Del 1: Uten hjelpemidler – 3 timer

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene.

a) $f(x)=\dfrac{1}{6\pi}\sin(2\pi x)$ **b)** $g(x)=\ln x\cdot\cos(2x)$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene.

a) $\int(3x^2+2x+1)\,dx$ **b)** $\int\dfrac{e^x}{e^x-2}\,dx$ **c)** $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$

Oppgave 3 (7 poeng)

Ei kule er gitt ved likningen

$$x^2-6x+y^2-2y+z^2+2z+2=0$$

a) Bestem sentrum S og radius r i kula.

b) Vis at punktet $A(1,-1,0)$ ligger på kuleflata.

c) Finn en parameterframstilling for linja l som går gjennom S og A.

d) Ei linje m går gjennom S og er parallell med z-aksen. La u være vinkelen mellom linjene l og m.
Finn $\cos u$.

e) Linja m skjærer kuleflata i to punkter. La B være det skjæringspunktet som har størst z-koordinat.
Finn arealet av ΔABS.

Oppgave 4 (4 poeng)

Løs likningen $\sin x-\cos x=k$ når

a $k=0$ og $x\in[0°, 360°\rangle$

b $k=1$ og $x\in[-2\pi, 2\pi]$

Oppgave 5 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a\sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til funksjonen har et toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmeste bunnpunktet til høyre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a) Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

b) Lag en skisse av grafen til f for $x \in [0, 12]$.

Oppgave 6 (6 poeng)

I en geometrisk rekke er det første leddet 16 og det fjerde leddet 2.

a Bestem det andre, tredje og *n*-te leddet i rekka.

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$16 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} + \dots \quad , \quad x \neq 0$$

b Bestem *x* slik at summen av rekka er 24.

En annen uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$16 + \frac{8}{\cos x} + \frac{4}{\cos^2 x} + \dots \quad , \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

c Begrunn at rekka konvergerer for alle *x* i den oppgitte definisjonsmengden.

Oppgave 7 (3 poeng)

Ta for deg differensiallikningen $y' = 2xy$.

a Hva er stigningstallet for tangenten til integralkurven som går gjennom punktet (3 , 4)?

b Finn den generelle løsningen på likningen.

Oppgave 8 (2 poeng)

Gitt rekken 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2*n*

Vis ved induksjon at summen av de *n* første leddene i rekken kan skrives som $S_n = n + n^2$.

Del 2: Med hjelpemidler – 2 timer

Oppgave 9 (5 poeng)

En pasient får 8 mL av en medisin hver time. Den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, er $y(t)$ mL. I løpet av en time skiller kroppen ut 5 % av den totale medisinmengden.

a) Forklar at

$$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$$

b) Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

c) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgave 10 (6 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$$

der $y = 4$ og $y' = 1$ når $x = 0$.

a) Finn den spesielle løsningen $y = f(x)$.

b) Skriv $f(x)$ som et produkt av én eksponentialfunksjon og én sinusfunksjon.

c) Finn digitalt ekstremalpunktene til *f* i intervallet $[0, 2\pi]$.

d) Finn nullpunktene til f i intervallet $[0, 2\pi]$.

Oppgave 11 (7 poeng)

Ei kule *K* har sentrum i $S(1,1,1)$ og radius $r = 2$.

a) Finn likningen for det planet som tangerer kula i punktet $P(2, 1+\sqrt{2}, 2)$ på kuleoverflaten.

b) Vis at punktene $A = \left(2, 2, 1+\sqrt{2}\right)$, $B = \left(0, 1+\sqrt{2}, 2\right)$ og $C = \left(1,1,3\right)$ alle ligger på overflaten av kula *K*.

c) Finn sentrum og radius i skjæringssirkelen mellom kula *K* og planet gjennom *A*, *B* og *C*.

d) Bestem høyden og volumet av tetraederet *ABCS*.

Oppgave 12 (6 poeng)

Et flatestykke *G* er begrenset av den positive *x*-aksen, den positive *y*-aksen og grafen til funksjonen *g* gitt ved

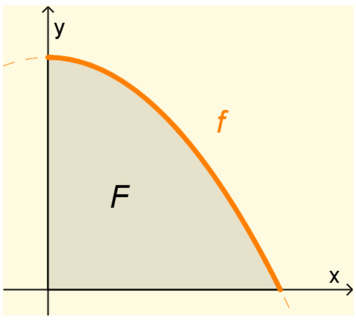
$$g(x) = 4 - x^2$$

Finn arealet av flatestykket *G*.

a) Finn volumet av det omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket *G* 360° om *x*-aksen.

Et flatestykke *F* er begrenset av den positive *x*-aksen, den positive *y*-aksen og grafen til funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = c - ax^2, \quad a > 0 \text{ og } c > 0$$



c) Bruk CAS til å finne et uttrykk for volumet av det omdreiningslegemet vi får når vi dreier flatestykket *F* 360° om *x*-aksen.

d) Bruk CAS til å bestemme konstantene *a* og *c* når volumet av omdreiningslegemet i oppgave c er 100 og arealet av *F* er 10.

Lykke til! ☺