

Eksamen R1 Høst 2017 - Løsning

Dennis Christensen

24. november 2017

Del 1 - Uten Hjelpemidler

Oppgave 1

(a)

$$f'(x) = 6x - 2,$$

(b)

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x + 2),$$

(c)

$$h'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} 2 \ln b - \ln \left(\frac{1}{b} \right) - \ln(ab^2) + \ln \left(\frac{a}{b^2} \right) &= 2 \ln b - (\ln 1 - \ln b) - (\ln a + \ln b^2) + (\ln a - \ln b^2) \\ &= 2 \ln b + \ln b - \ln a - 2 \ln b + \ln a - 2 \ln b \\ &= -\ln b. \end{aligned}$$

Oppgave 3

(a)

$$\vec{a} - 2\vec{b} = [3, 1] - 2[4, 2] = [3 - 8, 1 - 4] = [-5, -3],$$

(b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [3, 1] \cdot [4, 2] = 12 + 2 = 14,$$

(c) Vi vet at $\vec{b} \parallel \vec{c} \iff$ det finnes $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at $k\vec{b} = \vec{c}$. Vi finner verdien for t hvor dette stemmer:

$$k\vec{b} = \vec{c}$$

$$k[4, 2] = [t + 1, 3]$$

$$4k = t + 1 \text{ og } 2k = 3.$$

Fra likningen for annenkoordinaten ser vi at $k = \frac{3}{2}$. Dermed får vi at

$$t = 4k - 1 = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

(d)

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{a}| \\ |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 \\ (t+1)^2 + 3^2 &= 3^2 + 1^2 \\ (t+1)^2 &= 1 \\ t+1 &= \pm 1 \\ t &= \pm 1 - 1,\end{aligned}$$

så vi får to løsninger:

$$t = 0 \text{ og } t = -2.$$

Oppgave 4

(a)

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2}xf(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2(x-3)^2 = x(x^2 - 6x^2 + 9) = x^3 - 6x + 9,$$

hvilket skulle vises.

(b) Vi finner ekstremalpunktene til $F(x)$ ved å løse likningen $F'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}F'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-3)(x-1) &= 0,\end{aligned}$$

dermed får løsningen $x = 1$ (ettersom $0 < x < 3$). For å bekrefte at dette er et maksimumspunkt undersøker vi $F''(1)$. Først har vi at

$$F''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2).$$

Ettersom

$$F''(1) = 6(-1) = -6 < 0,$$

vet vi at F når et toppunkt når $x = 1$. Dermed er arealet til $\triangle ABC$ størst mulig når $x = 1$.

(c)

$$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2.$$

For å undersøke om noen andre x -verdier gir samme areal, løser vi likningen $F(x) = 2$:

$$\begin{aligned}F(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x = 2 \\ x^3 - 6x^2 + 9x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Vi vet at $x = 2$ er en løsning for denne likningen, så vi kan faktorisere $F(x) - 2$ via polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r}
x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x - 2)(x^2 - 4x + 1) \\
- x^3 + 2x^2 \\
\hline
- 4x^2 + 9x \\
4x^2 - 8x \\
\hline
x - 2 \\
- x + 2 \\
\hline
0
\end{array}$$

Vi må altså undersøke om $x^2 - 4x + 1 = 0$ har noen løsninger. ABC -formelen gir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Nå, ettersom $1^2 < \sqrt{3}^2 = 3 < 2^2$ konkluderer vi at $1 < \sqrt{3} < 2$, så kun løsningen $x = 2 - \sqrt{3}$ ligger i definisjonsmengden til F . Dermed har vi altså funnet én annen x -verdi hvor arealet er lik 2, nemlig $x = 2 - \sqrt{3}$.

Oppgave 5

(a) Vi har 10 valg for hvert siffer, så

$$\text{antall mulige koder} = 10^4 = 10,000$$

.

(b) Ettersom rekkefølgen til tallene er irrelevant, er hver kode entydig bestemt av et valg av 4 forskjellige tall fra 0 til 9, så

$$\text{antall mulige koder} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1} = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 210.$$

(c) Vi kan regne direkte at

$$\begin{aligned}
\binom{10}{10} &= \binom{10}{10} = 1, \\
\binom{10}{9} &= \binom{10}{1} = 10, \\
\binom{10}{8} &= \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 = 45, \\
\binom{10}{7} &= \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120, \\
\binom{10}{6} &= \binom{10}{4} = 210, \\
\binom{10}{5} &= \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 252,
\end{aligned}$$

ser vi at antallet mulige koder er største mulig når vi må velge 5 tall. I dette tilfellet er antall mulige koder lik 252.

Oppgave 6

(a)

$$O\vec{M} = O\vec{A} + \frac{1}{2}A\vec{C} = [3, -2] + \frac{1}{2}[1 - 3, 4 + 2] = [3, -2] + [-1, 3] = [2, 1],$$

så $M = (2, 1)$, hvilket skulle vises.

(b) Vi ønsker å vise at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer. Det vil si, vi må vise at l går gjennom punktet $(2, 1)$ og at $\vec{a} = [3, 1]$ er ortogonal med $A\vec{C}$. Nå, vi vet at $M = (2, 1)$, så ettersom l krysser punktet M , krysser l punktet $(2, 1)$, som ønsket. Videre har vi at

$$A\vec{C} \cdot \vec{a} = [-2, 6] \cdot [3, 1] = -6 + 6 = 0,$$

så $\vec{a} \perp A\vec{C}$, og derfor har vi bekreftet at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer.

(c) Vi ønsker å undersøke om det finnes $t \in \mathbb{R}$ slik at $(2 + 3t, 1 + t) = (12, \frac{9}{2})$. Løser vi likningen for førstekoordinaten får vi at $t = \frac{1}{3}(12 - 2) = \frac{10}{3}$. Vi substituerer dette inn i likningen for annenkoordinaten: Ettersom

$$1 + \frac{10}{3} = \frac{3 + 10}{3} = \frac{13}{3} \neq \frac{9}{2},$$

ser vi at punktet $(12, \frac{9}{2})$ ikke ligger på linja l .

(d) Vi finner en parameterfremstilling for midtnormalen λ til AB . Linjestykkets midtpunkt μ er gitt ved posisjonsvektoren

$$O\vec{\mu} = O\vec{A} + \frac{1}{2}A\vec{B} = [3, -2] + \frac{1}{2}[9 - 3, 4 + 2] = [3, -2] + [3, 3] = [6, 1],$$

og vi kan eksempelvis bruke normalvektoren $\vec{a} = [1, -1]$ (ettersom $\vec{a} \cdot A\vec{B} = 0$), så midtnormalen λ har en parameterfremstilling gitt ved

$$\lambda: \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases}.$$

For å finne skjæringspunktet setter vi henholdsvis x - og y -koordinatene til l og λ lik hverandre:

$$2 + 3t = 6 + s \text{ og } 1 + t = 1 - s.$$

Vi adderer likningene for å eliminere s -variabelen og får at

$$3 + 4t = 7$$

$$t = 1.$$

Substituerer vi dette inn i parameterfremstillingen for l ser vi at skjæringspunktet har koordinatene $(2 + 3 \cdot 1, 1 + 1) = (5, 2)$.

Oppgave 7

(a) Ettersom

$$x = 1 \implies x^2 = 1^2 = 1,$$

mens

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \not\Rightarrow x = 1,$$

har vi at

$$x^2 = 1 \boxed{\Leftarrow} x = 1.$$

(b) Ettersom

$$f(x) = 5x^2 - 1 \implies f'(x) = 10x,$$

mens

$$f'(x) = 10x \implies f(x) = 5x^2 + \text{konstant} \not\Rightarrow f(x) = 5x^2 - 1,$$

har vi at

$$f(x) = 5x^2 - 1 \boxed{\implies} f'(x) = 10x.$$

Oppgave 8

Vi vet at en tangent er en rett linje, altså forventer vi et lineært funksjonsuttrykk. Tangenten til f i punktet $(t, f(t))$ har stigningstall $f'(t)$, og er derfor gitt ved likningen

$$y(x) - f(t) = f'(t)(x - t).$$

Altså,

$$y(x) = f'(t)x - tf'(t) + f(t),$$

så denne linja vil krysse origo hvis og bare hvis konstantleddet, altså $f(t) - tf'(t)$, er 0. Nå, fra kjerneregelen har vi at

$$f'(t) = -e^{1-t}.$$

Vi finner så riktig t -verdi ved å løse likningen $f(t) - tf'(t) = 0$:

$$e^{1-t} - t(-e^{1-t}) = 0$$

$$e^{1-t} + te^{1-t} = 0$$

$$e^{1-t}(1+t) = 0$$

$$1+t = 0$$

$$t = -1.$$

Dette gir altså stigningstall

$$f'(-1) = -e^{1+1} = -e^2,$$

så likningen for tangenten er gitt ved

$$y = -e^2x.$$

Del 2 - Med Hjelpemidler

Oppgave 1

(a) Ettersom avspillingen skjer med tilbakelegging har vi at

$$p = \mathbb{P}(\text{Kygo spilles}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2,$$

hvilket skulle vises.

(b) Avspillingen skjer med tilbakelegging, så vi har en binomisk sannsynlighetsfordeling. Vi får dermed at

$$\mathbb{P}(\text{to Kygo-sanger spilles}) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048,$$

så sannsynligheten for at nøyaktig to Kygo-sanger blir spilt er 0,2048.

(c) La n være antall sanger Jakob hører. Vi har at

$$\mathbb{P}(\text{minst én Kygo-sang spilles}) = 1 - \mathbb{P}(\text{ingen Kygo-sanger spilles}) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0,8^n.$$

Vi ønsker å undersøke for hvilke n denne verdien er $\geq 0,9$:

$$1 - 0,8^n \geq 0,9$$

$$0,8^n \leq 0,1$$

$$\ln(0,8^n) \leq \ln(0,1)$$

$$n \ln(0,8) \leq \ln(0,1)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \approx 10,32 > 10,$$

hvor vi har snudd ulikhetstegnet ettersom $0,8 < 1$, så $\ln(0,8) < 0$. Dermed ser vi at Jakob må høre minst 11 sanger for at sannsynligheten for at minst én Kygo-sang skal bli avspilt er større enn 90%.

Oppgave 2

(a)

$$\vec{AB} = [6 - 3, 5 - 5] = [3, 0],$$

$$\vec{AC} = [7 - 3, 9 - 5] = [4, 4],$$

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\text{vinkel mellom } \vec{AB} \text{ og } \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{[3, 0] \cdot [4, 4]}{\sqrt{3^2 + 0^2} \sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

så $\angle BAC = 45^\circ$.

(b)

$$\vec{OT} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3} ([3, 5] + [6, 5] + [7, 9]) = \frac{1}{3} [16, 19],$$

så tyngdepunktet T har koordinatene $(\frac{16}{3}, \frac{19}{3})$.

(c) La $F = (x, y)$. Vi bruker definisjonen til tyngdepunktet S for å finne posisjonsvektoren \vec{OS} :

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF})$$

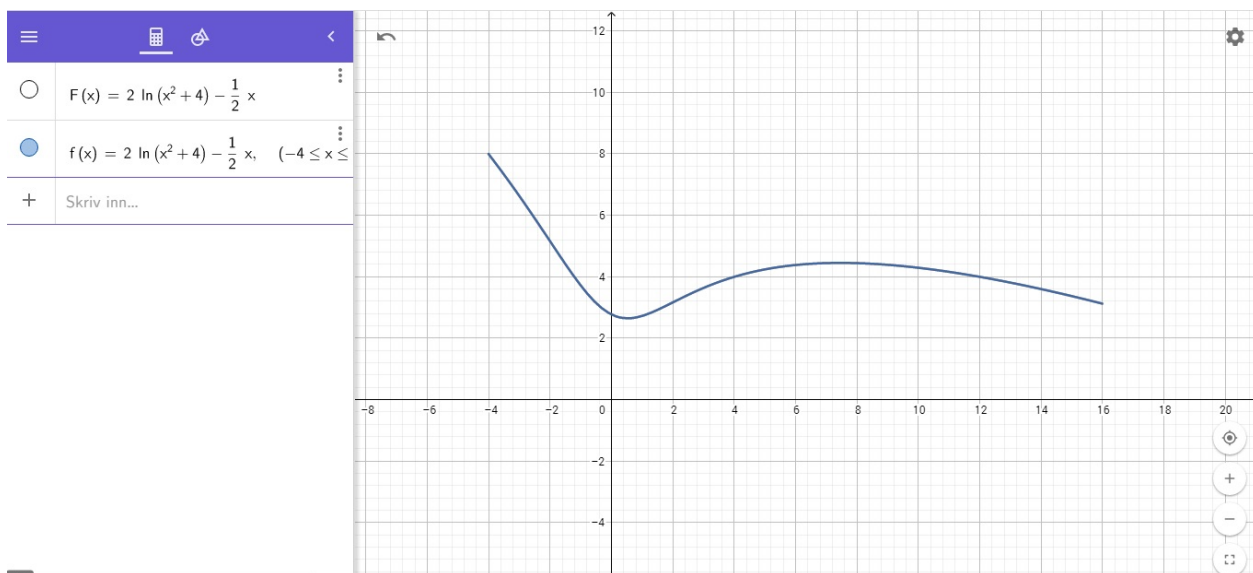
$$[4, 2] = \frac{1}{3} ([2, 3] + [-3, 5] + [x, y])$$

$$[x, y] = 3[4, 2] - [2, 3] - [-3, 5] = [12 - 2 + 3, 6 - 3 - 5] = [13, -2],$$

så $F = (13, -2)$.

Oppgave 3

(a) Vi definerer først funksjonsuttrykket som $F(x)$ i GeoGebra. Deretter bruker vi funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>) for å definere definisjonsmengden, altså skriver vi inn funksjon($F, -4, 16$).



(b) Vi har at

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{1}{2}.$$

For å finne topp- og bunnpunkter på grafen til f løser vi likningen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{4x}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$8x = x^2 + 4$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0.$$

ABC -formelen gir

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{2^6 - 2^4}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Begge disse løsningene ligger innenfor definisjonsområdet til f , så vi har to ekstremalpunkter:


$$p_1 = (x_1, f(x_1)) = \left(4 - 2\sqrt{3}, 2 \ln \left((4 - 2\sqrt{3})^2 + 4\right) - \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3})\right) \approx (0.54, 2.64),$$

og

$$p_2 = (x_2, f(x_2)) = \left(4 + 2\sqrt{3}, 2 \ln \left((4 + 2\sqrt{3})^2 + 4\right) - \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})\right) \approx (7.47, 4.45).$$


Fra grafen til f ser vi at p_1 er et bunnpunkt og at p_2 er et toppunkt. Ettersom definisjonsmengden til f er et åpent intervall har vi ingen andre ekstremalpunkter.

(c) Vi skriver først inn funksjonen $g(x)$. Dermed definerer vi en funksjon $h(x)$ som $g'(x)$. For å finne ekstremalpunktene til g løser vi likningen $g'(x) = 0$, altså $h(x) = 0$. Vi ønsker at $h(1)$ skal være en løsning for denne likningen. Derfor definerer vi $a = h(1)$, og bruker $\text{Løs}(\langle \text{Likning} \rangle, \langle \text{Variabel} \rangle)$ for å løse likningen. Altså skriver vi inn $\text{Løs}(a=0, k)$, og får svaret $k = 7$.

1	$g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$	
	$\rightarrow g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$	
2	$h(x) := g'(x)$	
	$\rightarrow h(x) := \frac{-x^2 - k + 8x}{2x^2 + 2k}$	
3	$a := h(1)$	
	$\rightarrow a := \frac{-k + 7}{2k + 2}$	
4	$\text{Løs}(a = 0, k)$	
	$\rightarrow \{k = 7\}$	
5		

(c) Vi tar utgangspunkt i utregningen fra (b), men vi spesifiserer nå ikke x , men finner istedenfor det generelle uttrykket for ekstremalpunktene til g . Disse er gitt ved likningen $h(x) = g'(x) = 0$, så vi bruker $\text{Løs}(\langle \text{Likning} \rangle, \langle \text{Variabel} \rangle)$ for å løse denne likningen med hensyn på x . Det vil si, vi skriver inn $\text{Løs}(h(x)=0, x)$, og får da løsningene

$$x = 4 - \sqrt{16 - k} \text{ og } x = 4 + \sqrt{16 - k}.$$

1	$g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$	
	$\rightarrow g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$	
2	$h(x) := g'(x)$	
	$\rightarrow h(x) := \frac{-x^2 - k + 8x}{2x^2 + 2k}$	
3	$a := h(1)$	
	$\rightarrow a := \frac{-k + 7}{2k + 2}$	
4	Løs($a = 0, k$)	
	$\rightarrow \{k = 7\}$	
5	Løs($h(x) = 0, x$)	
	$\rightarrow \{x = \sqrt{-k + 16} + 4, x = -\sqrt{-k + 16} + 4\}$	
6	Skriv inn...	

Fra dette ser vi at g har 0 ekstremalpunkter når $16 - k < 0$, altså når $k > 16$. Videre har g ett ekstremalpunkt når de to løsningene er den samme, altså når $g'(x) = 0$ har én repetert løsning. Vi finner verdien for k slik at dette er tilfellet:

$$4 + \sqrt{16 - k} = 4 - \sqrt{16 - k}$$

$$2\sqrt{16 - k} = 0$$

$$16 - k = 0$$

$$k = 16.$$

Ellers har vi to distinkte løsninger, så vi får at

$$\text{Antall ekstremalpunkter til } g = \begin{cases} 0 & \text{hvis } k > 16, \\ 1 & \text{hvis } k = 16, \\ 2 & \text{hvis } k < 16. \end{cases}$$

Oppgave 4

(a)

$$\vec{v}(t) = \vec{OP}'(t) = [4, 3].$$

Banefarten er gitt ved

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

(b) Vi tolker oppgaven som at redningsbåtens kurs er rettlinjett og at dens fart er konstant. Distansen redningsbåten må kjøre for å nå Euler etter fire timer er gitt ved

$$|\vec{OP}(4)| = \sqrt{80^2 + 16^2} = 16\sqrt{16} \approx 81,58,$$

altså 81,58 nm. Dermed holder redningsbåten en fart på $\frac{81,58}{4} \approx 20,40$ nm/h.

(c) Si at redningsbåten møter Euler etter k timer. Da er Eulers posisjon gitt ved $[80 + 4k, 16 + 3k]$. Redningsbåten har reist $35k$ nm, så dens posisjon befinner seg på sirkelen med sentrum i $(-10, 50)$ og radius $35k$. Denne er gitt ved likningen

$$(x + 10)^2 + (y - 50)^2 = (35k)^2.$$

Substituerer vi Eulers koordinater inn i denne likningen får vi

$$(80 + 4k + 10)^2 + (16 + 3k - 50)^2 = (35k)^2.$$

Vi løser denne likningen med funksjonen `Løs(<Likning>, <Variabel>)`, altså skriver vi inn `Løs((80+4k+10)2 + (16+3k-50)2 = (35k)2, k)`:

1	<code>Løs((80 + 4k + 10)² + (16 + 3k - 50)² = (35k)², k)</code>
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{ k = \frac{-7\sqrt{57009} + 129}{600}, k = \frac{7\sqrt{57009} + 129}{600} \right\}$
2	Input...

Vi får altså svarene

$$k = \frac{129 - 7\sqrt{57009}}{600} \text{ og } k = \frac{129 + 7\sqrt{57009}}{600}.$$

Ettersom vi krever $k \geq 0$, har vi løsningen

$$k = \frac{129 + 7\sqrt{57009}}{600} \approx 3,$$

altså når redningsbåten Euler etter 3 timer.