Terminprøve R2 21.04.2017

DEL 1
Uten hjelpemidler (36 poeng)

Oppgave 1 (3 poeng:1+2)

Deriver funksjonene

a $f(x) = 2\cos 2x$

b $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x$

Oppgave 2 (6 poeng)

Regn ut integralene

a $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} x \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3 (7 poeng: 2+1+2+2)

Punktene $A(0\,,0\,,0)$, $B(1\,,-1\,,2)$ og $C(2\,,2\,,3)$ er gitt.

a Vis at likningen for planet α gjennom de tre punktene er gitt ved $-7x + y + 4z = 0$.

b Undersøk om punktet $(2\,,-3\,,3)$ ligger i planet α.

c Bestem skjæringspunktet mellom planet α og linja *l* gitt ved

$$l:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

d Gitt punktet $D(1\,,1\,,3k)$. Bestem *k* slik at volumet av tetraedret *ABCD* er 10.

Oppgave 4 (4 poeng)

Grafen til en funksjon på formen $f(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$ har toppunkt i (5.14 , 5). Det første bunnpunktet til høyre for toppunktet er (11.42 , 1).

a Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) + 3$.

b Lag en skisse av grafen til *f* for $x \in [0, 4\pi]$, og bruk den til å løse likningen

$2\sin\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) + 3 = 0$

Oppgave 5 (6 poeng)

Gitt rekka $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$

a Bestem konvergensområdet til rekka.

b Bestem *x* slik at summen av rekka blir $\dfrac{3}{2}$.

c Vis ved induksjon at $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Oppgave 6 (4 poeng)

a Løs differensiallikningen $y'' - 2y' - 3y = 0$.

b Finn den spesielle løsningen som har en tangent med stigningstall -2 i punktet $(0, 1)$.

Oppgave 7 (6 poeng)

Gitt funksjonen $g(x) = \cos x$.

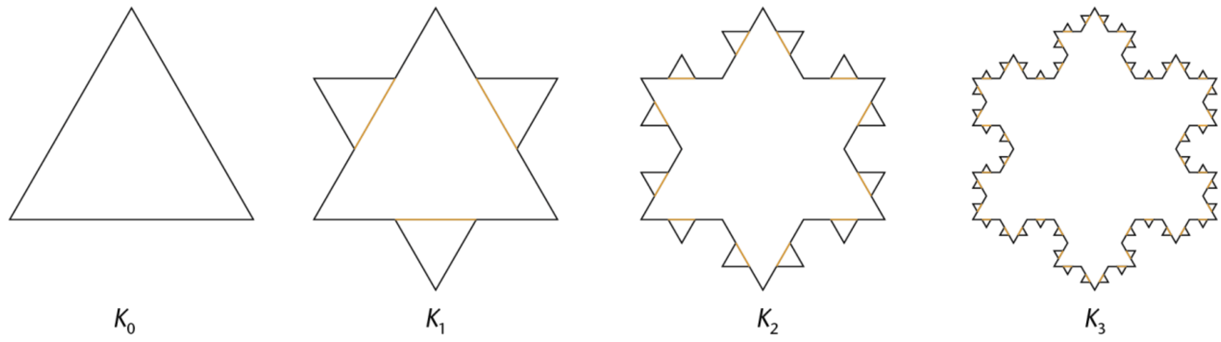
a Finn arealet av området avgrenset av grafen til *g*, *x*-aksen og linjene $x = 0$ og $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

b En trigonometrisk formel er gitt ved $\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$. Bruk blant annet denne formelen til å vise at $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$.

c Bestem volumet av omdreiningslegemet vi får når grafen til *g* dreies $360°$ om *x*-aksen mellom $x = 0$ og $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ekstraoppgave (8 poeng)Erstatter 8 valgfrie andre poeng, unntatt oppgave 5

I denne oppgaven skal vi se på den interessante fraktalen Kochs snøkrystall. En fraktal er en matematisk figur med et mønster som gjentas i det uendelige.



Kochs snøkrystall tar utgangspunkt i en likesidet trekant K_0 der sidene har lengde 1. Vi utfører så disse 3 punktene på hvert linjestykke i figuren:

1. Del linjestykket i tre like lange deler.
2. Tegn en likesidet trekant med den midtre delen fra punkt 1 som grunnlinje. Den nye trekanten skal peke utover.
3. Fjern så det linjestykket som er grunnlinja i den nye trekanten fra punkt 2.

Når vi har gjort dette på hvert linjestykke, får vi en ny figur. Deretter gjennomfører vi de 3 punktene ovenfor på den nye figuren osv. Den første nye figuren kaller vi K_1, den andre K_2 osv. Når vi gjentar denne prosessen i det uendelige, får vi Kochs snøkrystall K. Vi kan dermed si at $K = \lim_{n\to\infty} K_n$.

a) Vis at arealet A_0 av trekanten K_0 er gitt ved $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vi kan vise at arealet A_n av figuren K_n er gitt ved at

$$A_n - A_0 = \frac{A_0}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{A_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{A_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^3\cdot\frac{A_0}{3} + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{A_0}{3}$$

b) Finn arealet A_2 av figuren K_2.

c) Vis at uttrykket for $A_n - A_0$ er en geometrisk rekke og bruk den til å finne arealet A av Kochs snøkrystall K.

d) Hver gang vi lager en ny figur, blir antallet linjestykker firedoblet, men lengden av hvert linjestykke i den nye figuren blir en tredel av lengden av linjestykkene i den foregående figuren.
Bruk dette til å finne omkretsen O_4 av K_4.

e) Finn et uttrykk for omkretsen O_n av figuren K_n.
Hva kan du ut fra dette si om omkretsen av Kochs snøkrystall?

DEL 2
Med hjelpemidler (24 poeng)

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 8 (6 poeng)

Annar og Dag Jonas har vært på ferietur og kommer hjem til hver sin leilighet. Begge blir møtt av en bananflueinvasjon.

Annar tror det er 150 bananfluer i leiligheten sin, mens Dag Jonas finner 120 bananfluer hjemme hos seg. Fluene formerer seg raskt. I Annar sin leilighet er vekstfarten målt i fluer per time til enhver tid 1,5 % av fluetallet. I leiligheten til Dag Jonas er vekstfarten 2 % av fluetallet. Etter *t* timer er det $N_1(t)$ bananfluer hos Annar og $N_2(t)$ bananfluer hos Dag Jonas.

a) Sett opp de differensiallikningene og de betingelsene som funksjonene N_1 og N_2 må oppfylle.

b) Finn fluetallet etter 24 timer hos Annar og hos Dag Jonas hvis de ikke gjør noen tiltak.

Annar og Dag Jonas bestemte seg for at begge skulle drepe 3 fluer i timen.

c) Sett opp de differensiallikningene som funksjonene N_1 og N_2 nå må oppfylle.

d) Løs differensiallikningene og finn de nye uttrykkene $N_1(t)$ og $N_2(t)$.
Hvem får først utryddet bananfluene?

Oppgave 9 (6 poeng)

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 7x^2 + 9x$.

a Tegn grafen til *f* for $x \in [0, 7]$.

b Finn arealet av området som er avgrenset av *x*-aksen og grafen til *f*.

c Bruk CAS til å bestemme *k* slik at $\int_0^k (x^3 - 7x^2 + 9x)\,\mathrm{d}x = 0$. Kommenter svaret.

Oppgave 10 (4 poeng)

En aritmetisk rekke har $a_5 = 23$ og $S_{20} = 1010$.

a Sett opp et likningssett med to likninger og to ukjente med utgangspunkt i opplysningene ovenfor.

b Bruk CAS til å finne a_1 og differansen *d*.

Oppgave 11 (8 poeng)

Gitt tre punkter $A(2\,,4\,,0)$, $B(4\,,1\,,0)$ og $C(3\,,5\,,3)$.

a Vis at planet som inneholder $\triangle ABC$, er gitt ved $-9x - 6y + 5z = -42$.

b Vis at $P\left(3\,,3\,,\dfrac{3}{5}\right)$ ligger i planet.

c Punktet *P* er sentrum i en kule som tangerer planet $\beta\colon\ 2x + y - 5z = 2$. Finn likningen for kula.

d Kuleflaten i oppgave c danner en skjæringssirkel med *xy*-planet. Vis at radius i denne skjæringssirkelen er $\sqrt{\dfrac{13}{75}}$.