Løsningsforslag Eksamen R1 Høsten 2017 DEL 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = \underline{\underline{6x-2}}$ b) $g'(x) = \underline{\underline{2xe^x + x^2e^x}}$ c) $h'(x) = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3-1}}}$

Oppgave 2

$$\ln\left(\cancel{b^2}\cdot b\cdot\frac{1}{\cancel{a}\cancel{b^2}}\cdot\frac{\cancel{a}}{b^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \underline{\underline{-\ln(b)}}$$

Oppgave 3

$\vec{a} = [3,1] \lor \vec{b} = [4,2] \lor \vec{c} = [t+1, 3]$

a) $\vec{a} - 2\vec{b} = [3-8, 1-4] = \underline{\underline{[-5, -3]}}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 4 + 1\cdot 2 = \underline{\underline{14}}$

c) $\vec{b} \parallel \vec{c} \Leftrightarrow \frac{t+1}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{t=5}}$

d) $|\vec{c}| = \sqrt{(t+1)^2+9} \lor |\vec{a}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$\Rightarrow (t+1)^2 + 9 = 10$$

$$\Rightarrow t+1 = \pm 1 \Rightarrow \underline{\underline{t=0}} \lor \underline{\underline{t=-2}}$$

Oppgave 4

a) $\underline{F(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} x \cdot \cancel{2}(x-3)^2$$

$$= x(x^2 - 6x + 9)$$

$$= \underline{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

b) $F'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\underline{x = 1 \lor 3}$$

$\underline{F(1)} = 1 \cdot (1-3)^2 = \underline{4}$ $\quad \underline{F(3)} = 3 \cdot 0 = \underline{0}$

Arealet er størst mulig når $\underline{\underline{x = 1}}$

c) $\underline{F(2)} = 2 \cdot (2-3)^2 = \underline{\underline{2}}$

$F(x) = 2 \Rightarrow \boxed{x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0}$

$(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x-2) = \underline{x^2 - 4x + 1} = \underline{(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})}$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad -4x^2 + 9x - 2 \\ -(-4x^2 + 8x) \\ \hline \qquad x - 2 \\ \quad -(x-2) \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \underline{2 \pm \sqrt{3}}}$$

$\underline{\underline{x = 2 - \sqrt{3}}}$ gir også $F(x) = 2$

Oppgave 5

a) 4 siffer gir <u>10 000 koder</u>

b) Antall måter å sortere 4 nedtrykte knapper på blant 10 knapper totalt:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{\underline{210 \text{ koder}}}$$

c) Koden må bestå av 5 tall dersom antall koder skal bli flest mulig fordi det gir flest kombinasjoner når vi sorterer 5 nedtrykte knapper blant 10 knapper totalt. Dette ser vi enklest (?) vha. Pascals trekant:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad \underline{252} \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Tallet på antall koder blir $\binom{10}{5} = \underline{\underline{252}}$

Oppgave 6

$A(3,-2)$ $B(9,4)$ $C(1,4)$

a) $\vec{AC} = [-2, 6] \Rightarrow \vec{AM} = [-1, 3]$

Lar $M(x,y) \Rightarrow \vec{AM} = [x-3, y+2] \Rightarrow \underline{\underline{M(2,1)}}$ ■

b) Retningsvektoren til linja $\vec{r}$ må stå normalt på $\vec{AC}$.

): $\underline{\vec{AC} \cdot \vec{r} = 0}$ $\quad \vec{AC} \cdot [3,1] = [-2,6] \cdot [3,1] = -6+6 = \underline{0}$

): $\underline{\vec{r} = [3,1]}$ ← En mulig retningsvektor

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at = 2+3t \\ y = y_0 + bt = \underline{1+t} \end{cases}$$ ■

punkt retningsvektor

c) $x = 12 = 2+3t \Rightarrow \underline{t = \frac{10}{3}}$

$\Rightarrow y = 1+t = 1 + \frac{10}{3} = \underline{\frac{13}{3}}$): punktet ligger ikke på l.

d) $\vec{AB} = [6,6] \Rightarrow \vec{AN} = [3,3] \Rightarrow \underline{N(6,1)}$ ← Midtpunktet på AB.

$\underline{\vec{r} = [1,-1]}$ ← Retningsvektor til midtnormalen $(\vec{AB} \cdot \vec{r} = 0)$

$$m: \begin{cases} x = 6+s \\ y = 1-s \end{cases}$$

Midtnormalen til AB

$$\begin{bmatrix} 2+3t = 6+s \\ 1+t = 1-s \end{bmatrix} \Rightarrow t = -s$$

$\Rightarrow \underline{s=-1} \lor \underline{t=1}$

$\Rightarrow$ Skjæringspunktet: $\underline{\underline{(5,2)}}$

Oppgave 7

a) $x^2 = 1 \Leftarrow x = 1$

Utsagnet $x^2=1$ impliserer både $x=1$ og $x=-1$

Utsagnet $x=1$ impliserer $x^2=1^2=1$

b) $f(x) = 5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 10x$

Utsagnet $f(x)=5x^2-1$ impliserer $f'(x)=10x$

Utsagnet $f'(x)=10x$ impliserer $f(x)=5x^2+C$,

hvor C kan være hvilket som helst tall.

Oppgave 8

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f'(x_0)\cdot x \underbrace{- f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)}_{=0 \text{ siden linja går gjennom } (0,0)}$$

$$-f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0) = e^{1-x_0}\cdot x_0 + e^{1-x_0} = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = -1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -e^2 \cdot x}}$$

Løsningsforslag Eksamen R1 Høsten 2017 DEL 2

Oppgave 1

20 sanger   4 kygo   Tilfeldig trekk m/tilbakelegging

a) $P(\text{kygo}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \underline{0{,}2}$

Siden det er m/tilbakelegging er sannsynligheten konstant.

b) $P(2 \text{ m/kygo}) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = \underline{\underline{20{,}48\%}}$

(Binomisk siden $p = 0{,}2 = $ konstant)

c) $P(\text{minst én}) = 1 - P(\text{ingen})$

$\underline{P(\text{ingen})} = \binom{x}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^x = \underline{0{,}8^x}$

$1 - 0{,}8^x > 0{,}9 \Rightarrow 0{,}1 > 0{,}8^x$

$\Rightarrow \lg(0{,}1) > x \lg(0{,}8)$

$\Rightarrow \frac{\lg(0{,}1)}{\lg(0{,}8)} < x$

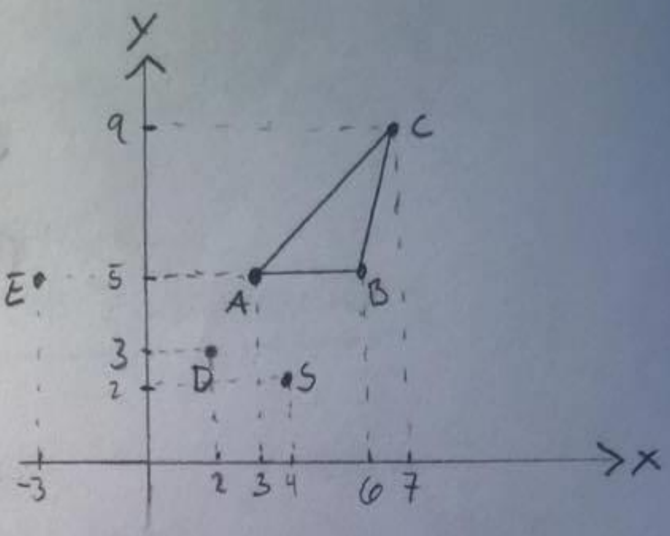
$\Rightarrow \underline{x > 10{,}3}$

Han må høre på 11 sanger

Oppgave 2

A(3,5) B(6,5) C(7,9)

a) $\vec{AB} = [3,0]$ $\quad \vec{AC} = [4,4]$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \angle A$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{3 \cdot 2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{45^\circ}}$$

b) $$\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}([3,5] + [6,5] + [7,9])$$

$$= \frac{1}{3}[16, 19] = \underline{\left[\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right]} \quad): \underline{\underline{T\left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)}}$$

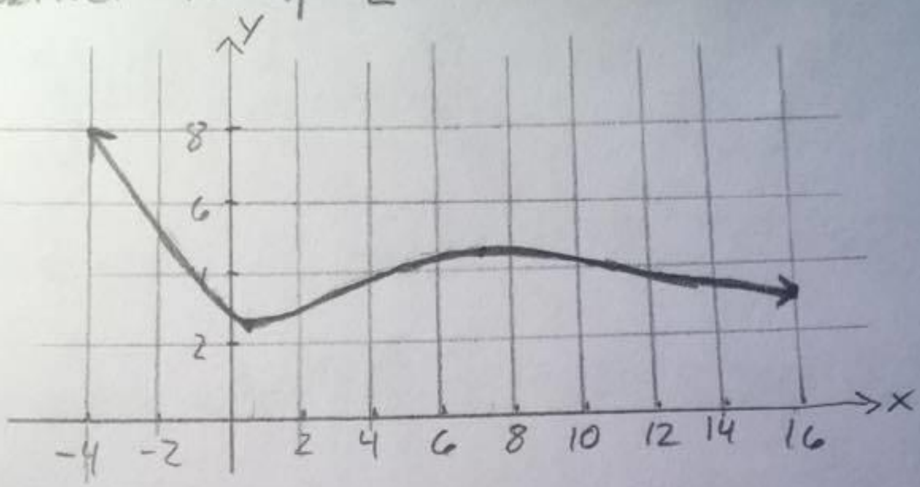
c) $$\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF})$$

$$[4,2] = \frac{1}{3}[2 - 3 + x, \ 3 + 5 + y]$$

$$[12,6] = [-1 + x, \ 8 + y] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F(13,-2)}}$$

Oppgave 3

a) Skriver Funksjon[2 ln(x^2 +4) − x/2, −4, 16] i GeoGebra



b) Skriver Ekstremalpunkt[f(x)] i GeoGebra og får toppunktet (7,46, 4,45) og bunnpunktet (0,54, 2,64)

c)

g(x):= 2 ln(x^2 +k) − x/2
Løs[g'(1)=0]   → k=7

Dersom k=7 får g(x) et ekstremalpunkt i x=1

d)

Løs[g'(x)=0]
→ $\{x=\sqrt{16-k}+4,\ x=4-\sqrt{16-k}\}$

Her ser vi at k<16 gir 2 ekstremalpunkt

k=16 gir 1 ekstremalpunkt

k>16 gir ingen ekstremalpunkt

Oppgave 4

a) $\vec{v} = \vec{OP}' = \underline{[4, 3]}$ (Fart er endring av posisjon)

Banefarten: $v = |[4,3]| = \underline{\underline{5 \text{ nm}/t}}$

b) Posisjonen til Euler om 4 timer:

$$x = 80 + 4 \cdot 4 = \underline{96}$$

$$y = 16 + 3 \cdot 4 = \underline{28}$$

Avstand fra origo: $\sqrt{96^2 + 28^2} = \underline{100 \text{ nm}}$

$\Rightarrow$ Farten til redningsskipet: $v = \frac{100 \text{nm}}{4t} = \underline{\underline{25 \text{ nm}/t}}$

c) Farten $35 \text{ nm}/t$ gir avstanden $35t$ på t timer

Sirkel med sentrum i Q og radius $35t$:

$$(x+10)^2 + (y-50)^2 = (35t)^2$$

Finner skjæringen mellom denne og $\vec{OP}$ vha. CAS:

NLøs$[(80+4t+10)^2 + (16+3t-50)^2 = (35t)^2]$
$\rightarrow \{t = -2{,}57,\ t = 3\}$

Det tar $\underline{\underline{3 \text{ timer}}}$ for redningsbåten kan være hos Euler