Eksamen R1 Høst 2017 - Løsning

Dennis Christensen

23. november 2017

Del 1 - Uten Hjelpemidler

Oppgave 1

(a)

$$f'(x) = 6x - 2,$$

(b)

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2),$$

(c)

$$h'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned}2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln\left(ab^2\right) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) &= 2\ln b - (\ln 1 - \ln b) - \left(\ln a + \ln b^2\right) + \left(\ln a - \ln b^2\right) \\ &= 2\ln b + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\ &= -\ln b.\end{aligned}$$

Oppgave 3

(a)

$$\vec{a} - 2\vec{b} = [3,1] - 2[4,2] = [3-8, 1-4] = [-5,-3],$$

(b)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = [3,1]\cdot[4,2] = 12 + 2 = 14,$$

(c) Vi vet at $\vec{b} \parallel \vec{c} \iff$ det finnes $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ slik at $k\vec{b} = \vec{c}$. Vi finner verdien for t hvor dette stemmer:

$$k\vec{b} = \vec{c}$$

$$k[4,2] = [t+1, 3]$$

$$4k = t + 1 \text{ og } 2k = 3.$$

Fra likningen for annenkoordinaten ser vi at $k = \frac{3}{2}$. Dermed får vi at

$$t = 4k - 1 = 4\cdot\frac{3}{2} - 1 = 2\cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

(d)

$$
\begin{aligned}
|\vec{c}| &= |\vec{a}| \\
|\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 \\
(t+1)^2 + 3^2 &= 3^2 + 1^2 \\
(t+1)^2 &= 1 \\
t+1 &= \pm 1 \\
t &= \pm 1 - 1,
\end{aligned}
$$

så vi får to løsninger:

$$t = 0 \text{ og } t = -2.$$

Oppgave 4

(a)

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} x f(x) = \frac{1}{2} x \cdot 2(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x + 9,$$

hvilket skulle vises.

(b) Vi finner ekstremalpunktene til $F(x)$ ved å løse likningen $F'(x) = 0$:

$$F'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0,$$

dermed får løsningen $x = 1$ (ettersom $0 < x < 3$). For å bekrefte at dette er et maksimumspunkt undersøker vi $F''(1)$. Først har vi at

$$F''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Ettersom

$$F''(1) = 6(-1) = -6 < 0,$$

vet vi at F når et toppunkt når $x = 1$. Dermed er arealet til $\triangle ABC$ størst mulig når $x = 1$.

(c)

$$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2.$$

For å undersøke om noen andre x-verdier gir samme areal, løser vi likningen $F(x) = 2$:

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 2$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0.$$

Vi vet at $x = 2$ er en løsning for denne likningen, så vi kan faktorisere $F(x) - 2$ via polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = \left(x-2\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) & \\
-\ x^3 + 2x^2 & \\
\hline
-\ 4x^2 + 9x & \\
4x^2 - 8x & \\
\hline
x - 2 & \\
-\ x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Vi må altså undersøke om $x^2 - 4x + 1 = 0$ har noen løsninger. ABC-formelen gir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Nå, ettersom $1^2 < \sqrt{3}^2 = 3 < 42^2$ konkluderer vi at $1 < \sqrt{3} < 2$, så kun løsningen $x = 2 - \sqrt{3}$ ligger i definisjonsmengden til F. Dermed har vi altså funnet én annen x-verdi hvor arealet er lik 2, nemlig $x = 2 - \sqrt{3}$.

Oppgave 5

(a) Vi har 10 valg for hvert siffer, så

$$\text{antall mulige koder } = 10^4 = 10,000$$

.

(b) Ettersom rekkefølgen til tallene er irrelevant, er eher kode entydig bestemt av et valg av 4 forskjellige tall fra 0 til 9, så

$$\text{antall mulige koder } = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1} = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 210.$$

(c) Vi kan regne direkte at

$$\binom{10}{10} = \binom{10}{10} = 0,$$
$$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10,$$
$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 = 45,$$
$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120,$$
$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210,$$
$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!^2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 252,$$

ser vi at antallet mulige koder er største mulig når vi må velge 5 tall. I dette tilfellet er antall mulige koder lik 252.

Oppgave 6

(a)

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = [3, -2] + \frac{1}{2}[1-3, 4+2] = [3, -2] + [-1, 3] = [2, 1],$$

så $M = (2, 1)$, hvilket skulle vises.

(b) Vi ønsker å vise at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer. Det vil si, vi må vise at l går gjennom punktet $(2, 1)$ og at $\vec{a} = [3, 1]$ er ortogonal med $\vec{AC}$. Nå, vi vet at $M = (2, 1)$, så ettersom l krysser punktet M, krysser l punktet $(2, 1)$, som ønsket. Videre har vi at

$$\vec{AC} \cdot \vec{a} = [-2, 6] \cdot [3, 1] = -6 + 6 = 0,$$

så $\vec{a} \perp \vec{AC}$, og derfor har vi bekreftet at den gitte parameterfremstillingen for l stemmer.

(c) Vi ønsker å undersøke om det finnes $t \in \mathbb{R}$ slik at $(2 + 3t, 1 + t) = \left(12, \frac{9}{2}\right)$. Løser vi likningen for førstekoordinaten får vi at $t = \frac{1}{3}(12 - 2) = \frac{10}{3}$. Vi substituerer dette inn i likningen for annenkoordinaten: Ettersom

$$1 + \frac{10}{3} = \frac{3 + 10}{3} = \frac{13}{3} \neq \frac{9}{2},$$

ser vi at punktet $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ ikke ligger på linja l.

(d) Vi finner en parameterfremstilling for midtnormalen λ til AB. Linjestykkets midtpunkt μ er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{O\mu} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = [3, -2] + \frac{1}{2}[9-3, 4+2] = [3, -2] + [3, 3] = [6, 1],$$

og vi kan eksempelvis bruke normalvektoren $\vec{\alpha} = [1, -1]$ (ettersom $\vec{\alpha} \cdot \vec{AB} = 0$), så midtnormalen λ har en parameterfremstilling gitt ved

$$\lambda : \quad \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases} .$$

For å finne skjæringspunktet setter vi henholdsvis x- og y-koordinatene til l og λ lik hverandre:

$$2 + 3t = 6 + s \text{ og } 1 + t = 1 - s.$$

Vi adderer likningene for å eliminere s-variabelen og får at

$$3 + 4t = 7$$

$$t = 1.$$

Substituerer vi dette inn i parameterfremstillingen for l ser vi at skjæringspunktet har koordinatene $(2 + 3 \cdot 1, 1 + 1) = (5, 2)$.

Oppgave 7

(a) Ettersom

$$x = 1 \implies x^2 = 1^2 = 1,$$

mens

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1 \;\not\Longrightarrow\; x = 1,$$

har vi at

$$x^2 = 1 \;\boxed{\;\Longleftarrow\;}\; x = 1.$$

(b) Ettersom

$$f(x) = 5x^2 - 1 \implies f'(x) = 10x,$$

mens

$$f'(x) = 10x \implies f(x) = 5x^2 + \text{konstant} \;\not\Longrightarrow\; f(x) = 5x^2 - 1,$$

har vi at

$$f(x) = 5x^2 - 1 \;\boxed{\;\Longrightarrow\;}\; f'(x) = 10x.$$

Oppgave 8

Vi vet at en tangent er en rett linje, altså forventer vi et lineært funksjonsuttrykk. Tangenten til f i punktet $(t, f(t))$ har stigningstall $f'(t)$, og er derfor gitt ved likningen

$$y(x) - f(t) = f'(t)(x - t).$$

Altså,

$$y(x) = f'(t)x - tf'(t) + f(t),$$

så denne linja vil krysse origo hvis og bare hvis konstantleddet, altså $f(t) - tf'(t)$, er 0. Nå, fra kjerneregelen har vi at

$$f'(t) = -e^{1-t}.$$

Vi finner så riktig t-verdi ved å løse likningen $f(t) - tf'(t) = 0$:

$$e^{1-t} - t\left(-e^{1-t}\right) = 0$$

$$e^{1-t} + te^{1-t} = 0$$

$$e^{1-t}(1 + t) = 0$$

$$1 + t = 0$$

$$t = -1.$$

Dette gir altså stigningstall

$$f'(-1) = -e^{1+1} = -e^2,$$

så likningen for tangenten er gitt ved

$$y = -e^2 x.$$