Utdanningsdirektoratet

Eksamen

23.11.2017

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \ln(x^3 - 1)$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

Oppgåve 3 (6 poeng)

Vektorane $\vec{a} = [3,\ 1]$, $\vec{b} = [4,\ 2]$ og $\vec{c} = [t+1,\ 3]$ er gitt, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem $\vec{a} - 2\vec{b}$

b) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$

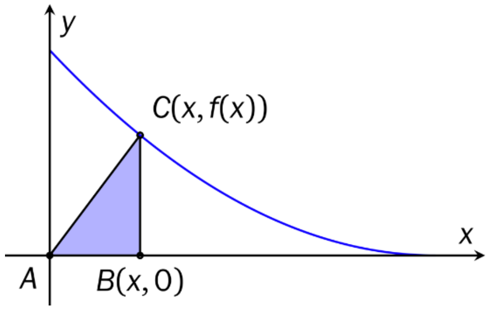
c) Bestem t slik at $\vec{b} \parallel \vec{c}$

d) Bestem t slik at $|\vec{c}| = |\vec{a}|$

Oppgåve 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2(x-3)^2 \quad , \quad 0 < x < 3$$



Ein rettvinkla $\triangle ABC$ er gitt ved punkta $A(0, 0)$, $B(x, 0)$ og $C(x, f(x))$. Sjå skissa til høgre.

a) Vis at arealet F til $\triangle ABC$ kan skrivast som

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

b) Bestem x slik at arealet til $\triangle ABC$ blir størst mogleg.

c) Bestem arealet når $x = 2$. Er det andre x-verdiar som gir dette arealet?

Oppgåve 5 (6 poeng)

Ein nøkkelboks er ein boks med plass til nøklar. Nokre slike boksar har kodelås.

For éin type nøkkelboks blir det laga ein kode ved å stille inn fire tal. Kvart tal blir valt blant tala 0 til 9. Eit tal kan veljast fleire gonger. Tala må vere stilte inn i ei bestemt rekkjefølgje.

a) Kor mange ulike kodar finst det for denne typen nøkkelboks?

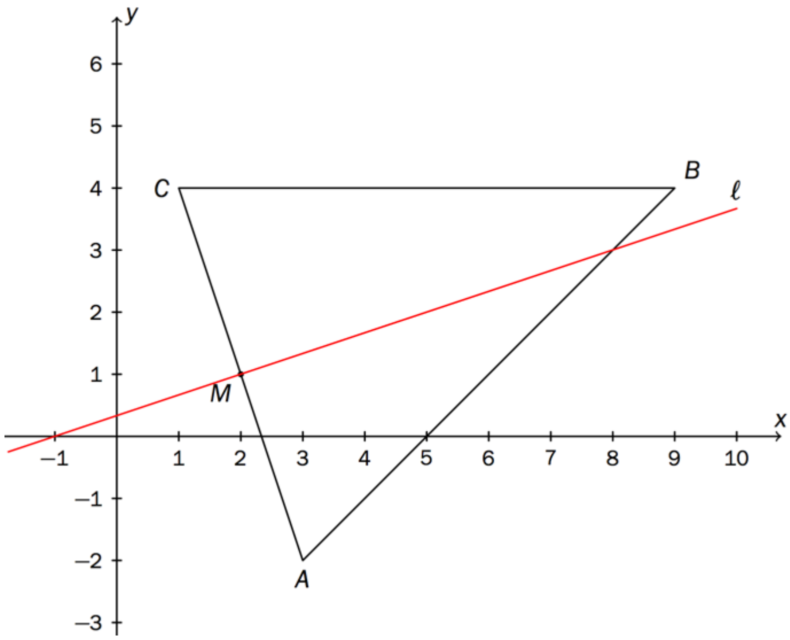
For ein annan type nøkkelboks blir det laga ein kode ved å velje bestemte forskjellige tal blant tala 0 til 9. Tala treng ikkje å vere stilte inn i ei bestemt rekkjefølgje.

b) Kor mange ulike kodar finst det for denne typen nøkkelboks dersom koden skal bestå av fire forskjellige tal?

c) Kor mange tal må koden bestå av for at talet på moglege kodar skal bli størst mogleg? Kor mange moglege kodar er det da?

Oppgåve 6 (7 poeng)

Ein $\triangle ABC$ har hjørna $A(3, -2)$, $B(9, 4)$ og $C(1, 4)$. Punktet M er midtpunktet på AC.



a) Vis ved vektorrekning at M har koordinatane $M(2, 1)$.

La ℓ vere midtnormalen til AC.

b) Forklar at

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

er ei parameterframstilling for ℓ.

c) Avgjer om punktet $\left(12, \dfrac{9}{2}\right)$ ligg på ℓ.

d) Bestem koordinatane til skjeringspunktet mellom ℓ og midtnormalen til AB.

Oppgåve 7 (3 poeng)

Nedanfor er det gitt nokre utsegner. Skriv av utsegnene. I boksen mellom utsegnene skal du setje inn eitt av symbola $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Hugs å grunngi svara.

a) $x^2 = 1 \quad \boxed{} \quad x = 1$

b) $f(x) = 5x^2 - 1 \quad \boxed{} \quad f'(x) = 10x$

Oppgåve 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{1-x}$$

Grafen til f har ein tangent som går gjennom origo. Bestem likninga for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Jakob har ei speleliste med 20 songar på mobilen sin. Fire av songane på spelelista er med artisten Kygo. Programmet speler av songane i tilfeldig rekkjefølgje (shuffle) med tilbakelegging. Det vil seie at den same songen kan bli spelt av fleire gonger etter kvarandre.

a) Forklar at sannsynet alltid er $p = 0{,}2$ for at neste song som blir spelt, er med Kygo.

b) Jakob vil høyre på fem avspelingar frå spelelista. Bestem sannsynet for at nøyaktig to av songane han speler, er med Kygo.

c) Kor mange avspelingar må han høyre på for at sannsynet for å få høyre minst éin song med Kygo skal vere større enn 90 %?

Oppgåve 2 (5 poeng)

Ein $\triangle ABC$ har hjørna $A(3\,,\,5)$, $B(6{,}5)$ og $C(7{,}9)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og bruk vektorrekning til å bestemme $\angle BAC$.

Tyngdepunktet T til ein trekant med hjørna *A*, *B* og *C* er generelt gitt ved

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$, der *O* er origo.

b) Bestem, ved vektorrekning, koordinatane til tyngdepunktet *T* til $\triangle ABC$.

Ein $\triangle DEF$ er gitt. To av hjørna er $D(2{,}3)$ og $E(-3{,}5)$. Tyngdepunktet er $S(4\,,\,2)$.

c) Bestem koordinatane til hjørnet F .

Oppgåve 3 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}x$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f når $x \in \langle -4, 16 \rangle$.

b) Bestem eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = 2\ln(x^2 + k) - \frac{1}{2}x \quad , \quad k > 0 \; .$$

c) Bruk CAS til å bestemme k slik at g har eit ekstremalpunkt i $x = 1$.

d) Bruk mellom anna CAS til å bestemme kor mange ekstremalpunkt g har for ulike verdiar av k.

Oppgåve 4 (6 poeng)

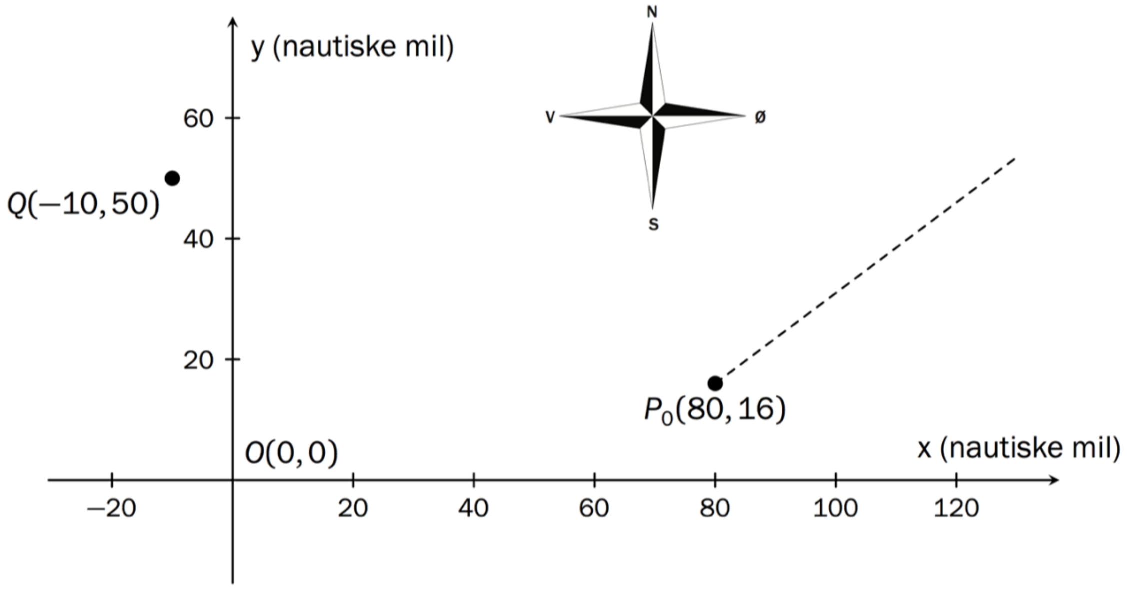
På havet blir avstandar målte i nautiske mil (nm).

1 nm = 1852 m

Skipet *Euler* sender ut ei melding om at det har fått motorstopp. Kapteinen oppgir at posisjonen er $P_0(80,\ 16)$ i eit bestemt koordinatsystem. På grunn av avdrifta vil posisjonen P (i nm) t timar seinare vere gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = [80+4t,\ 16+3t]$$

a) Kva fartsvektor $\vec{v}$ driv skipet med? Kor stor er farten (banefarten)?



Ein redningsbåt som ligg i O, seier at han er klar til å gå mot skipet og kan vere ved *Euler* om 4 timar.

b) Kor stor fart held redningsbåten?

Ein annan redningsbåt er i posisjonen $Q(-10,\ 50)$ når meldinga blir send. Denne båten kan halde ein fart på 35 nm/h.

c) Bruk CAS til å bestemme kor lang tid det vil gå før denne redningsbåten kan vere framme ved *Euler*.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \ln(x^3 - 1)$

Oppgave 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [3,\ 1]$, $\vec{b} = [4,\ 2]$ og $\vec{c} = [t+1,\ 3]$ er gitt, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem $\vec{a} - 2\vec{b}$

b) Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$

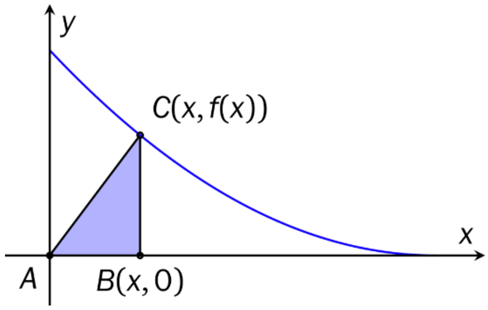
c) Bestem t slik at $\vec{b} \parallel \vec{c}$

d) Bestem t slik at $|\vec{c}| = |\vec{a}|$

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2(x-3)^2 \quad , \qquad 0 < x < 3$$



En rettvinklet $\triangle ABC$ er gitt ved punktene $A(0,\ 0)$, $B(x, 0)$ og $C(x,\ f(x))$. Se skissen til høyre.

a) Vis at arealet F til $\triangle ABC$ kan skrives som

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

b) Bestem x slik at arealet til $\triangle ABC$ blir størst mulig.

c) Bestem arealet når $x = 2$. Er det andre x-verdier som gir dette arealet?

Oppgave 5 (6 poeng)

En nøkkelboks er en boks med plass til nøkler. Noen slike bokser har kodelås.

For én type nøkkelboks lages en kode ved å stille inn fire tall. Hvert tall velges blant tallene 0 til 9. Et tall kan velges flere ganger. Tallene må være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

a) Hvor mange ulike koder finnes det for denne typen nøkkelboks?

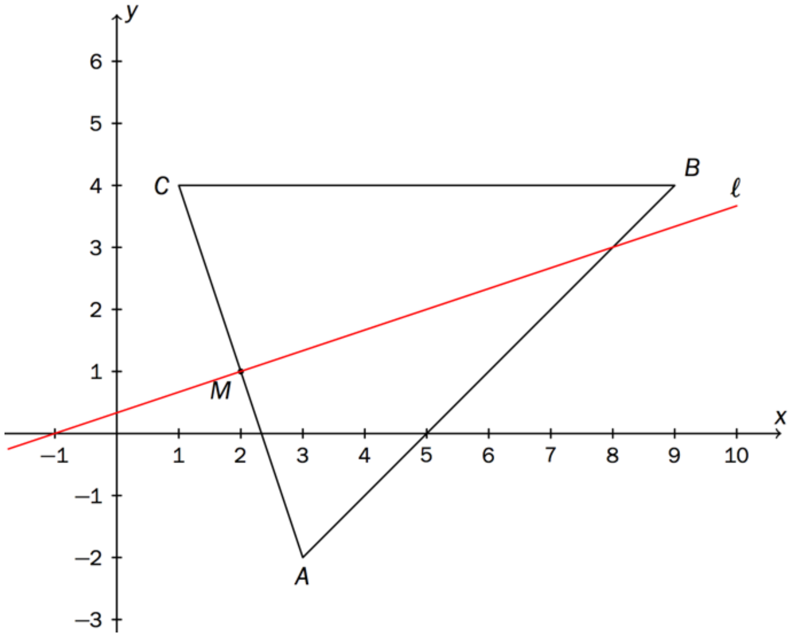
For en annen type nøkkelboks lages en kode ved å velge et bestemt antall forskjellige tall blant tallene 0 til 9. Tallene trenger ikke å være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

b) Hvor mange ulike koder finnes for denne typen nøkkelboks dersom koden skal bestå av fire forskjellige tall?

c) Hvor mange tall må koden bestå av for at antallet mulige koder skal bli størst mulig? Hvor mange mulige koder er det da?

Oppgave 6 (7 poeng)

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A(3,-2)$, $B(9, 4)$ og $C(1, 4)$. Punktet M er midtpunktet på AC.



a) Vis ved vektorregning at M har koordinatene $M(2, 1)$.

La ℓ være midtnormalen til AC.

b) Forklar at

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

er en parameterframstilling for ℓ.

c) Avgjør om punktet $\left(12, \dfrac{9}{2}\right)$ ligger på ℓ.

d) Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom ℓ og midtnormalen til AB.

Oppgave 7 (3 poeng)

Nedenfor er det gitt noen utsagn. Skriv av utsagnene. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Husk å begrunne svarene.

a) $x^2 = 1 \quad \boxed{} \quad x = 1$

b) $f(x) = 5x^2 - 1 \quad \boxed{} \quad f'(x) = 10x$

Oppgave 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{1-x}$$

Grafen til f har en tangent som går gjennom origo. Bestem likningen for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Jakob har en spilleliste med 20 sanger på mobilen sin. Fire av sangene på spillelisten er med artisten Kygo. Programmet spiller av sangene i tilfeldig rekkefølge (shuffle) med tilbakelegging. Det vil si at samme sang kan bli spilt av flere ganger etter hverandre.

a) Forklar at sannsynligheten alltid er $p = 0{,}2$ for at neste sang som blir spilt, er med Kygo.

b) Jakob vil høre på fem avspillinger fra spillelisten. Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av sangene han spiller, er med Kygo.

c) Hvor mange avspillinger må han høre på for at sannsynligheten for å få høre minst én sang med Kygo skal være større enn 90 %?

Oppgave 2 (5 poeng)

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A(3,\ 5)$, $B(6,5)$ og $C(7,9)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og bruk vektorregning til å bestemme $\angle BAC$.

Tyngdepunktet T til en trekant med hjørnene A, B og C er generelt gitt ved

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \text{der } O \text{ er origo.}$$

b) Bestem, ved vektorregning, koordinatene til tyngdepunktet T til $\triangle ABC$.

En $\triangle DEF$ er gitt. To av hjørnene er $D(2,3)$ og $E(-3,5)$. Tyngdepunktet er $S(4,\ 2)$.

c) Bestem koordinatene til hjørnet F.

Oppgave 3 (8 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = 2\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}x$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f når $x \in \langle -4, 16 \rangle$

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til *f*.

Funksjonen *g* er gitt ved

$$g(x) = 2\ln(x^2 + k) - \frac{1}{2}x \quad , \quad k > 0 \ .$$

c) Bruk CAS til å bestemme *k* slik at *g* har et ekstremalpunkt i $x = 1$.

d) Bruk blant annet CAS til å bestemme hvor mange ekstremalpunkt g har for ulike verdier av *k*.

Oppgave 4 (6 poeng)

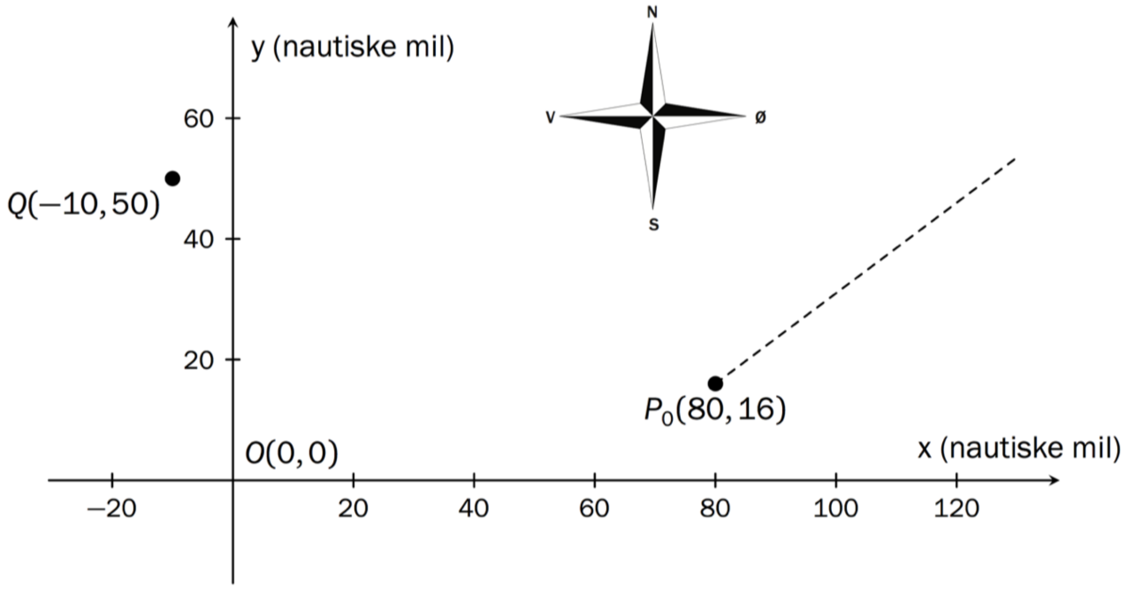
Skipet *Euler* sender ut en melding om at det har fått motorstopp. Kapteinen oppgir at posisjonen er $P_0(80, 16)$ i et bestemt koordinatsystem. På grunn av avdriften vil posisjonen P (i nm) t timer senere være gitt ved

På havet måles avstander i nautiske mil (nm).

1 nm = 1852 m

$$\overrightarrow{OP} = [80 + 4t,\ 16 + 3t]$$

a) Hvilken fartsvektor $\vec{v}$ driver skipet med? Hvor stor er farten (banefarten)?



En redningsbåt som ligger i O, sier at den er klar til å gå mot skipet og kan være ved *Euler* om 4 timer.

b) Hvor stor fart holder redningsbåten?

En annen redningsbåt er i posisjonen $Q(-10, 50)$ når meldingen blir sendt. Den kan holde en fart på 35 nm/h.

c) Bruk CAS til å bestemme hvor lang tid det vil gå før denne redningsbåten kan være framme ved *Euler*.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet