Eksamen R1 Høst 2017 - Løsning

Dennis Christensen

24. november 2017

Del 1 - Uten Hjelpemidler

Oppgave 1

(a)

$$f'(x) = 6x - 2,$$

(b)

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2),$$

(c)

$$h'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} 2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln\left(ab^2\right) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) &= 2\ln b - (\ln 1 - \ln b) - \left(\ln a + \ln b^2\right) + \left(\ln a - \ln b^2\right) \\ &= 2\ln b + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\ &= -\ln b. \end{aligned}$$

Oppgave 3

(a)

$$\vec{a} - 2\vec{b} = [3,1] - 2[4,2] = [3-8, 1-4] = [-5,-3],$$

(b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [3,1] \cdot [4,2] = 12 + 2 = 14,$$

(c) Vi vet at $\vec{b} \parallel \vec{c} \iff$ det finnes $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at $k\vec{b} = \vec{c}$. Vi finner verdien for t hvor dette stemmer:

$$k\vec{b} = \vec{c}$$

$$k[4,2] = [t+1, 3]$$

$$4k = t + 1 \text{ og } 2k = 3.$$

Fra likningen for annenkoordinaten ser vi at $k = \frac{3}{2}$. Dermed får vi at

$$t = 4k - 1 = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

(d)

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|$$
$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$
$$(t+1)^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2$$
$$(t+1)^2 = 1$$
$$t+1 = \pm 1$$
$$t = \pm 1 - 1,$$

så vi får to løsninger:

$$t = 0 \text{ og } t = -2.$$

Oppgave 4

(a)

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} x f(x) = \frac{1}{2} x \cdot 2(x-3)^2 = x(x^2 - 6x^2 + 9) = x^3 - 6x + 9,$$

hvilket skulle vises.

(b) Vi finner ekstremalpunktene til $F(x)$ ved å løse likningen $F'(x) = 0$:

$$F'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0,$$

dermed får løsningen $x = 1$ (ettersom $0 < x < 3$). For å bekrefte at dette er et maksimumspunkt undersøker vi $F''(1)$. Først har vi at

$$F''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Ettersom

$$F''(1) = 6(-1) = -6 < 0,$$

vet vi at F når et toppunkt når $x = 1$. Dermed er arealet til $\triangle ABC$ størst mulig når $x = 1$.

(c)

$$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2.$$

For å undersøke om noen andre x-verdier gir samme areal, løser vi likningen $F(x) = 2$:

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 2$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0.$$

Vi vet at $x = 2$ er en løsning for denne likningen, så vi kan faktorisere $F(x) - 2$ via polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
x^3-6x^2+9x-2=\left(x-2\right)\left(x^2-4x+1\right) \\
\underline{-x^3+2x^2} \\
\quad -4x^2+9x \\
\quad \underline{\;\;4x^2-8x} \\
\qquad\qquad x-2 \\
\qquad\quad \underline{-x+2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Vi må altså undersøke om $x^2-4x+1=0$ har noen løsninger. ABC-formelen gir

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Nå, ettersom $1^2<\sqrt{3}^2=3<2^2$ konkluderer vi at $1<\sqrt{3}<2$, så kun løsningen $x=2-\sqrt{3}$ ligger i definisjonsmengden til F. Dermed har vi altså funnet én annen x-verdi hvor arealet er lik 2, nemlig $x=2-\sqrt{3}$.

Oppgave 5

(a) Vi har 10 valg for hvert siffer, så

$$\text{antall mulige koder }=10^4=10,000$$

.

(b) Ettersom rekkefølgen til tallene er irrelevant, er eher kode entydig bestemt av et valg av 4 forskjellige tall fra 0 til 9, så

$$\text{antall mulige koder }=\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{10\cdot 3\cdot 7}{1}=3\cdot 7\cdot 10=210.$$

(c) Vi kan regne direkte at

$$
\begin{aligned}
\binom{10}{10}&=\binom{10}{10}=0,\\
\binom{10}{9}&=\binom{10}{1}=10,\\
\binom{10}{8}&=\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!8!}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=5\cdot 9=45,\\
\binom{10}{7}&=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 4=120,\\
\binom{10}{6}&=\binom{10}{4}=210,\\
\binom{10}{5}&=\frac{10!}{5!^2}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2\cdot 3\cdot 7\cdot 6=252,
\end{aligned}
$$

ser vi at antallet mulige koder er største mulig når vi må velge 5 tall. I dette tilfellet er antall mulige koder lik 252.

Oppgave 6

(a)

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = [3,-2] + \frac{1}{2}[1-3, 4+2] = [3,-2] + [-1,3] = [2,1],$$

så $M = (2,1)$, hvilket skulle vises.

(b) Vi ønsker å vise at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer. Det vil si, vi må vise at l går gjennom punktet $(2,1)$ og at $\vec{a} = [3,1]$ er ortogonal med $\vec{AC}$. Nå, vi vet at $M = (2,1)$, så ettersom l krysser punktet M, krysser l punktet $(2,1)$, som ønsket. Videre har vi at

$$\vec{AC} \cdot \vec{a} = [-2,6] \cdot [3,1] = -6 + 6 = 0,$$

så $\vec{a} \perp \vec{AC}$, og derfor har vi bekreftet at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer.

(c) Vi ønsker å undersøke om det finnes $t \in \mathbb{R}$ slik at $(2+3t, 1+t) = \left(12, \frac{9}{2}\right)$. Løser vi likningen for førstekoordinaten får vi at $t = \frac{1}{3}(12-2) = \frac{10}{3}$. Vi substituerer dette inn i likningen for annenkoordinaten: Ettersom

$$1 + \frac{10}{3} = \frac{3+10}{3} = \frac{13}{3} \neq \frac{9}{2},$$

ser vi at punktet $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ ikke ligger på linja l.

(d) Vi finner en parameterfremstilling for midtnormalen λ til AB. Linjestykkets midtpunkt μ er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{O\mu} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = [3,-2] + \frac{1}{2}[9-3, 4+2] = [3,-2] + [3,3] = [6,1],$$

og vi kan eksempelvis bruke normalvektoren $\vec{\alpha} = [1,-1]$ (ettersom $\vec{\alpha} \cdot \vec{AB} = 0$), så midtnormalen λ har en parameterfremstilling gitt ved

$$\lambda : \quad \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases} \quad .$$

For å finne skjæringspunktet setter vi henholdsvis x- og y-koordinatene til l og λ lik hverandre:

$$2 + 3t = 6 + s \text{ og } 1 + t = 1 - s.$$

Vi adderer likningene for å eliminere s-variabelen og får at

$$3 + 4t = 7$$

$$t = 1.$$

Substituerer vi dette inn i parameterfremstillingen for l ser vi at skjæringspunktet har koordinatene $(2 + 3 \cdot 1, 1 + 1) = (5, 2)$.

Oppgave 7

(a) Ettersom

$$x = 1 \implies x^2 = 1^2 = 1,$$

mens

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \;\not\Longrightarrow\; x = 1,$$

har vi at

$$x^2 = 1 \; \boxed{\Longleftarrow} \; x = 1.$$

(b) Ettersom

$$f(x) = 5x^2 - 1 \implies f'(x) = 10x,$$

mens

$$f'(x) = 10x \implies f(x) = 5x^2 + \text{konstant} \;\not\Longrightarrow\; f(x) = 5x^2 - 1,$$

har vi at

$$f(x) = 5x^2 - 1 \; \boxed{\Longrightarrow} \; f'(x) = 10x.$$

Oppgave 8

Vi vet at en tangent er en rett linje, altså forventer vi et lineært funksjonsuttrykk. Tangenten til f i punktet $(t, f(t))$ har stigningstall $f'(t)$, og er derfor gitt ved likningen

$$y(x) - f(t) = f'(t)(x - t).$$

Altså,

$$y(x) = f'(t)x - tf'(t) + f(t),$$

så denne linja vil krysse origo hvis og bare hvis konstantleddet, altså $f(t) - tf'(t)$, er 0. Nå, fra kjerneregelen har vi at

$$f'(t) = -e^{1-t}.$$

Vi finner så riktig t-verdi ved å løse likningen $f(t) - tf'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} e^{1-t} - t\left(-e^{1-t}\right) &= 0 \\ e^{1-t} + te^{1-t} &= 0 \\ e^{1-t}(1+t) &= 0 \\ 1 + t &= 0 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Dette gir altså stigningstall

$$f'(-1) = -e^{1+1} = -e^2,$$

så likningen for tangenten er gitt ved

$$y = -e^2 x.$$

Del 2 - Med Hjelpemidler

Oppgave 1

(a) Ettersom avspillingen skjer med tilbakelegging har vi at

$$p = \mathbb{P}\,(\text{Kygo spilles}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2,$$

hvilket skulle vises.

(b) Avspillingen skjer med tilbakelegging, så vi har en binomisk sannsynlighetsfordeling. Vi får dermed at

$$\mathbb{P}\,(\text{to Kygo-sanger spilles}) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048,$$

så sannsynligheten for at nøyaktig to Kygo-sanger blir spilt er $0,2048$.

(c) La n være antall sanger Jakob hører. Vi har at

$$\mathbb{P}\,(\text{minst én Kygo-sang spilles}) = 1 - \mathbb{P}\,(\text{ingen Kygo-sanger spilles}) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0,8^n.$$

Vi ønsker å undersøke for hvilke n denne verdien er $\geq 0,9$:

$$\begin{aligned} 1 - 0,8^n &\geq 0,9 \\ 0,8^n &\leq 0,1 \\ \ln(0,8^n) &\leq \ln(0,1) \\ n\ln(0,8) &\leq \ln(0,1) \\ n &\geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \approx 10,32 > 10, \end{aligned}$$

hvor vi har snudd ulikhetstegnet ettersom $0,8 < 1$, så $\ln(0,8) < 0$. Dermed ser vi at Jakob må høre minst 11 sanger for at sannsynligheten for at minst én Kygo-sang skal bli avspilt er større enn 90%.

Oppgave 2

(a)

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= [6-3, 5-5] = [3,0], \\ \vec{AC} &= [7-3, 9-5] = [4,4], \end{aligned}$$

$$\cos\left(\angle BAC\right) = \cos\left(\text{vinkel mellom } \vec{AB} \text{ og } \vec{AC}\right) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{[3,0]\cdot[4,4]}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{4^2+4^2}} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

så $\angle BAC = 45°$.

(b)

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\vec{OC}\right) = \frac{1}{3}\left([3,5]+[6,5]+[7,9]\right) = \frac{1}{3}[16,19],$$

så tyngdepunktet T har koordinatene $\left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

(c) La $F = (x, y)$. Vi bruker definisjonen til tyngdepunktet S for å finne posisjonsvektoren $\vec{OF}$:

$$\vec{OS} = \frac{1}{3}\left(\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}\right)$$

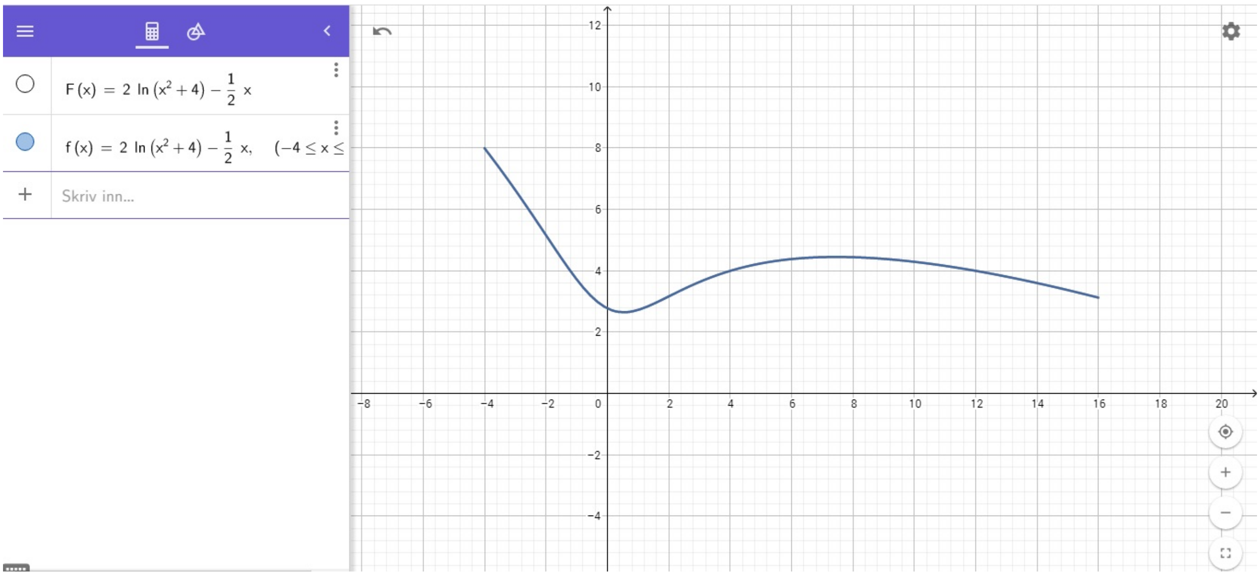
$$[4, 2] = \frac{1}{3}\left([2, 3] + [-3, 5] + [x, y]\right)$$

$$[x, y] = 3[4, 2] - [2, 3] - [-3, 5] = [12 - 2 + 3, 6 - 3 - 5] = [13, -2],$$

så $F = (13, -2)$.

Oppgave 3

(a) Vi definerer først funksjonsuttrykket som $F(x)$ i GeoGebra. Deretter bruker vi `funksjon(<Funksjon>,<Start>,<Slutt>)` for å definere definisjonsmengden, altså skriver vi inn `funksjon(F,-4,16)`.



(b) Vi har at

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{1}{2}.$$

For å finne topp- og bunnpunkter på grafen til f løser vi likningen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{4x}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$8x = x^2 + 4$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0.$$

ABC-formelen gir

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{2^6 - 2^4}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Begge disse løsningene ligger innenfor definisjonsområdet til f, så vi har to ekstremalpunkter:

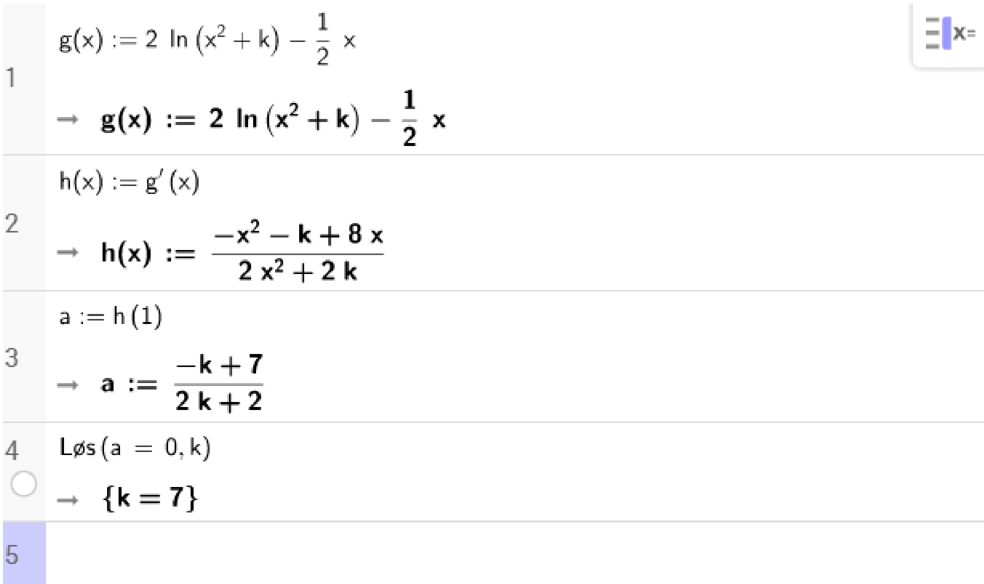
$$p_1 = (x_1, f(x_1)) = \left(4 - 2\sqrt{3}, 2\ln\left((4-2\sqrt{3})^2 + 4\right) - \frac{1}{2}(4-2\sqrt{3})\right) \approx (0.54, 2.64),$$

og

$$p_2 = (x_2, f(x_2)) = \left(4 + 2\sqrt{3}, 2\ln\left((4+2\sqrt{3})^2 + 4\right) - \frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})\right) \approx (7.47, 4.45).$$

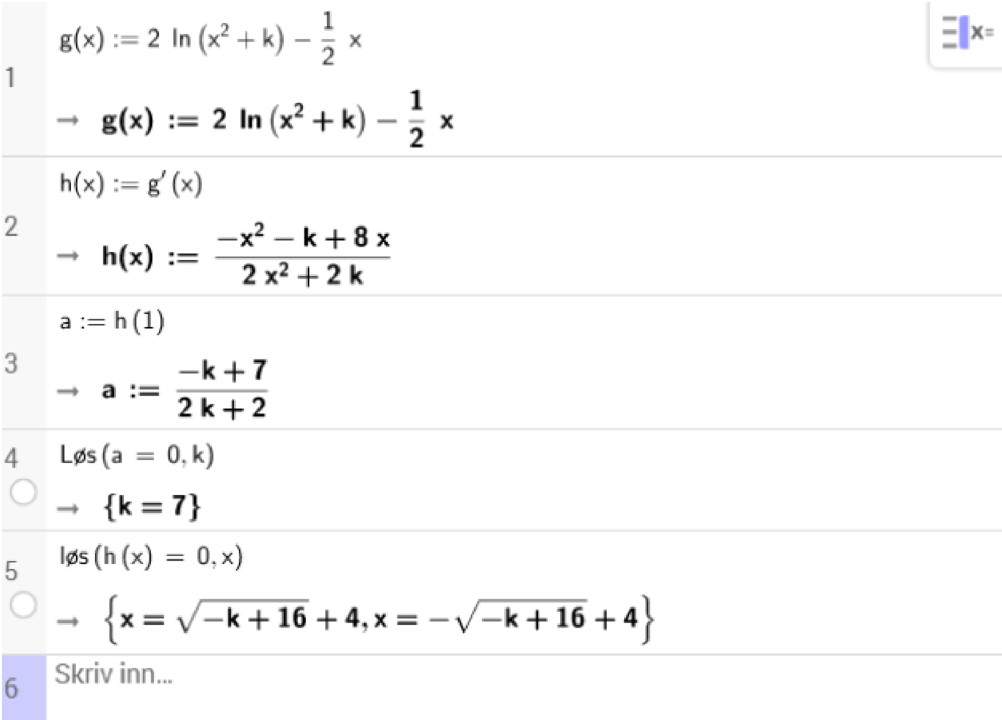
Fra grafen til f ser vi at p_1 er et bunnpunkt og at p_2 er et toppunkt. Ettersom definisjonsmengden til f er et åpent intervall har vi ingen andre ekstremalpunkter.

(c) Vi skriver først inn funksjonen $g(x)$. Dermed definerer vi en funksjon $h(x)$ som $g'(x)$. For å finne ekstremalpunktene til g løser vi likningen $g'(x) = 0$, altså $h(x) = 0$. Vi ønsker at $h(1)$ skal være en løsning for denne likningen. Derfor definerer vi $a = h(1)$, og bruker Løs(<Likning>,<Variabel>) for å løse likningen. Altså skriver vi inn Løs(a=0,k), og får svaret $k = 7$.



(c) Vi tar utgangspunkt i utregningen fra (b), men vi spesifiserer nå ikke x, men finner istedenfor det generelle uttrykket for ekstremalpunktene til g. Disse er gitt ved likningen $h(x) = g'(x) = 0$, så vi bruker Løs(<Likning>,<Variabel>) for å løse denne likningen med hensyn på x. Det vil si, vi skriver inn Løs(h(x)=0,x), og får da løsningene

$$x = 4 - \sqrt{16 - k} \text{ og } x = 4 + \sqrt{16 - k}.$$



Fra dette ser vi at g har 0 ekstremalpunkter når $16 - k < 0$, altså når $k > 16$. Videre har g ett ekstremalpunkt når de to løsningene er den samme, altså når $g'(x) = 0$ har én repetert løsning. Vi finner verdien for k slik at dette er tilfellet:

$$4 + \sqrt{16 - k} = 4 - \sqrt{16 - k}$$
$$2\sqrt{16 - k} = 0$$
$$16 - k = 0$$
$$k = 16.$$

Ellers har vi to distinkte løsninger, så vi får at

$$\text{Antall ekstremalpunkter til } g = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k > 16, \\ 1 & \text{hvis } k = 16, \\ 2 & \text{hvis } k < 16. \end{cases}$$

Oppgave 4

(a)

$$\vec{v}(t) = \vec{OP}'(t) = [4, 3].$$

Banefarten er gitt ved

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

(b) Vi tolker oppgaven som at redningsbåtens kurs er rettlinjet og at dens fart er konstant. Distansen redningsbåten må kjøre for å nå Euler etter fire timer er gitt ved

$$|\vec{OP}(4)| = |[80 + 4 \cdot 4, 16 + 3 \cdot 4]| = |[96, 28]| = \sqrt{96^2 + 28^2} = \sqrt{10000} = 100.$$

Redningsbåten har altså kjørt 100 nautiske mil på 4 timer, så den holder en fart på $\frac{100}{4} = 25$ nm/h.

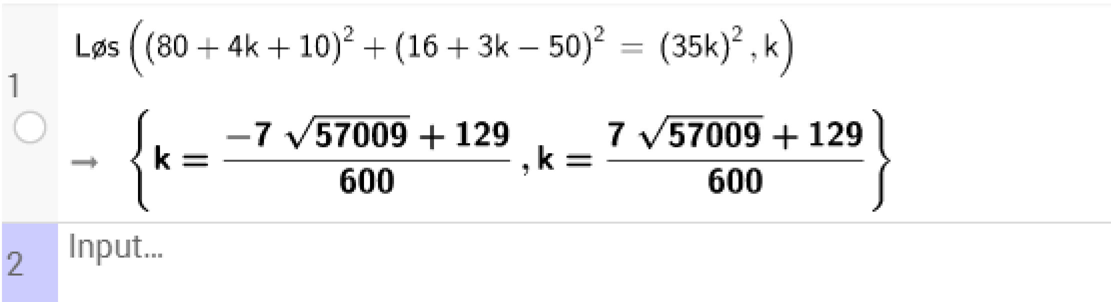
(c) Si at redningsbåten møter Euler etter k timer. Da er Eulers posisjon gitt ved $[80+4k, 16+3k]$. Redningsbåten har reist $35k$ nm, så dens posisjon befinner seg på sirkelen med sentrum i $(-10, 50)$ og radius $35k$. Denne er gitt ved likningen

$$(x+10)^2 + (y-50)^2 = (35k)^2.$$

Substituerer vi Eulers koordinater inn i denne likningen får vi

$$(80+4k+10)^2 + (16+3k-50)^2 = (35k)^2.$$

Vi løser denne likningen med funksjonen `Løs(<Likning>,<Variabel>)`, altså skriver vi inn `Løs((80+4k+10)`^{2}` + (16+3k-50)`^{2}` = (35k)`^{2}`,k)`:



Vi får altså svarene

$$k = \frac{129 - 7\sqrt{57009}}{600} \text{ og } k = \frac{129 + 7\sqrt{57009}}{600}.$$

Ettersom vi krever $k \geq 0$, har vi løsningen

$$k = \frac{129 + 7\sqrt{57009}}{600} \approx 3,$$

altså når redningsbåten Euler etter 3 timer.