi) = 2a\sin(\theta).$$

Innsiden av sylinderen oppfyller derfor ulikheten

$$R\sin(\phi) \le 2a\sin(\theta),$$



Figur 1: Kulen og sylinderen i oppgave 15.5.4, med $a = 1/2$.

og spesielt er dette ekvivalent med

$$\sin(\phi) \le \sin(\theta)$$

på kulen. Hvis vi ytterligere begrenser oss til den delen av kulen som også ligger i første oktant er dette ekvivalent med ulikheten

$$\phi \le \theta.$$

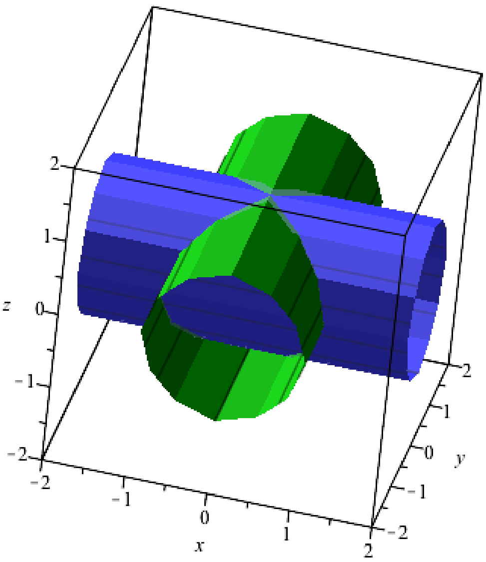
På grunn av symmetri må arealet til den delen av kulen som ligger innenfor sylinderen være fire ganger arealet til den som i tillegg ligger i første oktant (se figuren). Det ønskede arealet blir nå

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} (2a)^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 16a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(\theta))\, d\theta \\ &= 8a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{15.5.10}}$ Grunnet symmetri er delene av arealet på hver side av yz-planet like, så vi kan nøye oss med å beregne den delen av flaten som har positiv x-koordinat; se Figur 2. Kall denne delen $\mathcal{S}_{x+}$. $\mathcal{S}_{x+}$ projisert ned på yz-planet er disken $D = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 \le a^2\}$, og er grafen av $x = \sqrt{a^2 - z^2}$

for $(y, z) \in D$. Vi bruker så formelen for arealet av en graf:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\mathcal{S}_{x+}} \mathrm{d}S &= 2 \iint_D \sqrt{1 + 0^2 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}}\, dy\, dz \\ &= 2 \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}}\, dy\, dz \\ &= 4 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - z^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}}\, dz \\ &= 8a^2. \end{aligned}$$



Figur 2: Situasjonen i oppgave 15.5.10 for $a = 1$. Oppgaven er å finne det grønne arealet inni den blå sylinderen.

$\boxed{15.5.14}$ La E være projeksjonen ned i xy-planet. E består av de (x, y, z) som tilfredstiller

$$1 + y \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)},$$

eller

$$1 \geq x^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Vi bruker så formelen for arealetelementet dS til en flate gitt av $z = f(x, y)$ til å skrive integralet som

$$\iint_S y\, dS = \iint_E y \sqrt{1 + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{3} \iint_E y\, dx\, dy.$$

Ved å gjøre variabelskiftet $x = r\cos\theta$, $(y-1)/\sqrt{2} = r\sin\theta$, $dx\,dy = \sqrt{2}r\,dr\,d\theta$ ser vi at integralet til høyre kan skrives som

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\iint_E y\,dx\,dy &= \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+\sqrt{2}r\sin\theta)\sqrt{2}r\,d\theta\,dr\\ &= \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}r\,d\theta\,dr = 2\pi\sqrt{6}\int_0^1 r\,dr = \pi\sqrt{6}.\end{aligned}$$

$\boxed{15.5.15}$ Vi finner først arealelementet. Siden $z = x^2$ beskriver løsningene til likningen

$$G(x,y,z) = x^2 - z = 0$$

har vi

$$\begin{aligned}dS &= \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right|dx\,dy\\ &= \frac{\sqrt{(2x)^2+0^2+(-1)^2}}{|-1|}dx\,dy\\ &= \sqrt{1+4x^2}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Paraboloiden skjærer flaten slik at skjæringskurven har projeksjon

$$x^2 = 1 - 3x^2 - y^2,$$

eller

$$4x^2 + y^2 = 1$$

i xy-planet. Likningen beskriver en ellipse. Vi må derfor integrere over

$$\{(x,y) : 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le \sqrt{1-4x^2}\}$$

siden vi befinner oss i første oktant. Vi finner

$$\begin{aligned}\iint_S xz\,dS &= \int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-4x^2}} x\cdot x^2\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dy\,dx\\ &= \int_0^{1/2} x^3\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1-4x^2}\,dx\\ &= \int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-16x^4}\,dx\\ &= \frac{1}{64}\int_0^1\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{1}{96},\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - 16x^4$.

$\boxed{15.5.22}$ Arealet av sfære-segmentet er $A = \frac{1}{8}4\pi a^2 = \pi a^2/2$. Ved symmetri er $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, så vi trenger bare å finne $M_{z=0}$. Siden sfære-segmentet er grafen til funksjonen

$$f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad (x,y)\in D,$$

der D er den delen av disken gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$ som ligger i første kvadrant, bruker vi (nok en gang) formelen for arealet til flatesegmenter dS av en graf:

$$\begin{aligned}
M_{z=0} &= \iint z\,dS \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy \\
&= \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy \\
&= \frac{\pi a^3}{4}.
\end{aligned}$$

Altså er

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{A} = \frac{a}{2}.$$

15.6.1 Vi beregner fluksen ut av tetraederets fire sideflater. For sideflaten som tilfredstiller $x = 0$, har vi at $\mathbf{N} = (-1, 0, 0)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -x = 0$, så fluksen ut er 0. For sideflaten som tilfredstiller $z = 0$, har vi $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$, så fluksen ut er 0. For sideflaten som tilfredstiller $y = 0$, har vi $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -z$. Fluksen ut av denne siden blir dermed

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} (-z)\,dx\,dz = \int_0^2 (-6z + 3z^2)\,dz = -12 + 8 = -4.$$

For den skrå sideflaten $\mathcal{S}$ som ikke ligger i noe koordinatplan, benytter vi oss av det faktum at for en flate på formen $z = f(x, y)$, så er det oppadrettede flate-elementet $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)dx\,dy$. I vårt tilfelle er $f(x, y) = 2 - x/3 - 2y/3$ og

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} (x, z, 0) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) dx\,dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\right) dx\,dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y\right) dx\,dy \\
&= \int_0^3 \left(\frac{4}{3}(6 - 2y) + \frac{1}{18}(6 - 2y)^2 - \frac{4}{9}y(6 - 2y)\right) dy \\
&= 10.
\end{aligned}$$

Den totale fluksen ut av tetraederet er altså $10 - 4 = 6$. Merk: Denne oppgaven kan også løses ved å bruke divergensteoremet. En observerer da at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$ og at volumet av tetraederet er 6, så integralet blir $1 \cdot 6 = 6$.

15.6.6 Flaten er gitt ved $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, så det oppadrettede flate-elementet er

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N}\,dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\,dy = (-2x, 2y, 1)\ dx\,dy.$$

La D være disken i xy-planet gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$. Fluksen opp gjennom flaten er

$$\begin{aligned}
\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (x, x, 1) \cdot (-2x, 2y, 1)\ dx\,dy \\
&= \iint_D \left(-2x^2 + 2xy + 1\right)\ dx\,dy
\end{aligned}$$

Integralet av det andre leddet er 0 grunnet symmetri, og integralet av det siste leddet er lik arealet av D. Ved å skrive integralet av det første leddet i polarkoordinater, får vi at

$$\begin{aligned}\iint_D \left(-2x^2 + 2xy + 1\right)\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(-2r^2\cos^2(\theta)\right) r\, dr\, d\theta + 0 + \pi a^2 \\ &= -\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta + \pi a^2 \\ &= \pi a^2\left(1 - \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{15.6.12}$ Her må vi bruke den generelle formelen for flateelementet til en parametrisert flate. Flaten er gitt ved

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(e^u\cos(v), e^u\sin(v), u\right), \qquad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi.$$

Det oppadrettede flateelementet er gitt ved

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{S} &= \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial v}\, du\, dv \\ &= \left(e^u\cos(v), e^u\sin(v), 1\right) \times \left(-e^u\sin(v), e^u\cos(v), 0\right) du\, dv \\ &= \left(-e^u\cos(v), -e^u\sin(v), e^{2u}\right)\, du\, dv.\end{aligned}$$

Videre er

$$\mathbf{F}(\,\mathbf{r}(u,v)) = \left(ue^u\sin(v), -ue^u\cos(v), e^{2u}\right).$$

Følgelig er fluksen

$$\begin{aligned}\iint \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{S} &= \int_0^1\int_0^\pi \left(-ue^{2u}\sin(v)\cos(v) + ue^{2u}\sin(v)\cos(v) + e^{4u}\right) dv\, du \\ &= \int_0^1\int_0^\pi \left(e^{4u}\right) dv\, du \\ &= \frac{\pi}{4}\left(e^4 - 1\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Review ex. 15.4}}$ Planet beskriver løsningene til likningen

$$G(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0,$$

slik at arealelementet blir

$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right|\, dx\, dy \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{1}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{3}\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Vi må nå finne projeksjonen av flaten ned i xy-planet for å finne ut hva vi skal integrere over. (Det kan være til hjelp å lage en skisse her.) Setter vi $z = 0$ i likningen for planet finner vi

$$x + y = 1,$$

slik at projeksjonen ned i xy-planet er den rettvinklede trekanten begrenset av x- og y-aksen samt linjen $y = 1 - x$ for $0 \leq x \leq 1$. Vi kan nå regne ut integralet. Vi finner

$$\begin{aligned}
\iint_S xyz\, dS &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\sqrt{3}\, dy\, dx \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x((1-x)y - y^2)\, dy\, dx \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 x\left((1-x)\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3\right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 x(1-x)^3\, dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 (1-u)u^3\, du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{40\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - x$.