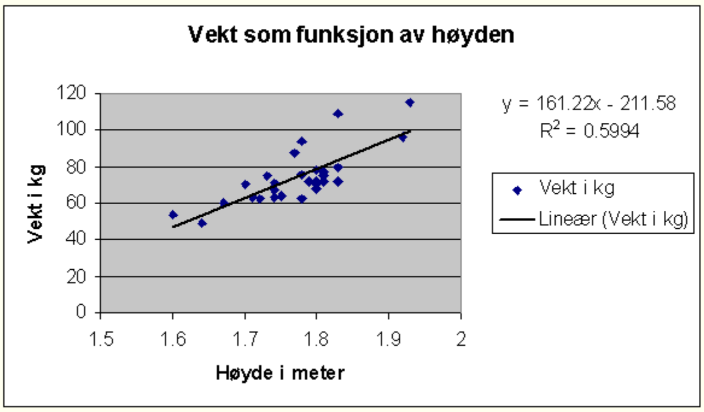
Kapittel 3. Matematiske modeller

En matematisk modell er en funksjon som mer eller mindre bra beskriver en praktisk situasjon.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hvordan lage en matematisk modell ved hjelp av gitte opplysninger.
- Hvordan finne en matematisk modell ut fra en tabell med observerte sammenhenger mellom to størrelser (regresjon).
- Hvordan finne mønster i et tallmateriale.



Mål for kapittel 3. Matematiske modeller

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre målinger i praktiske forsøk og formulere matematiske modeller på grunnlag av observerte data
- analysere praktiske problemstillinger knytte til dagligliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller
- utforske matematiske modeller, sammenligne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon, og vurdere hvilken informasjon modellene kan gi, og hvilket gyldighetsområde og begrensninger de har
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hva vi mener med en matematisk modell
- ☐ hvordan jeg legger inn data fra en tabell i et regneark i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg utfører regresjonsanalyse i GeoGebra for å finne en matematisk modell

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en matematisk modell
- ☐ hvordan jeg finner mønster i tall og figurer

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ velge hvilken modell som passer best til en praktisk situasjon
- ☐ forklare hvilken informasjon en matematisk modell kan gi
- ☐ argumentere for en modell sitt gyldighetsområde og hvilke begrensninger den har

Utforskende oppgave – Strikkhopp med Barbie og Ken

Kilder (hentet 07.06.2017):

http://www.caspar.no/tangenten/2005/inspirasjonshefte2005.pdf s. 122-128 og

http://www.ntnu.no/documents/2004699/2c5c784d-cbe2-452d-8d37-5934c34bbb40

I denne oppgaven skal du la Barbie eller Ken hoppe i strikk og bestemme en sammenheng mellom antall strikk og fallhøyden. Sammenhengen skal du bruke til å gjøre en praktisk beregning.

Problemstilling 1: Bestem sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Utstyr:

- En Barbie- eller Ken dukke
- Strikk
- Målebånd
- Papir og blyant
- GeoGebra

Oppgave:

1. Bind strikk rundt bena på Barbie
2. Slipp dukka fra en gitt høyde og mål fallhøyden (la Barbie falle med hodet først)
3. Lag en tabell som viser sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Antall strikk												
Fallhøyde (cm)												

4. Finn et uttrykk for sammenhengen mellom fallhøyde og antall strikk ved hjelp av regresjon i GeoGebra

(Lim inn GeoGebra bildet her)

f(x) =

5. Forklar hva de ulike konstantene i funksjonen uttrykker:

Problemstilling 2: Bruk modellen du kom frem til og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke i strikkhoppet for akkurat å bare bli våt i håret

Utstyr:

Et kar med vann hvor vannflaten står ________ cm under Barbies hoppunkt.

Oppgave:

1. Bruk modellen og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke

(Lim inn GeoGebra bildet her)

Antall strikk:

2. La Barbie hoppe med dette antallet strikk og undersøk om din beregning stemmer. Resultat:

Feilkilder:

Har dette forsøket noen feilkilder?

1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra "virkeligheten". Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

2.1 Lineære modeller

Eksempel 1

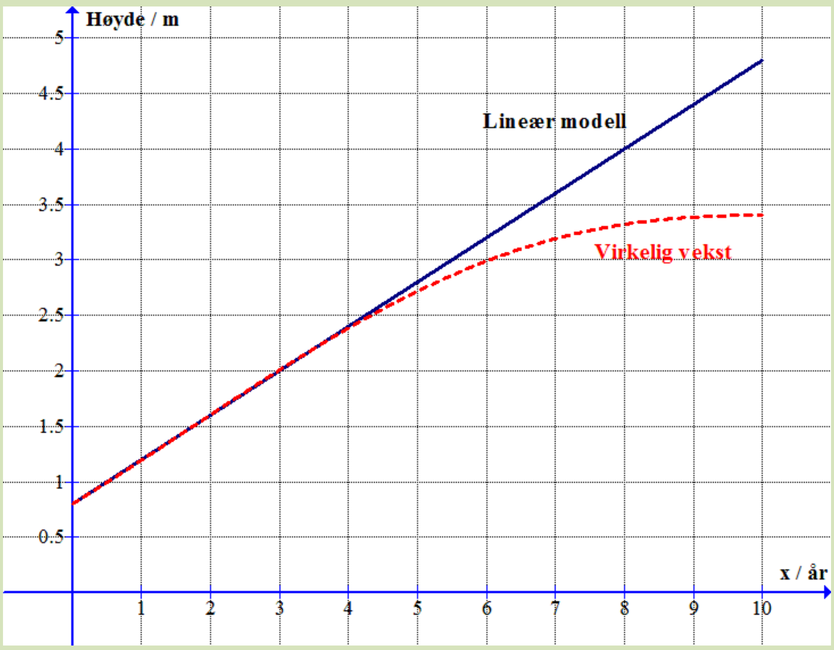
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for x, kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$ m.

Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er x mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik: $x \in [0, 5]$.

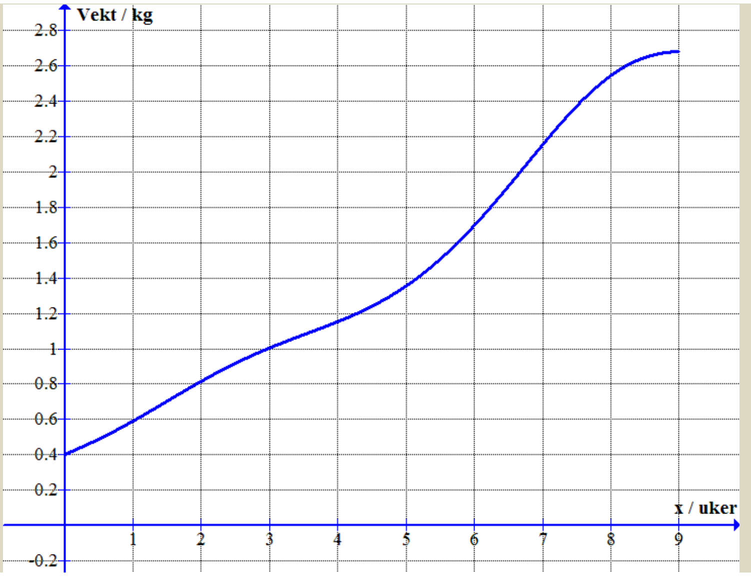


Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.

a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten $v(x)$ som passer bra for de fem første ukene.

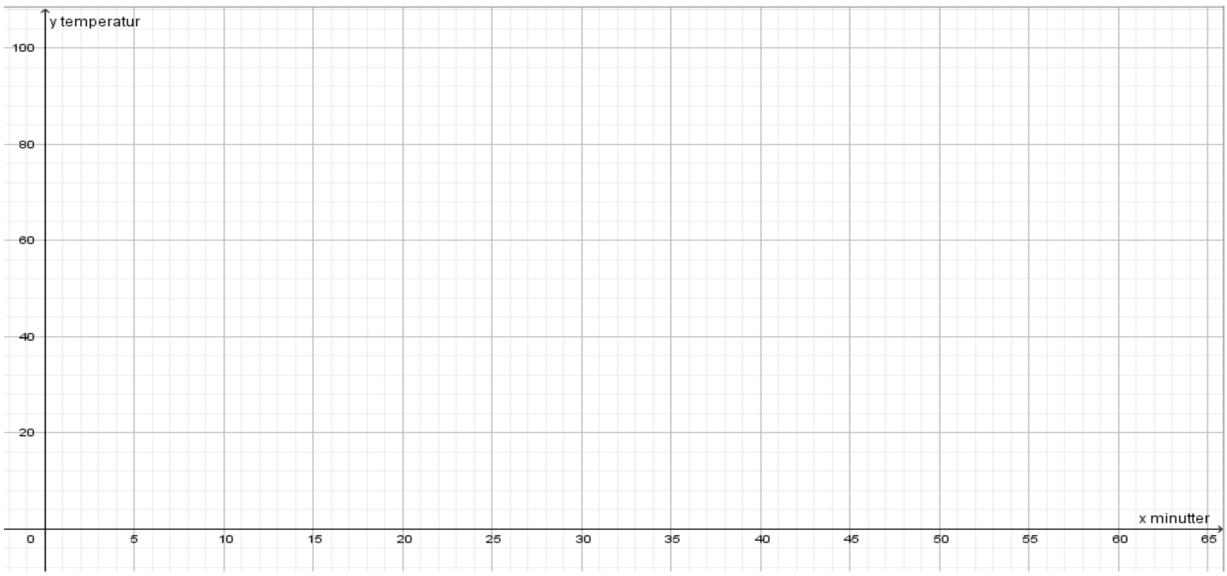


Oppgave 2

Anta at temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

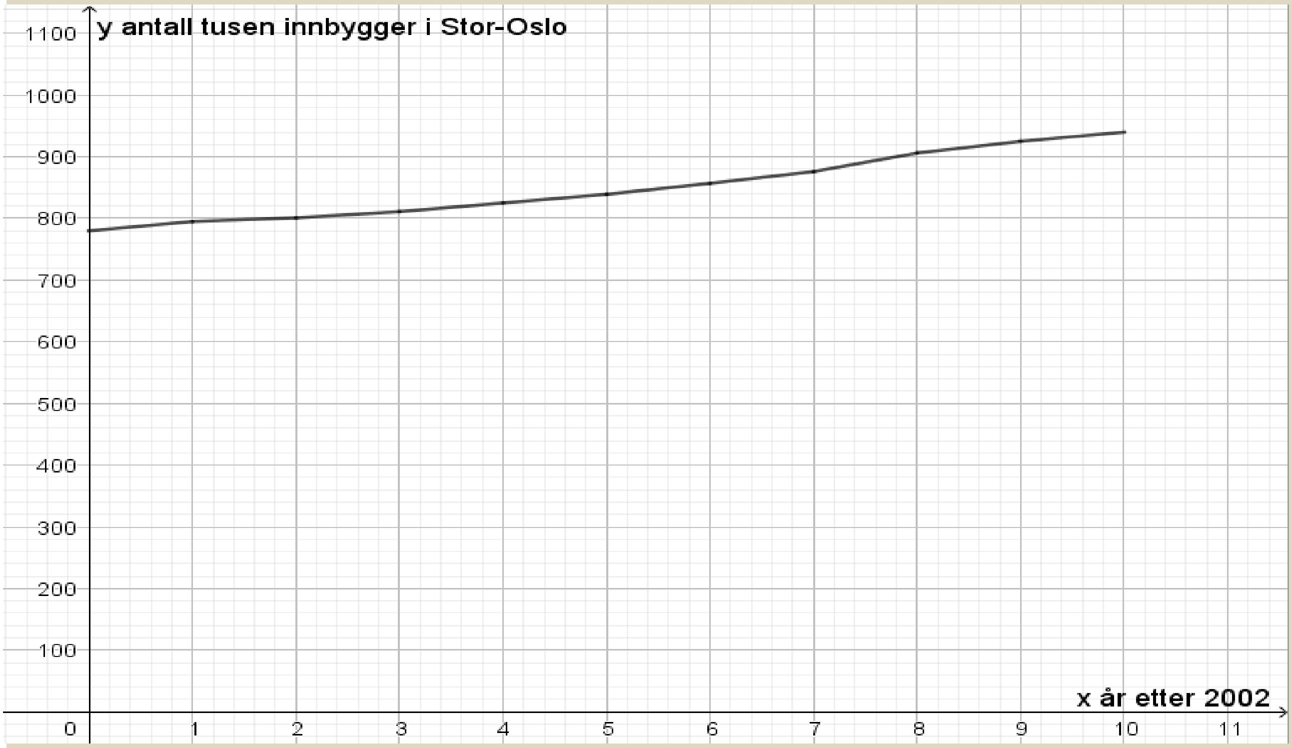
a) Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?
b) Lag en lineær modell som beskriver temperaturen T i koppen etter x minutter.
c) Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?
d) Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?
e) Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når x øker.
f) Tegn grafen til modellen.

g)  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.



Oppgave 3

Stor-Oslo er en betegnelse på et geografisk område som inkluderer Oslo og Akershus, samt flere kommuner i Buskerud, Oppland, Vestfold og Østfold. Diagrammet nedenfor viser utviklingen i antall innbyggere i dette området fra 2002, målt i antall 1000 innbyggere.



a) Omtrent hvor mange mennesker bodde i Stor-Oslo i 2007?
b) Hvor mye økte innbyggertallet i Stor-Oslo i gjennomsnitt per år fra 2002 til 2012?
c) Lag en lineær modell som viser innbyggertallet i Stor-Oslo x år etter 2002.

2.2 Eksponentielle modeller

Eksempel 2

I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.

Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.

Temperaturforskjellen er 22 – (-8) = 30 grader i starten.

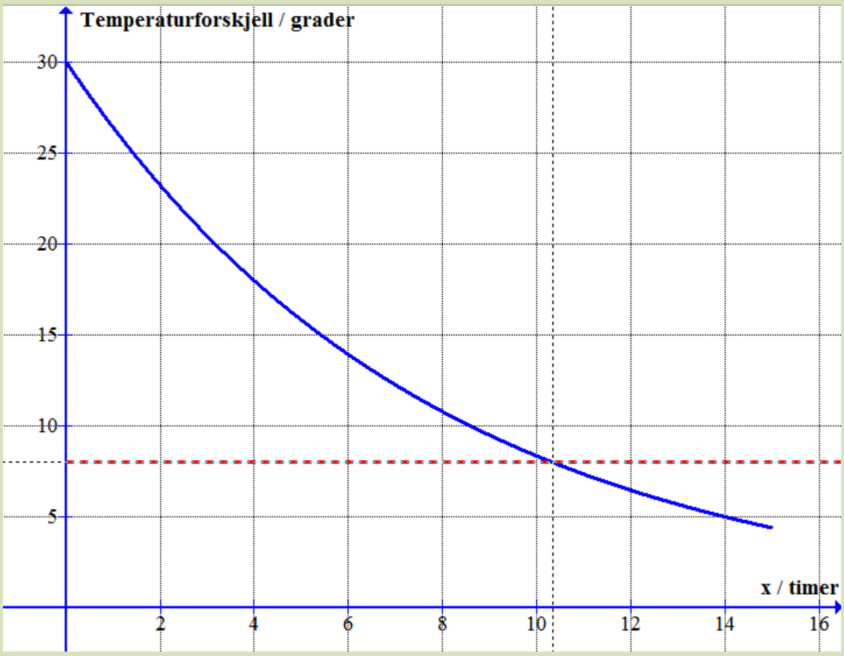
Vekstfaktoren er 100 % – 12 % = 88 % = 0,88.

Vi kaller antall timer som har gått for x. Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0{,}88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.

Når er innetemperaturen null?
Vi tegner grafen til *f* med **Funksjon(30*0.88^x,0,15)**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen $y = 8$, viser at dette skjer etter 10,4 timer.

Oppgave 4

I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

a) Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
b) Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

Oppgave 5

Antall registrerte store rovdyr i Norge 2018 var på 180 stk. Dette er en nedgang på 20 stk. fra 2017. Anta at denne nedgangen fortsetter frem til 2025.

La $x = 0$ være 2017, $x = 1$ være 2018 osv.

a) Lag en lineær modell som viser utviklingen i antall store rovdyr i Norge i perioden 2017 – 2025, og tegn grafen i GeoGebra.
b) Lag en eksponentiell modell som viser utviklingen i antatall store rovdyr i samme periode, og tegn grafen i samme koordinatsystem som grafen i oppgave a).

Forskere antar at det vil være ca. 100 store rovdyr i Norge i 2025
c) Hvilken av modellene du fant i oppgave a) og b) passer best ut fra denne antakelsen?

3. Å lage en matematisk modell ved hjelp av regresjon (kurvetilpasning)

3.1 Lineær regresjon

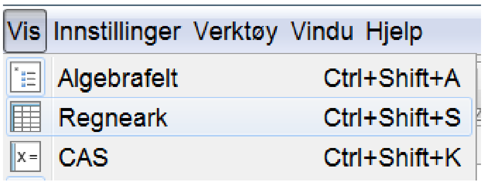
Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under **Innstillinger, Avrunding**. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

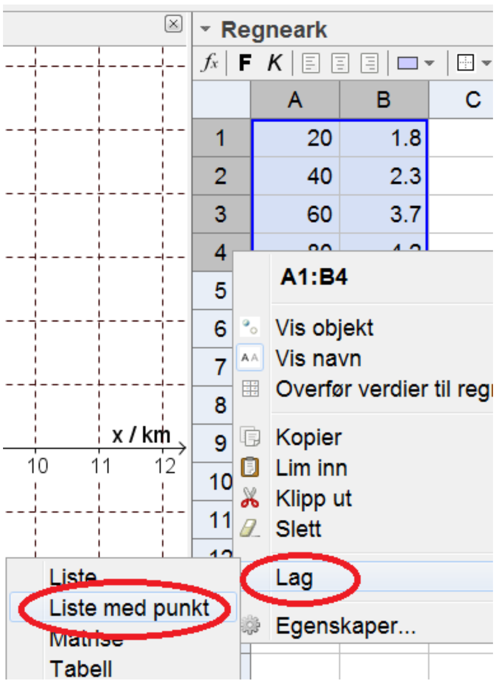
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder x / år	20	40	60	80
TV-tid y / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

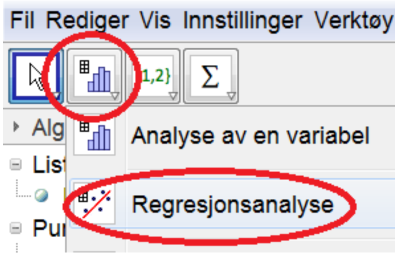
Vi åpner regnearket i Geogebra:

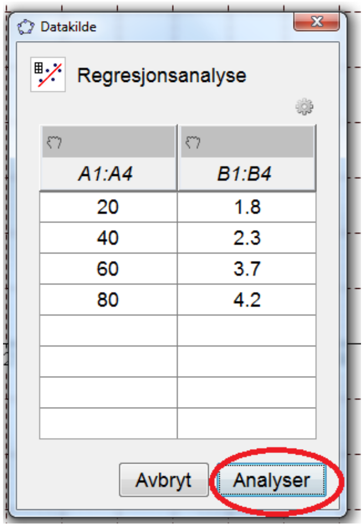


Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

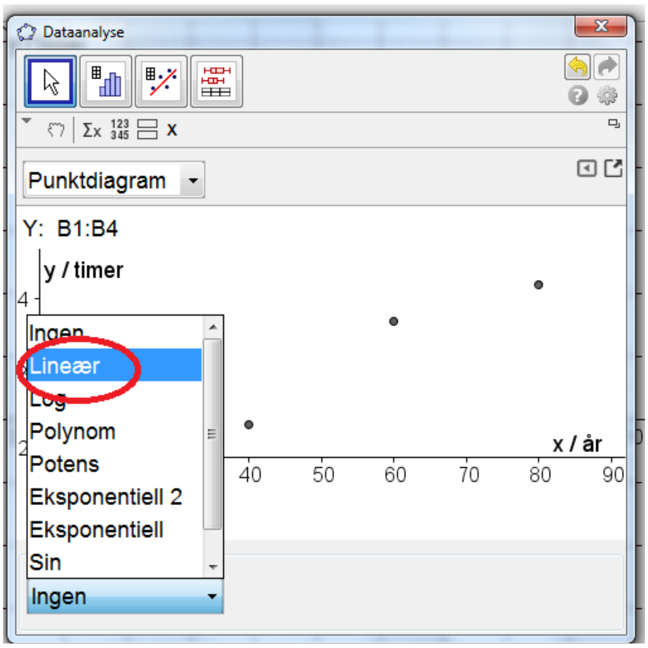


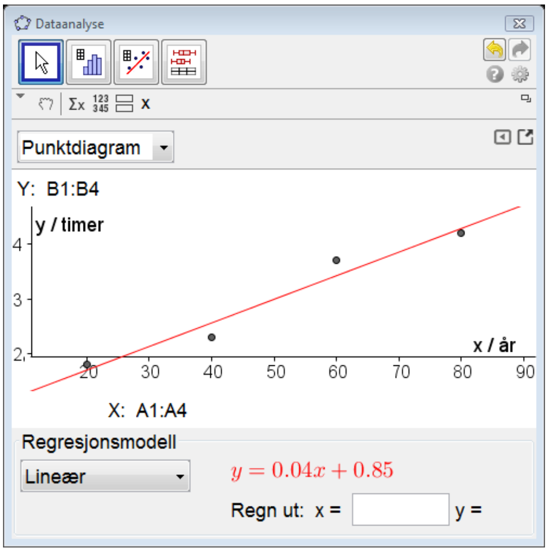
Så velger vi regresjonsanalyse:





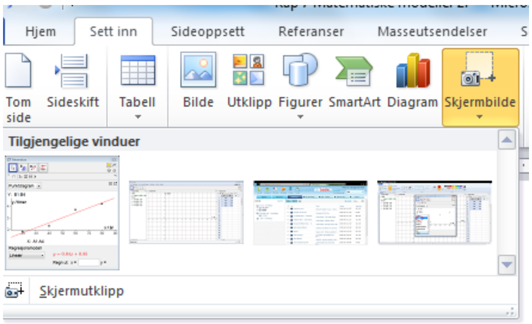
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er $y = 0,04x + 0,85$.

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.

Ut fra dette kan vi si at $f(x) = 0,04x + 0,85$ er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$ timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for x hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ($x = 0$) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

Oppgave 3

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

a) Finn ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
b) Hva var folketallet i 2010 (x = 60) ifølge denne modellen?
c) Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
d) Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

3.2 Polynomregresjon

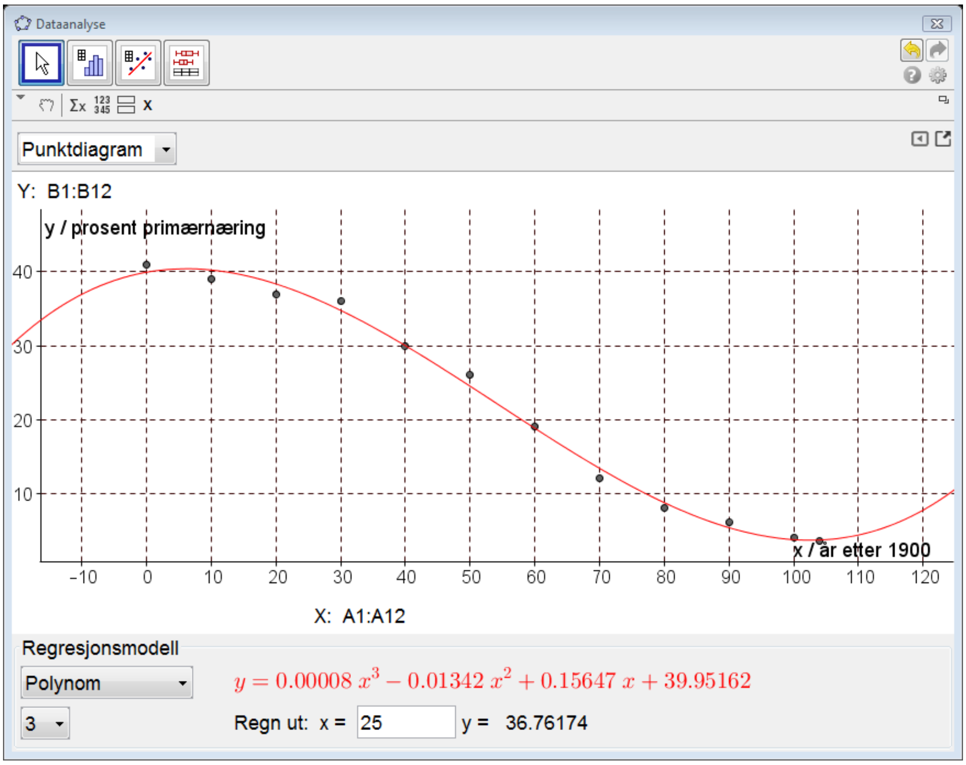
År	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**	**1940**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2004**
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
y/‰	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la x være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3.5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$. (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor x ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut $f(25)$ ved å skrive $x = 25$ inn i Geogebravinduet (se ovenfor). Da finner vi $f(25) = 37$ %.

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av x i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut $f(120)$. Geogebra gir da ca. 8 %.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8 % i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

Oppgave 4

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen $O(x)$ er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
O	0	20	35	50	100	150	175	160

a) La x være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.
b) Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?
c) I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?
d) Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet(time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene.,

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

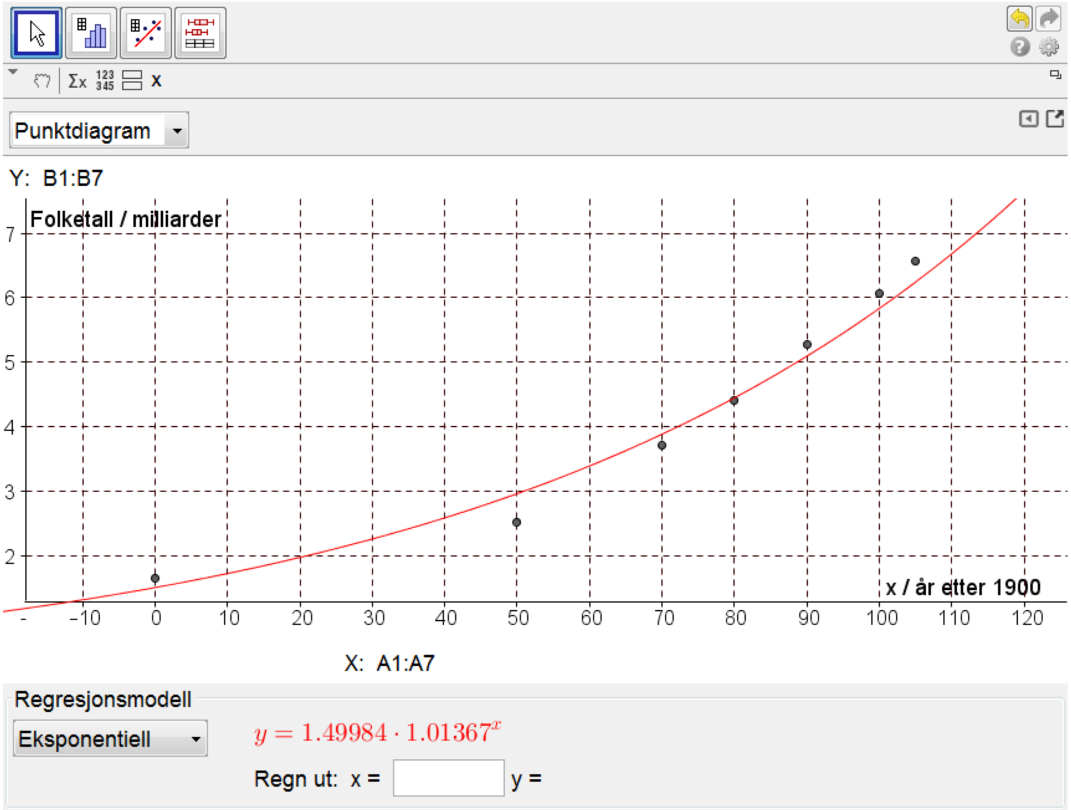
År	**Folketall (milliarder)**
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar x være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til $x = 0$, 1950 svarer til $x = 50$ osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

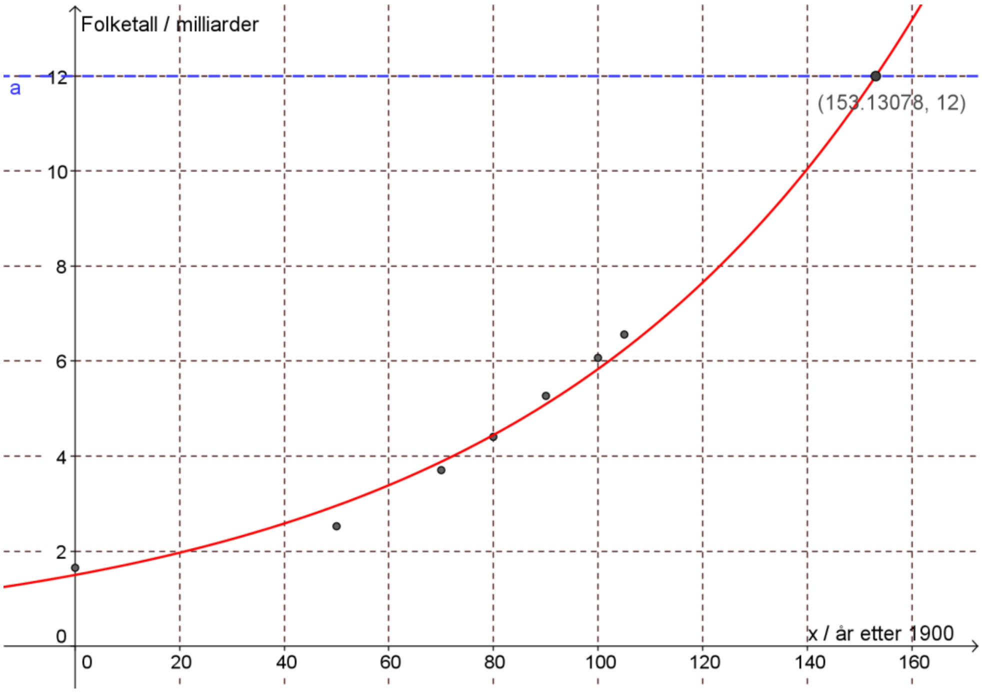
Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:



Funksjonen som passer best (passe avrundet) er $f(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}014^x$.

Fra vekstfaktoren 1,014 = 101,4 % ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte 101,4 % - 100 % = 1,4 % i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja y = 12 og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:



Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

Oppgave 5

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

a) Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der $x = 0$ svarer til 1975.
b) Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
c) Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
d) En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

Oppgave 9

Antall fremmede arter i naturen i Norge har en ekstrem økning. Hvert år registreres nye tilfeller av fremmede arter i Norge. Mange av dem gjør stor skade i naturen og koster samfunnet mye penger.

Tabellen nedenfor viser antall registrerte fremmede arter i Norge siden oppstart av registreringen på 1800-tallet.

Årstall	1800	1850	1900	1950	2000	2012
Antall fremmede arter	10	150	360	1050	1980	2650

a) La x være antall år etter 1800, og bruk regresjon til å vise at $F(x)= 22.5 \cdot 1.024^x$ er en modell som beskriver utviklingen av antall nye fremmede arter i Norge.

b) Hvor mange prosent har antall fremmede arter økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til F(x) fra 1800 til 1950 og fra 1950 til 2012?
Gi en praktisk tolkning av svarene.

Ifølge forskerne som til daglig jobber med registrering av fremmede arter i Norge, så antas det at siste målinger i 2018 vil vise 3500 antall fremmede arter i Norge og at i 2024 vil det være opp 5000 fremme arter.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.

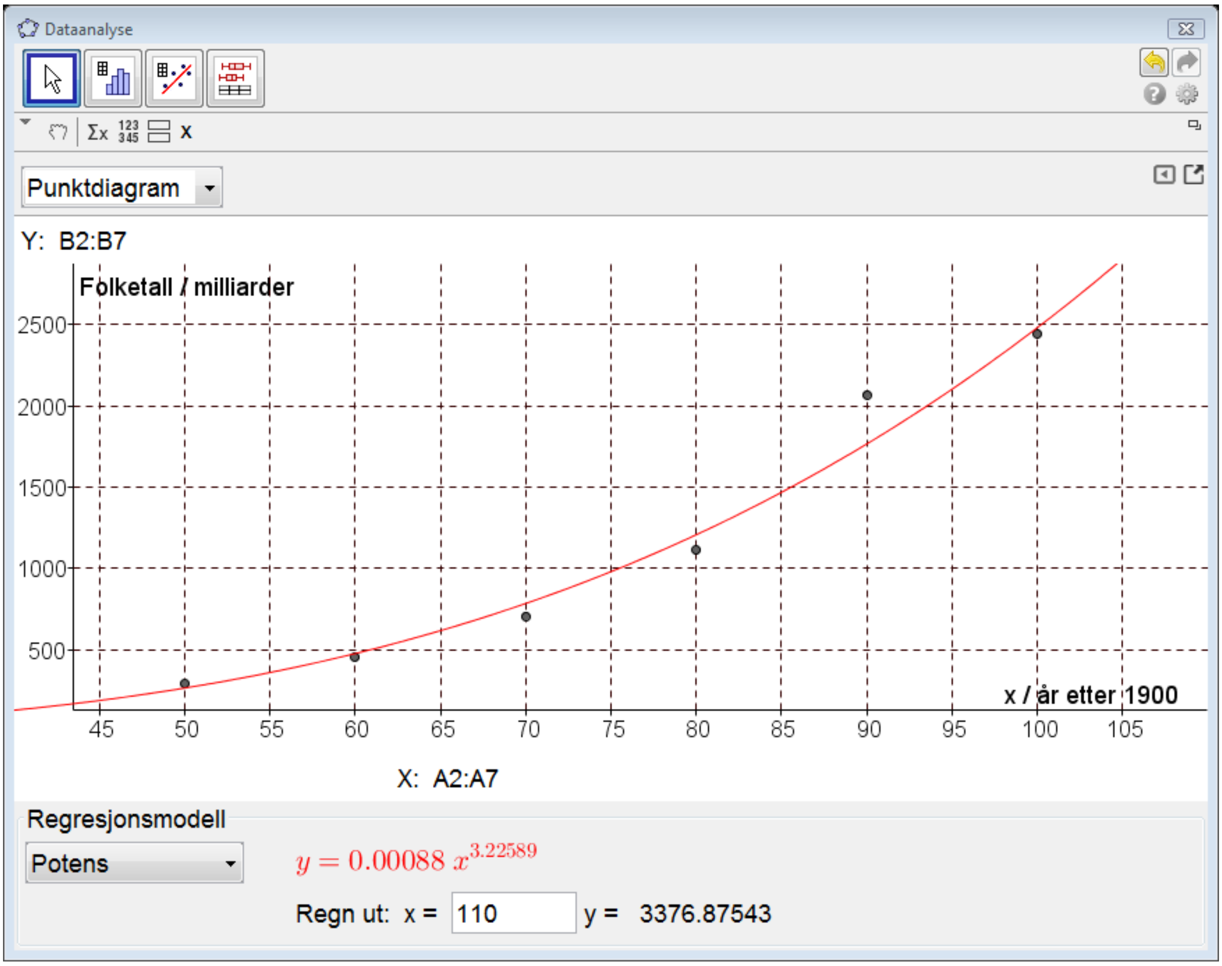
3.4 Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^b$. Eksponenten *b* kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
***t* / tusen**	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar *x* bety antall år etter 1900 (*x* = 50 tilsvarer da 1950, *x* = 60 tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon.* Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er $t(x) = 0{,}00088x^{3{,}226}$ (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

Oppgave 10

Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
x	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
y	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden x fra sola og omløpstiden y for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

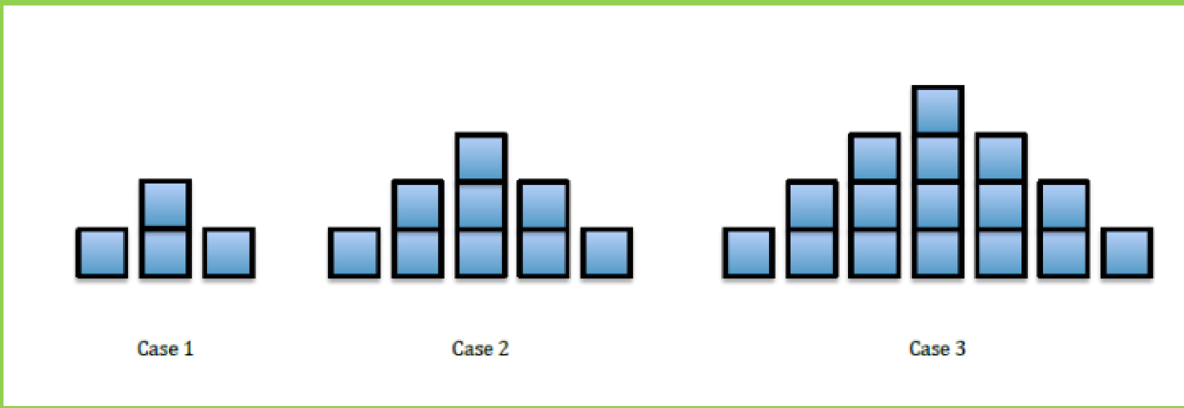
a) Finn den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.

b) Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?

c) Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

Utforskende oppgave – Mønster i figurer

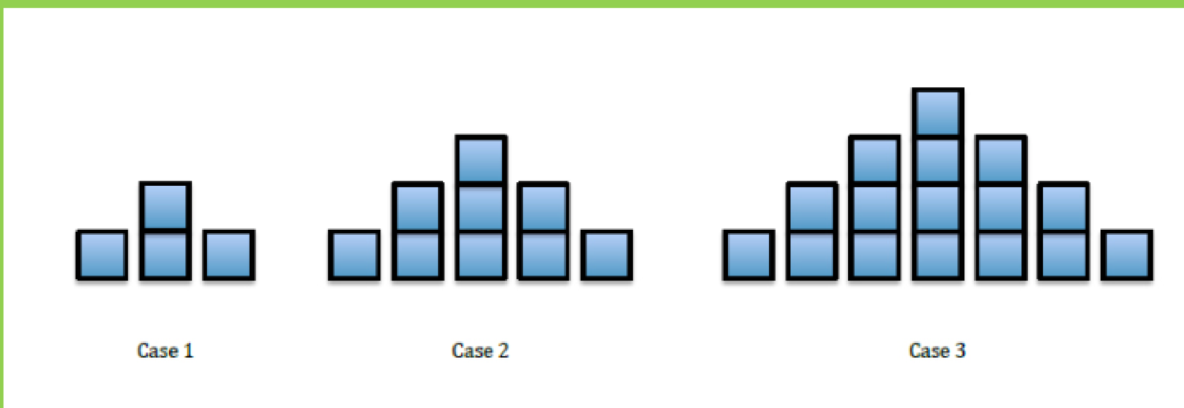
Kilde (hentet 08.06.2017): https://www.youcubed.org/task/squares-upon-squares/



I denne oppgaven skal du prøve å finne et mønster for hvordan klosser legges til fra en figur til den neste (se over).

Individuelt:

Se på figurene og marker hvordan du ser at klossene legges til fra en figur til den neste:



I gruppe:

Sammenlign det du ser med hva læringspartneren din ser. Er det bare en måte å se dette på?

Kommenter.

I plenum:

Hvor mange ulike måter har klassen kommet frem til?

Oppfølgingsspørsmål (IGP):

1. Hvordan ville figur 100 se ut? Hvor mange klosser ville den ha? Hvordan vet du det?

2. Hvordan ville figur 0 se ut? Hvordan vet du det?

3. Hvor mange klosser ville det være i figur n? Hvordan vet du det?

4. Å finne mønster i utviklingen mellom figurer

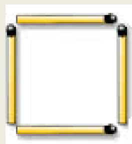
En vanlig oppgave til eksamen i 2P er å analysere utviklingen mellom figurer som endres etter et bestemt mønster. Denne utviklingen kan være lineær, kvadratisk eller en kombinasjon.

Oppgaven består både av å bestemme utseende eller størrelsen til de neste figurene i rekka, og å lage et uttrykk for figurene som kan brukes til å finne størrelsen til en figur med et høyt figurnummer (uten å måtte finne størrelsen på alle figurene frem til den).

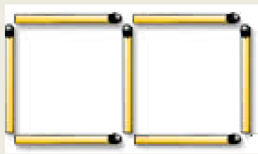
4.1 Lineær utvikling

Oppgave 11

Figur 1 (f_a) viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.

f_1 

Figur 2 (f_2) viser to kvadrat bygget av 7 fyrstikker

f_2 

Anta at vi bygger de neste figurene etter samme mønster.

a) Tegn f_3. Hvor mange fyrstikker må brukes til å lage f_3?

b) Med hvor mange fyrstikker øker hver figur?

c) Hvor mange fyrstikker må brukes for å lage f_4, f_5 og f_6?

d) Hvordan vil f_0 se ut? Hvor mange fyrstikker trengs for å lage f_0?

e) Bruk svarene i oppgave d) og b) til å lage et uttrykk for f_n

Bruk uttrykket du laget i e) til å svare på de neste oppgavene

f) Hvor mange fyrstikker brukes for å lage f_{30}?

g) Til en figur ble det brukt 151 fyrstikker. Hvilket nummer hadde denne figuren?

Oppgave 12

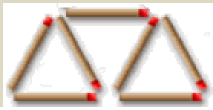
Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker f_4 trengs for å lage 4 slike trekanter?

b) Finn en formel for f_n.

c) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?

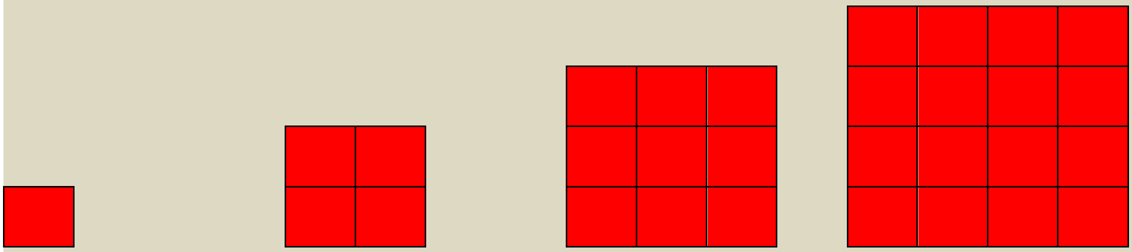
d)  Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?



4.2 Kvadratisk utvikling

Oppgave 13

Anta at en figur har følgende utvikling:



f_1 f_2 f_3 f_4

a) Skriv antall ruter i hver figur. Er økningen lineær?

b) Hvordan vil f_5 se ut? Hvor mange ruter består f_5 av?

c) Ser du en sammenheng mellom figurnummeret og antall ruter? Skriv dette som et uttrykk.

d) Hvor mange ruter vil det være i f_{10}?

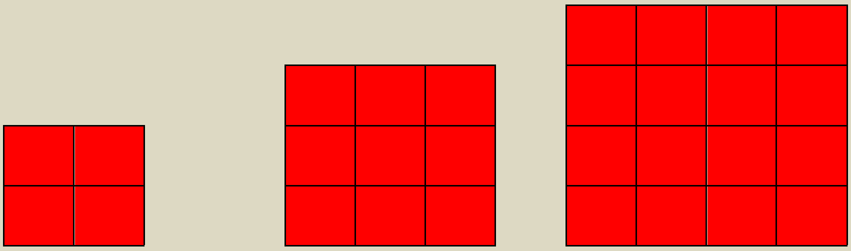
e) Til en figur ble det brukt 144 ruter. Hvilket nummer hadde denne figuren?

4.3 En mer eller en mindre

Noen ganger har vi behov for å uttrykke et tall som er en høyere eller en lavere enn figurnummeret. Dersom vi kaller figurnummer for n vil et tall som er en høyere enn figurnummeret skrives som $n + 1$. Et tall som er en lavere enn figurnummeret vil skrives som $n - 1$.

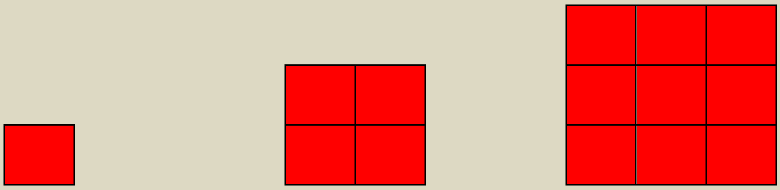
Oppgave 14

a) Finn uttrykket til f_n for rekkeutviklingen nedenfor



f_1 f_2 f_3

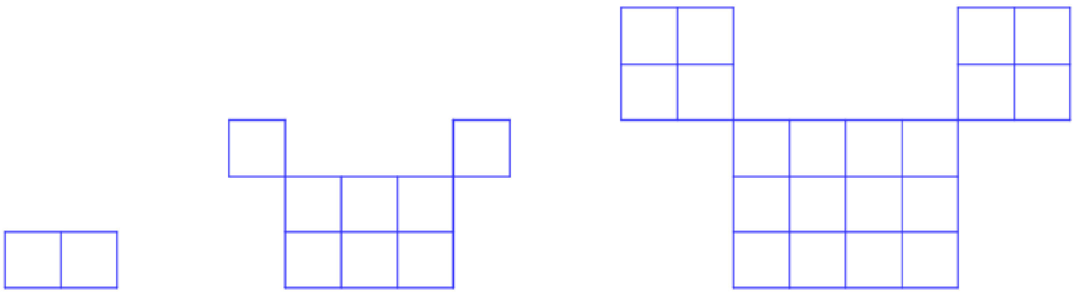
b) Finn uttrykket til f_n for rekkeutviklingen nedenfor



f_1 f_2 f_3 f_4

Utfyllingsoppgave – Mønster i figurer

I denne oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan gå frem for å finne mønster i figurer.



F_1 F_2 F_3

(Eksamen 2P høsten 2016)

Se på figurene. **Tenk**: Hva skjer fra en figur til den neste? Beskriv hva du ser med ord og marker på figurene.

Tegn den neste figuren.

Finn et uttrykk for antall klosser i figur f_n

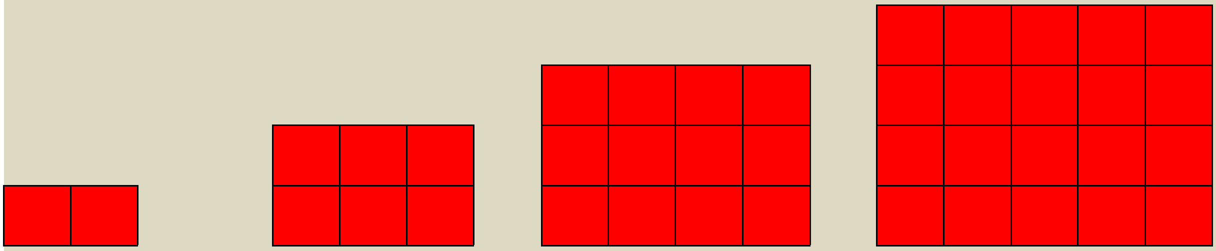
Hvor mange klosser vil det være i figur f_7?

Hvor stor figur kan du lage hvis du har 1000 klosser?

Hvor mange klosser vil du da ha igjen? ____________

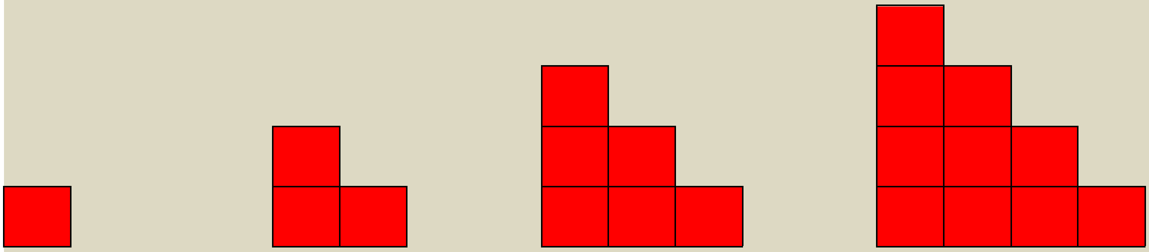
Oppgave 15

a) Figuren nedenfor viser de fire første rektangeltallene. Finn et uttrykk for f_n.



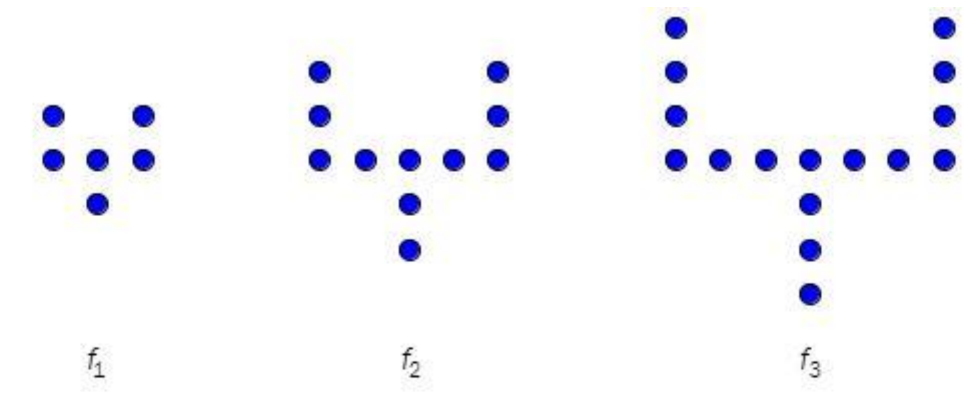
f_1 f_2 f_3 f_4

b) Figuren nedenfor viser de fire første trekanttallene. Finn et uttrykk for f_n.



f_1 f_2 f_3 f_4

Oppgave 16 (Eksamen 2P 2012)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

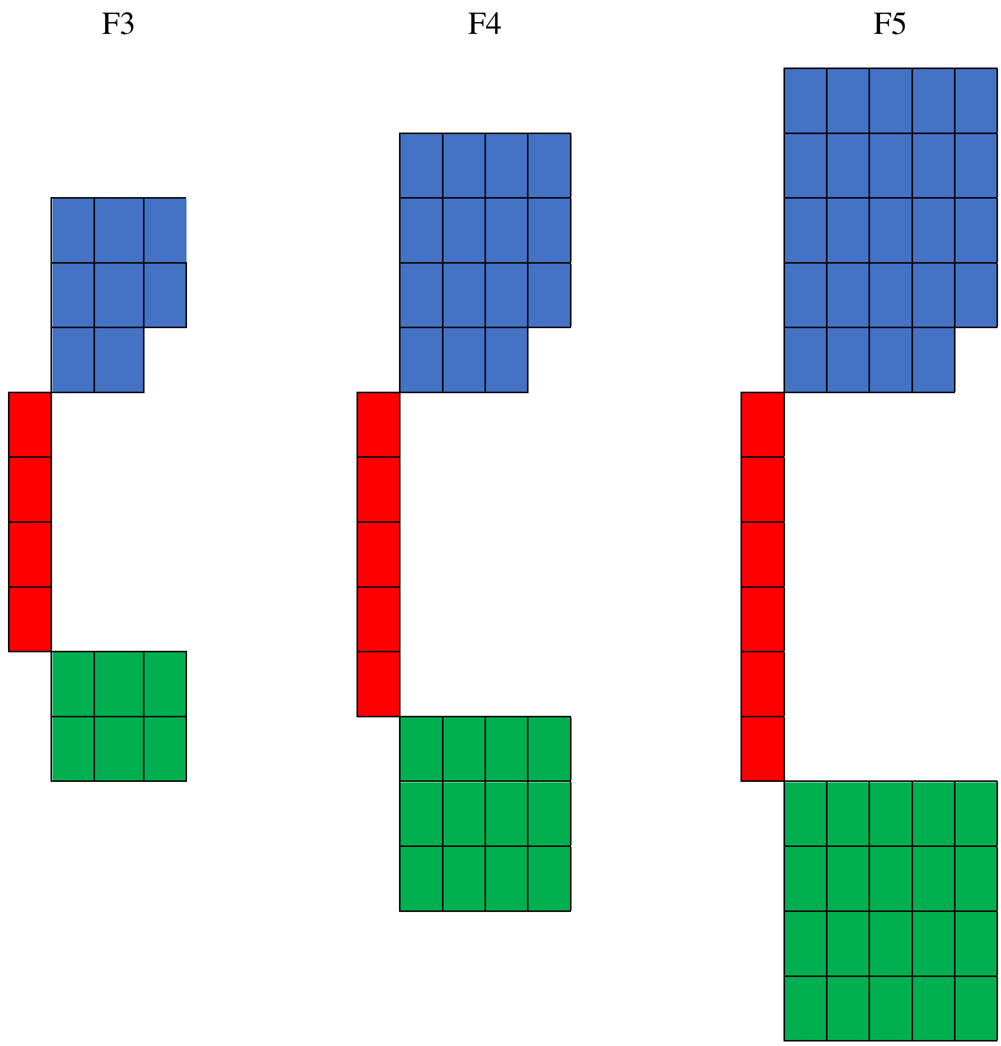
a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4.
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n, uttrykt ved n.

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

Oppgave 17



Ovenfor ser du en rekke med figurer som vokser etter bestemte mønstre. Figurene består av 3 deler: **blå**, **rød**, og **grønn.** Hver av delene er bygd opp av små ruter.

a) Fyll ut de tomme rutene.

Antall kvadrater i figur nr.	Del			Sum ruter i hele figuren
	Rød	Grønn	Blå	
3	4	6	8	
4	5	12	15	
5	6	20	24	
6				
10				
n				

b) I en figur var det til sammen 800 små kvadrater. Hvilket figurnummer hadde denne figuren?

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 5 (del 1)

Antall elever ved en skole har avtatt lineært de siste 10 årene. For 10 år siden var det

1 400 elever ved skolen. Nå er det 1 340 elever ved skolen.

a) Bestem en modell som viser utviklingen disse 10 årene.

De neste årene regner en med at antall elever vil avta med 0,5 % per år.

b) Bestem en modell som viser hvor mange elever det vil være ved skolen om x år.

V15 - Oppgave 2 (del 2)

Tabellen nedenfor viser antall kvinnelige studenter i Norge noen utvalgte år.

År	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013
Antall kvinnelige studenter	53553	58237	59562	63292	62957	68391	73332

La $x = 0$ svare til år 2000, $x = 1$ til år 2001, og så videre.

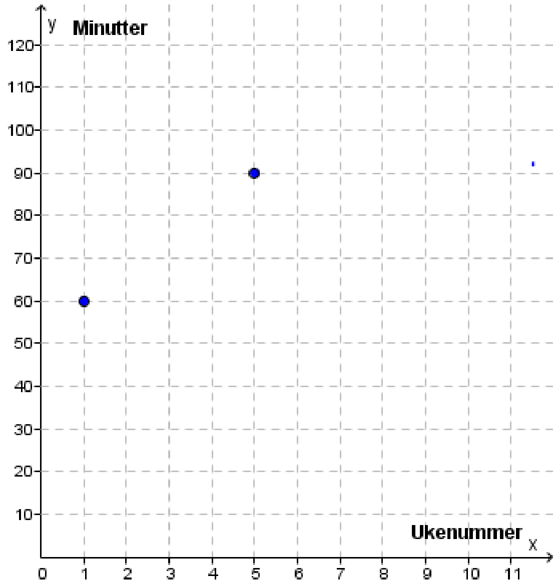
a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en lineær modell som viser hvordan antall kvinnelige studenter har utviklet seg i denne perioden.

b) Hvor stor har økningen i antall kvinnelige studenter vært i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Anta at denne utviklingen fortsetter i årene som kommer.

c) I hvilket år vil antall kvinnelige studenter passere 85 000?

H15 - Oppgave 7 (del 1)

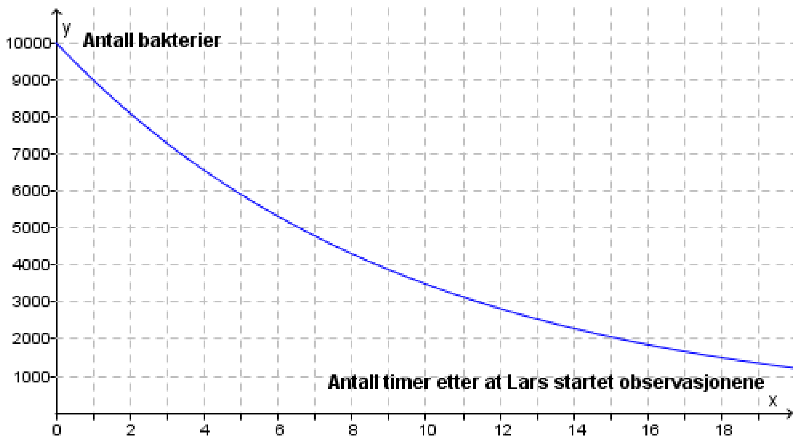


I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må trene hver uke framover for å nå dette målet.

b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

H15 - Oppgave 8 (del 1)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen B ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp utrykket for $B(x)$.

H15 - Oppgave 3 (del 2)

Tabellen nedenfor viser hvor mange nye elbiler som ble solgt i Hordaland i 2010 og 2014.

År	2010	2014
Antall nye elbiler	26	2962

a) La x være antall år etter 2010. Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for elbilsalget i Hordaland.

b) Hvor mange prosent steg elbilsalget per år i perioden fra 2010 til 2014 ifølge modellen fra oppgave a)?

Diagrammet ovenfor viser utviklingen i salget av nye elbiler i Hordaland i perioden 2010–2014.

c) Gjør beregninger og vurder om modellen fra oppgave a) er en god modell for å beskrive denne utviklingen.

V16 - Oppgave 7 (del 2)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1 000 hPa (hektopascal).

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsteder og se på noen modeller for hvor stort luftrykket er x kilometer over havets overflate.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Sitat 1:
«Lufttrykket avtar med ca. 12 % per km.»

Sitat 2:
«Grovt sett kan vi dele lufttrykket på to for hver 5,5 km over havoverflaten.»

Sitat 3:
«Man kan med ganske stor presisjon si at lufttrykket avtar med 1 hPa for hver 8 meter. Om du bor 80 meter over havet, vil lufttrykket være 10 hPa lavere enn ved havets overflate. Denne forenklede beregningen er akseptabel for steder lokalisert inntil noen hundre meter over havet.»

Sitat 4:
«Lufttrykket i atmosfæren avtar raskt med høyden. Alt på toppen av Mount Everest (8 848 meter over havoverflaten) er det redusert til en tredjedel.»

a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell *f* der $f(x) = 1000 \cdot 0,88^x$
Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 10$

b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor. Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modell *f*. Gi denne modellen navn *g*.
Tegn grafen til *g* for $0 \le x \le 10$ i samme koordinatsystem som grafen til *f*.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell *h*. Tegn grafen til *h* for $0 \le x \le 10$ i samme koordinatsystem som du har brukt tidligere i oppgaven.
Kommenter siste setning i sitat 3.

d) Bruk hver av de tre modellene *f*, *h* og *h* til å bestemme lufttrykket 8 848 meter over havoverflaten. Sammenligne svarene du får, med sitat 4, og kommenter.

H16 - Oppgave 3 (del 2)

Tabellen nedenfor viser pris og antall solgte enheter av en vare.

Pris (kroner)	15	19	24	30	34	42	50
Antall solgte enheter	160	132	108	90	79	67	58

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x)\ 1600 \cdot x^{0,85}$$

er en god modell for sammenhengen mellom pris og antall solgte enheter av varen.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $15 \leq x \leq 50$.

c) Bestem antall solgte enheter når prisen er 45 kroner.

d) Bestem prisen når antall solgte enheter er 100.

e) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten for funksjonen f fra $x = 20$ til $x = 40$.

Hva forteller svaret om antall solgte enheter?

H16 - Oppgave 5 (del 2)

Når en pasient har tatt en tablett, vil virkestoffet i tabletten brytes ned i kroppen. Konsentrasjonen av virkestoffet i blodet vil avta eksponentielt med tiden.

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen i mikrogram per milliliter (μg/ml) av virkestoffet i blodet 1 time etter og 24 timer etter at pasienten har tatt tabletten.

Timer etter at pasienten har tatt tabletten	1	24
Konsentrasjon av virkestoff i blodet (μg/ml)	0,5	0,05

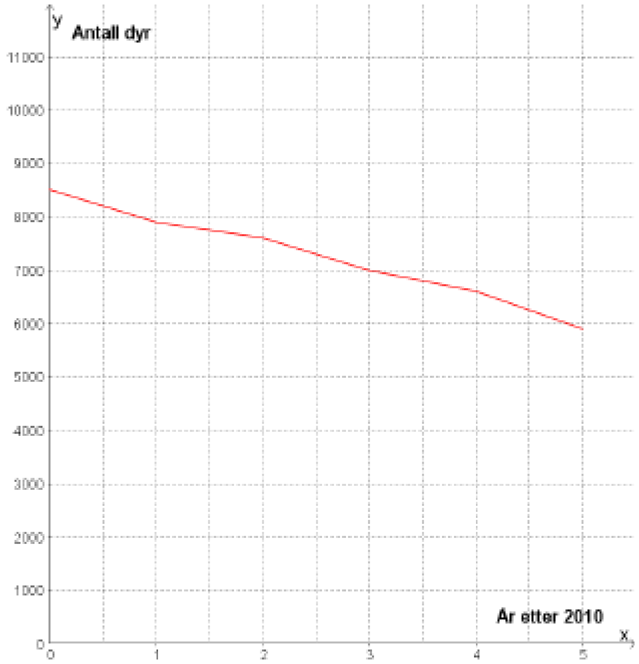
a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for konsentrasjonen av virkestoffet i blodet x timer etter at pasienten har tatt en tablett.

b) Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 10 timer etter at pasienten har tatt en tablett.

En pasient begynner å ta tabletter. Han tar én tablett klokka 08.00 hver morgen og én tablett klokka 20.00 hver kveld.

c) Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 30 timer etter at pasienten tok den første tabletten.

H16 - Oppgave 6 (del 1)



Linjediagrammet ovenfor viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

a) Bestem en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.

b) Hvor mange dyr av arten vil det være i området i 2018 ifølge funksjonen fra oppgave a)?

c) Hvor mange år vil det gå før det ikke er flere dyr av arten igjen i området ifølge funksjonen fra oppgave a)?

V17 - Oppgave 5 (del 1)

I 2017 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.

Per antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

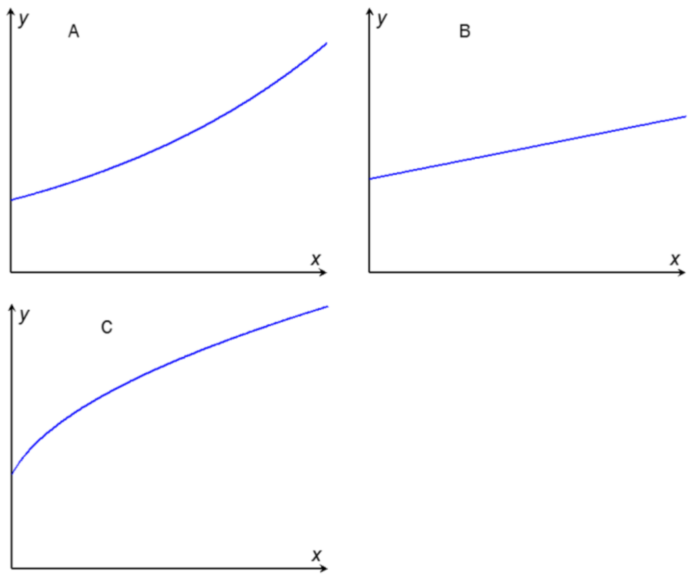
a) Sett opp en modell som viser verdien $f(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Per antar.

Kari antar at verdien vil stige med 8 % hvert år.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

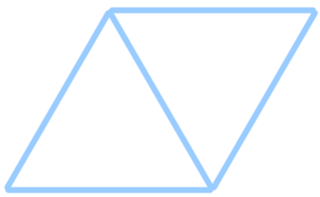
b) Sett opp en modell som viser verdien $g(x)$ av leiligheten x år etter 2017 dersom det går slik Kari antar.

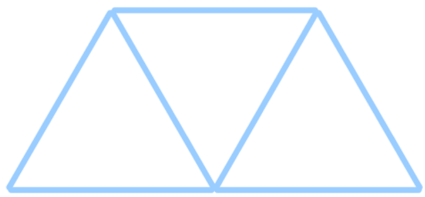
c) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til f ?
Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til g ?
Begrunn svarene dine.



V17 - Oppgave 7 (del 1)


Figur 1


Figur 2


Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små, blå pinner. Hver pinne har lengden 2,5 cm. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

a) Hvor mange pinner trenger du for å lage figur 4?
Bestem omkretsen av figur 4.

b) Bestem et uttrykk for antall pinner i figur n uttrykt ved n.

c) Bestem et uttrykk for omkretsen av figur n uttrykt ved n.

En figur som følger samme mønster som ovenfor, har en omkrets på 105 cm.

d) Bestem antall pinner i denne figuren.

V17 - Oppgave 7 (del 2)

Tabellen nedenfor viser hvor høy Per var 0, 1, 3, 6 og 12 år etter fødselen.

Alder (år)	0	1	3	6	12
Høyde (cm)	52	76	97	118	148

a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en tredjegradsfunksjon f som tilnærmet viser høyden til Per de første 12 leveårene.

Espen er 12 år. Funksjonen g gitt ved

$$g(x) = 0{,}13x^3 - 2{,}8x^2 + 23x + 52$$

viser høyden hans $g(x)$ cm, x år etter fødselen.

b) Bestem Espens gjennomsnittlige vekstfart fra han var 7 år til han ble 12 år.

Sitatet på neste side er hentet fra nettsidene til Norsk Helseinformatikk AS.

(Oppgaven fortsetter på neste side)

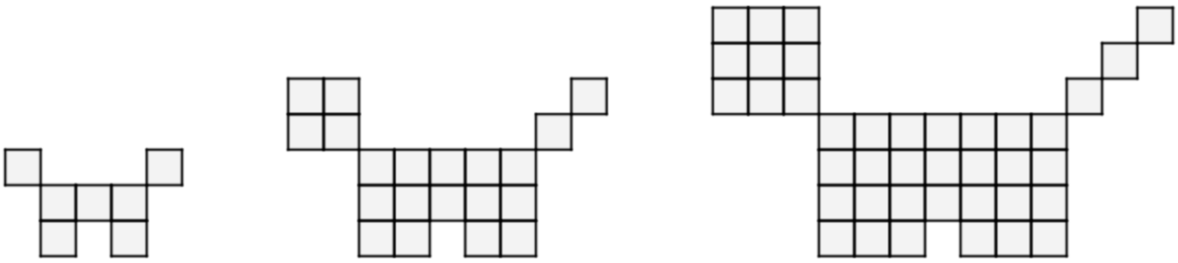
> «Gutter har en maksimal høydevekst på ca. 10 cm per år midt i puberteten. Etter vekstspurten i puberteten avtar veksthastigheten ned mot null.»

Anta at Espen kommer i puberteten når han er 12 år.

Puberteten varer vanligvis i to–tre år.

c) Ta utgangspunkt i sitatet ovenfor, og vurder om funksjonen g kan brukes til å bestemme høyden til Espen etter at han har fylt 12 år.

H17 - Oppgave 7 (del 1)



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 4?

b) Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 20?

H17 - Oppgave 1 (del 2)

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

e) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

f) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

g) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

H17 - Oppgave 4 (del 2)

I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

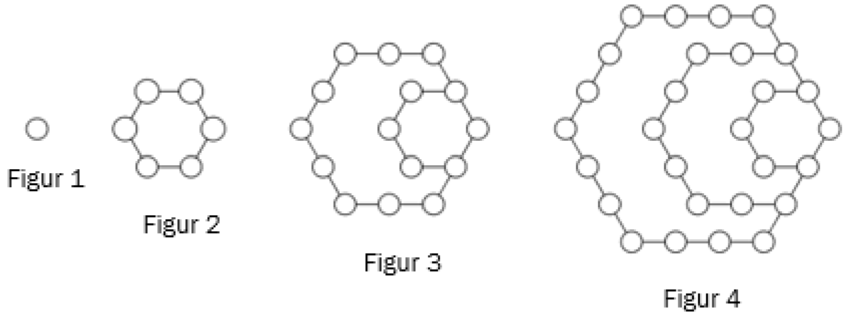
a) Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om x måneder dersom antallet avtar lineært.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om x måneder dersom antallet avtar eksponentielt.

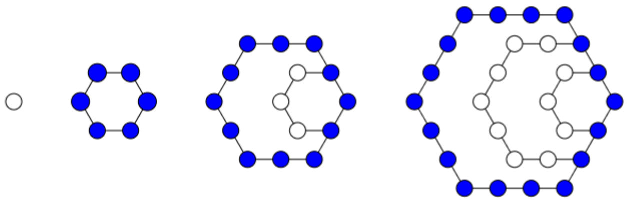
Anta at det om ett år vil være 96 kaniner igjen i området.

c) Vurder om det da er mest rimelig å anta at nedgangen vil være lineær eller eksponentiell.

V18 - Oppgave 4 (del 1)



Ovenfor ser du fire figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Hans og Grete vil fortsette å lage figurer etter samme mønster. De vil også se på ulike sammenhenger mellom antall sirkler i figurene.
Hans starter med figur nummer 2 og ser på sirklene i de ytterste sekskantene. Han fargelegger disse sirklene blå og setter opp tabellen til høyre nedenfor.



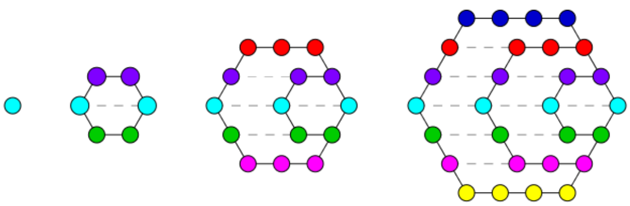
Figur-nummer	Antall sekskanter	Antall sirkler i ytterste sekskant
2	1	6
3	2	12
4		
5		
n		

a) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.

En figur har 246 sirkler i den ytterste sekskanten.

b) Hvor mange sekskanter er det i denne figuren?

Grete ser at sirklene ligger på rader. Hun stipler linjer og fargelegger slik at alle sirklene på én rad har samme farge. Etterpå setter hun opp tabellen til høyre nedenfor.



Figur-nummer	Antall rader	Antall sirkler i hver rad	Antall sirkler i figuren
1	1	1	1
2	3	2	6
3	5	3	15
4			
n			

c) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.
d) Hvor mange sirkler vil det være i figur nummer 100?

V18 - Oppgave 5 (del 1)

En dyrebestand består i dag av 12 000 dyr. En gruppe forskere antar at bestanden vil avta lineært, og at det vil være 6 000 dyr igjen om 10 år.
.
a) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom antakelsen er riktig.

En annen gruppe forskere antar at bestanden vil avta eksponentielt, og at det vil være 11 400 dyr igjen om ett år.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom denne antakelsen er riktig..

Ifølge hvilken av de to modellene ovenfor vil det være færrest dyr igjen i bestanden om 10 år?

V18 - Oppgave 6 (del 2)

Årstall	1920	1940	1960	1980	2000	2010	2017
Folketall i millioner	1902	2285	2991	4401	6088	6889	7474

Tabellen ovenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år i perioden fra 1920 til 2017.

a) La x være antall år etter 1. januar 1920, og bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$$

er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

b) Hvor mange prosent har folketallet økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 70$ til $x = 95$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

FN har utarbeidet prognoser som viser at folketallet i verden vil være 9,8 milliarder i år 2050 og 11,2 milliarder i år 2100.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.