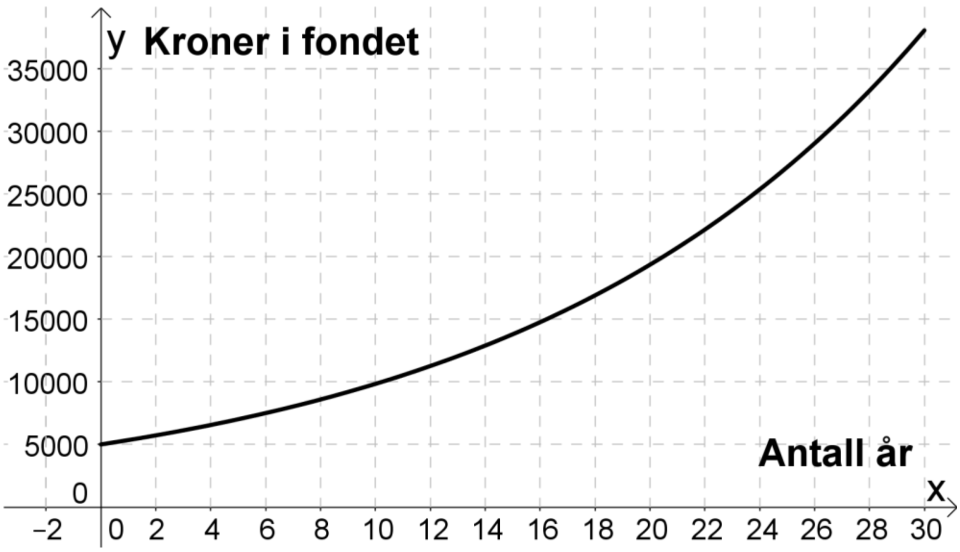
Kapittel 2. Funksjoner

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser. I dette kapitlet skal vi se nærmere på to typer funksjoner, lineære og eksponentielle.

- Hvordan vi skal tolke grafer
- Hva som kjennetegner lineær vekst
- Hva som kjennetegner eksponentiell vekst
- Framstille funksjoner ved hjelp av tekst, formel, verditabell og graf.
- Finne gjennomsnittlig og momentan vekstfart
- Tolke svarene i praktiske situasjoner



Mål for kapittel 2. Funksjoner

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre greie for begrepet linær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- bruke digitale verktøy til å undersøke kombinasjoner av polynomfunksjoner, rotfunksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og finne gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmingsverdier for momentan vekstfart
- bruke funksjoner til å modellere, drøfte og analysere praktiske sammenhenger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg tegner et koordinatsystem med riktig inndeling av aksene
- ☐ hvordan jeg merker av punkter i et koordinatsystem
- ☐ hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en graf
- ☐ hvordan jeg tegner en funksjon i GeoGebra med aksetitler
- ☐ hvordan jeg leser av fra x- og y-aksen i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner nullpunkter i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner topp- og bunnpunkt i GeoGebra
- ☐ hvordan jeg finner gjennomsnittlig og momentan vekstfart i GeoGebra

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

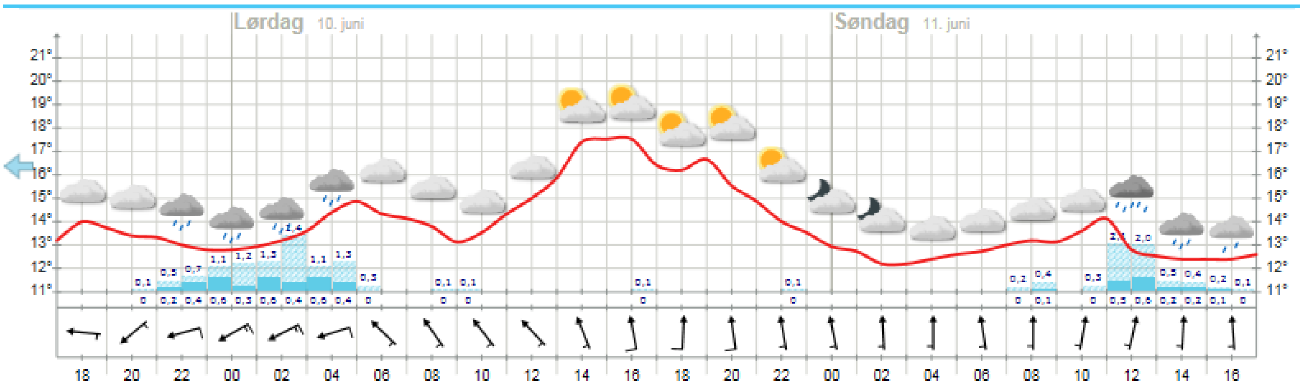
- ☐ hva som kjennetegner ulike typer funksjoner: lineære-, polynom-, eksponentiell-, potens- og rotfunksjoner
- ☐ hvordan jeg finner konstantledd og stigningstall
- ☐ hvordan jeg kan tegne en rett linje ved hjelp av konstantledd og stigningstall
- ☐ hva gjennomsnittlig og momentan vekstfart forteller meg om en praktisk situasjon

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ forklare hva avleste verdier fra en graf forteller meg om en praktisk situasjon
- ☐ velge hensiktsmessig hjelpemidler når jeg jobber med funksjoner

1. Graftolkning

En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.



Se på bildet over fra yr.no som viser varselet for Hellerud videregående skole. Angi tidspunktene som hele timer, og temperaturen med én desimal. Starttidspunktet er kl. 17:00 fredag 9.juni.

a) Når er det varmest på søndag?
   1. Hva er temperaturen da?
   2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
b) Når blir det kaldest på lørdag?
   1. Hva er temperaturen da?
   2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
c) Når vil det være varmest i perioden? (marker på figuren)

d) Når vil det være kaldest i perioden? (marker på figuren)

e) Hvor stor er forskjellen mellom det varmeste og kaldeste på lørdag og hvor mange timer går det fra det er kaldest til varmest?

f) Hvor mye stiger temperaturen med per time fra det kaldeste til det varmeste på lørdag?

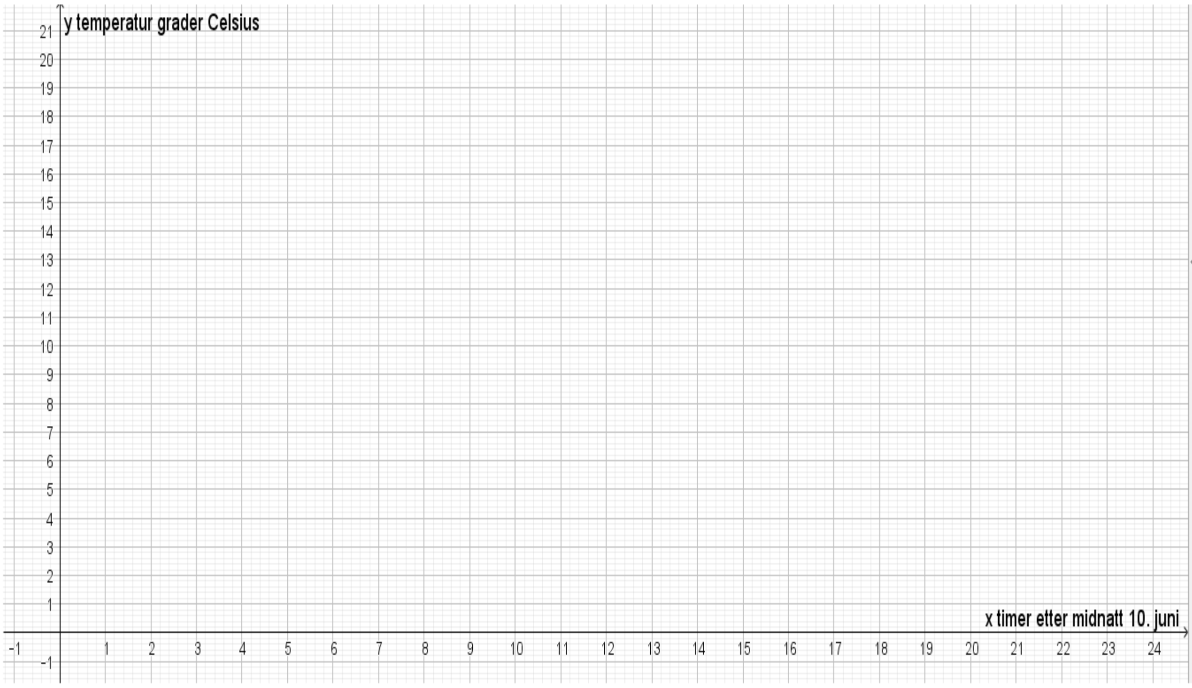
g) Hvor mange ganger er temperaturen 15 °C? (marker på figuren)

h) Når er temperaturen 13 °C? (marker på figuren)

i) I hvilken periode er temperaturøkningen sterkest? (marker på figuren)

j) I hvilken periode er temperaturreduksjonen sterkest? (marker på figuren)

k) Tegn en framstilling av temperaturutviklingen i løpet av lørdag 10. juni i et koordinatsystem. Merk av temperatur hver time og tegn. Beskriv deretter temperaturutviklingen det døgnet med egne ord og relevante matematiske begreper.



2. Rette linjer

2.1 Proporsjonale størrelser

Grafen til proporsjonale størrelser vil være en rett linje som begynner i origo, det vil si der x- og y- aksen krysser hverandre og har koordinatet (0,0). Dersom du vet koordinatet til ett punkt til har du nok informasjon til å tegne grafen.

Når du har tegnet grafen kan du lese av den informasjonen du blir spurt om å finne. Det er derfor lurt å lese gjennom hele oppgaven før du begynner å tegne grafen, slik at du vet hvor lang grafen må være og hvor detaljert tallene på x- og y-aksen må være.

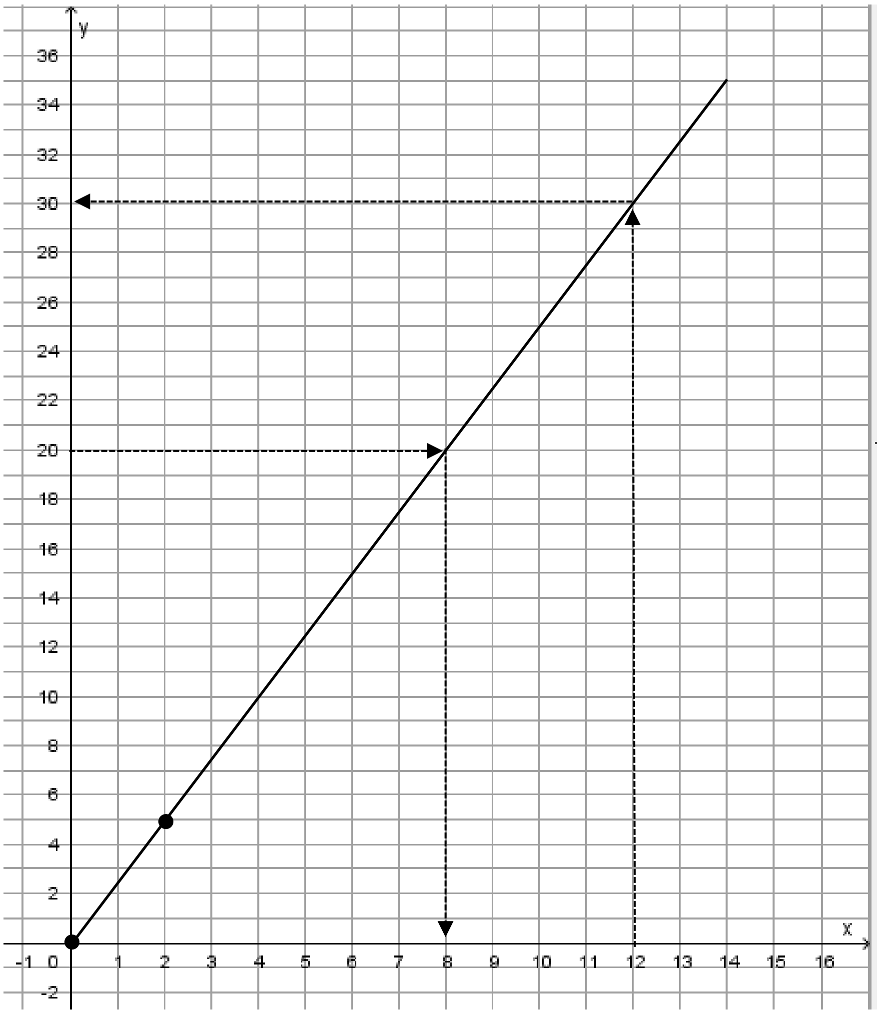
Dersom du tegner grafen **for hånd** hender det at du ikke klarer å lese av nøyaktig verdi på enten x- eller y-aksen. Da må du gi et omtrentlig svar, og du bør bruke ordet «cirka» i svaret ditt. Dersom du bruker **GeoGebra** vil du kunne finne nøyaktige svar uansett hvor kompliserte tallene er. Husk at du i så fall må skrive hvilke kommandoer/fremgangsmåter du har brukt. På en tentamen eller en eksamen vil GeoGebra naturlig nok kun være tilgjengelig på del 2.

Eksempel:

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (2,5)

b) Hva blir y når x er 12?

c) Hva blir x når y er 20?



1. Markerer punktene (0,0) og (2,5)

2. Trekker deretter en linje (stråle) fra det første punktet gjennom det andre

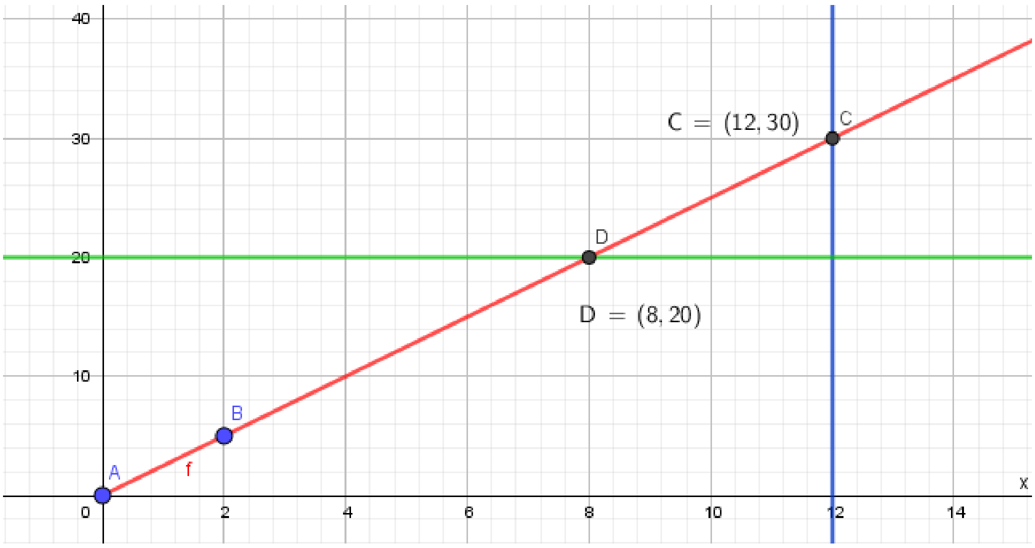
3. Finner den oppgitte x-verdien og leser av den tilhørende y- verdien

4. Finner den oppgitte y-verdien og leser av den tilhørende x-verdien

b) $y = 30$ når $x = 12$

c) $x = 8$ når $y = 20$

I GeoGebra:



Fremgangsmåte:

Skrev inn punktene (0,0) og (2,5)

Brukte «stråle gjennom to punkt», fikk stråle f

Skrev x=12, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt C

Skrev y=8, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt D

(Svarene blir de samme.)

Løs alle oppgavene nedenfor både for hånd og i GeoGebra. Til de første oppgavene har vi laget ferdige koordinatsystemer. I den siste oppgaven må du tenke gjennom tallene på x- og y-aksen selv.

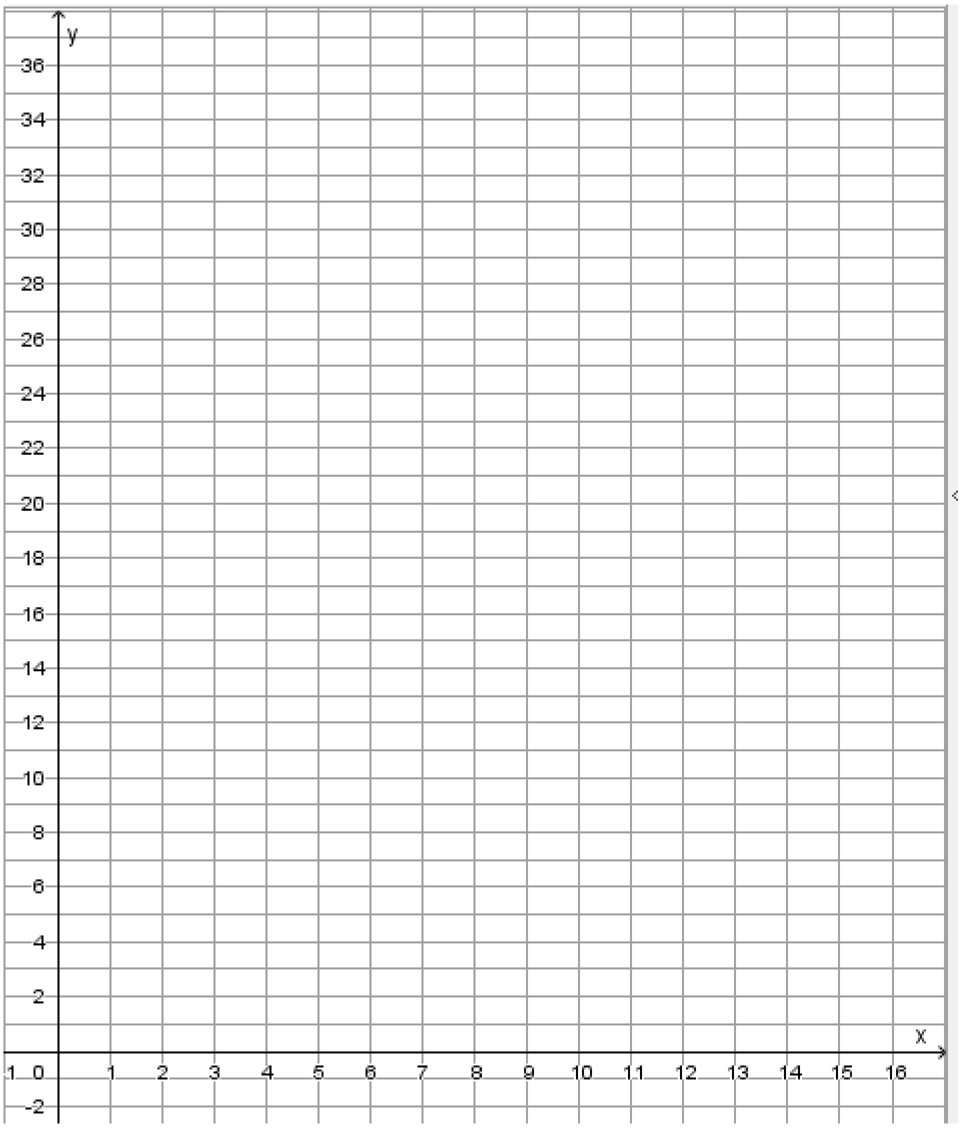
Oppgave 8

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (4,6)

b) Hva blir x når y er 22?

c) Hva blir y når x er 14?

d) Hva blir y når x er 9?



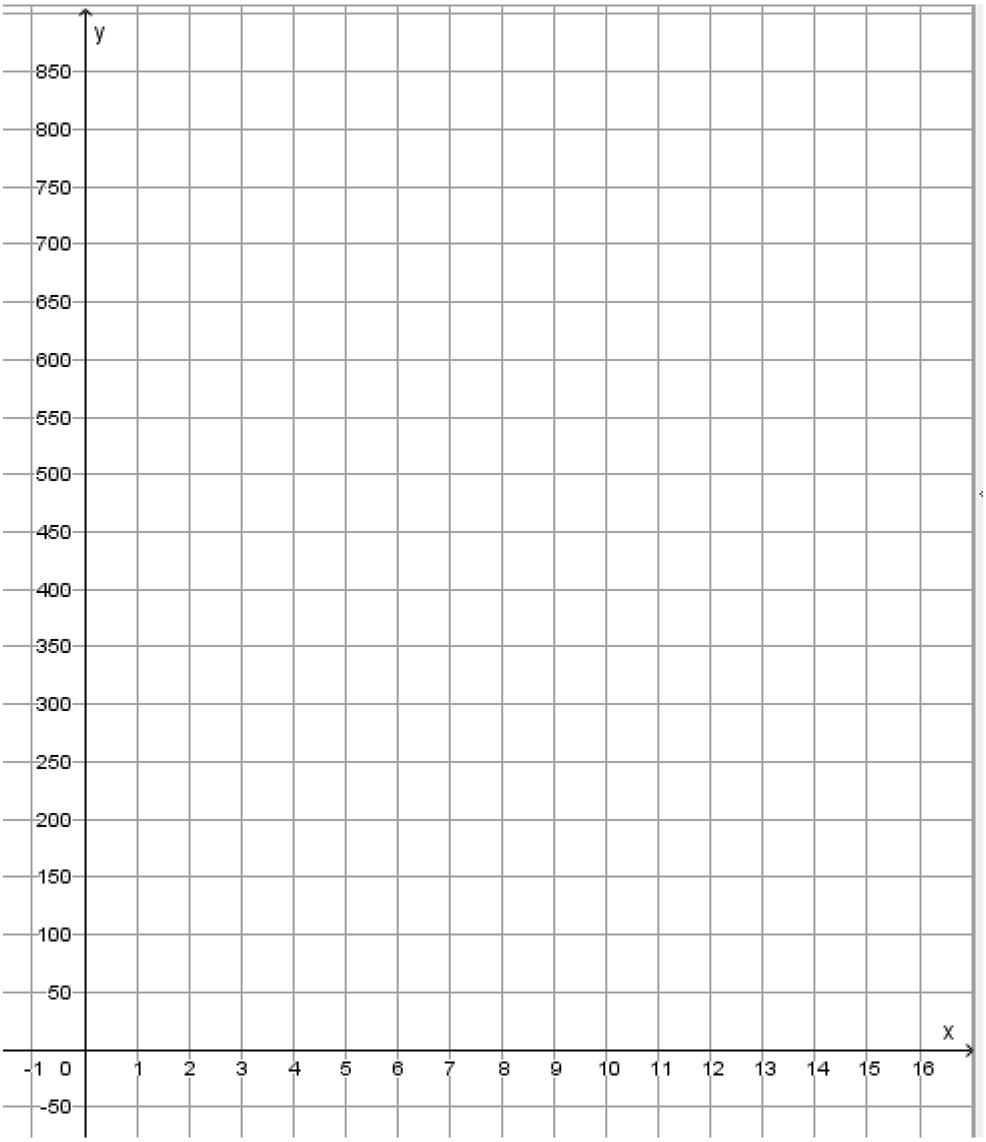
Oppgave 9

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (3,150)

b) Hva blir x når y er 700?

c) Hva blir y når x er 8?

d) Hva blir x når y er 575?



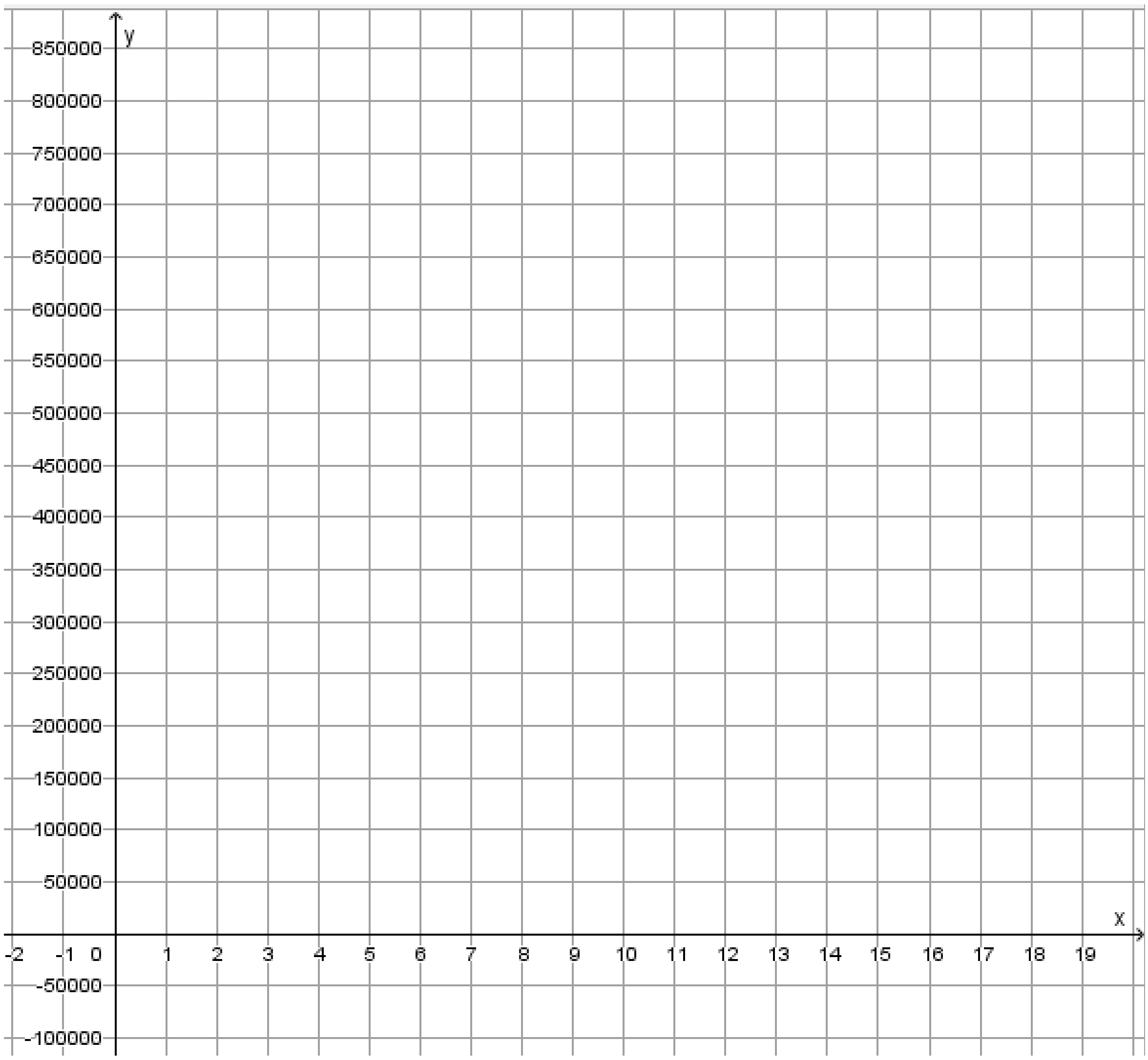
Oppgave 10

a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (1,50000)

b) Hva blir x når y er 250 000?

c) Hva blir y når x er 14?

d) Hva blir x når y er 425 000?



Oppgave 11

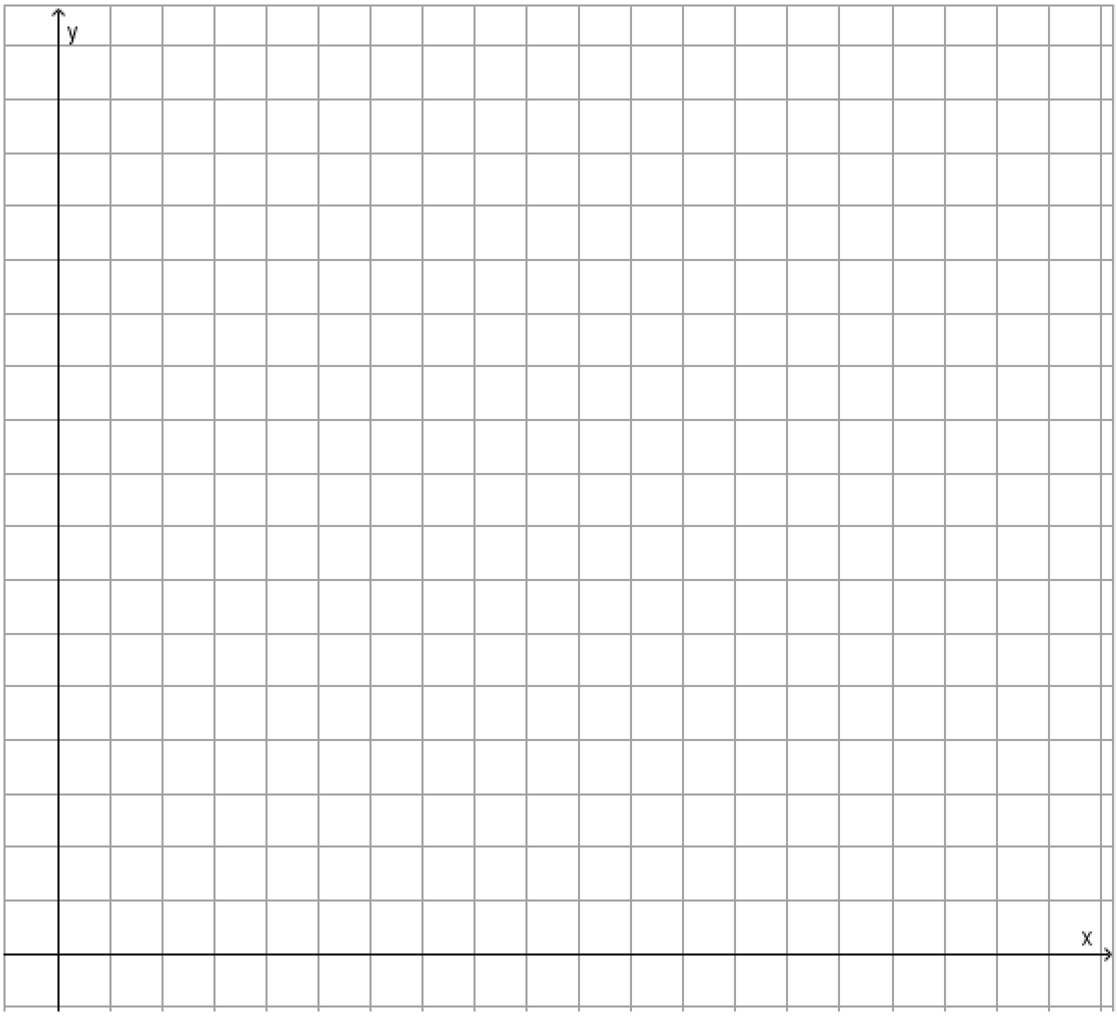
a) Tegn grafen til de proporsjonale størrelsene som går gjennom punktet (3,8)

b) Hva blir x når y er 32?

c) Hva blir y når x er 9?

d) Hva blir x når y er 18?

e) Hva blir y når x er 5?



2.2 Rette linjer med startverdi

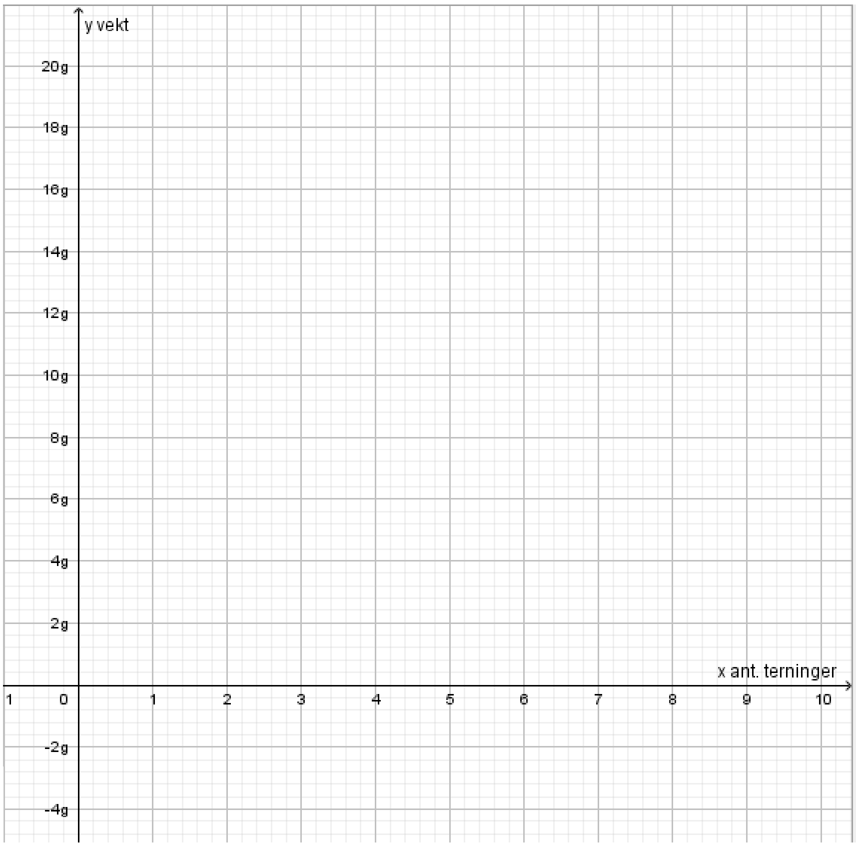
Utforskende oppgave – Finne stigningstall og konstantledd

Funksjoner på formen $y = ax + b$

Forsøk 1: læreren legger terninger oppi en kopp vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		

Forsøk 2: læreren tar terninger ut av en kopp vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		

Forsøk 3: læreren legger terninger på en vekt som ikke var justert vekt =		
x antall terninger		
y vekt i gram		



Marker punktene fra forsøkene over i koordinatsystemet til venstre, og trekk de lineære grafene.

Ved hvilket antall terninger blir vekta til forsøkene like?

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

2.3. Noen begreper

Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*. Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

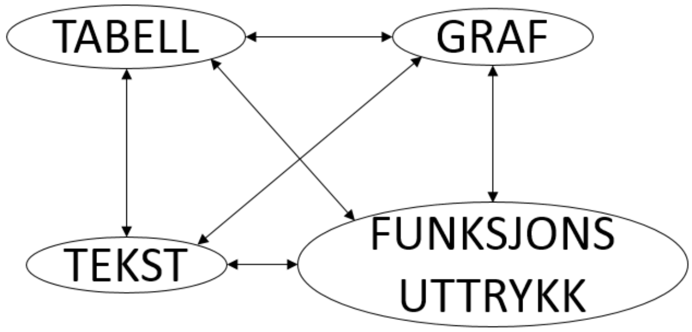
Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

1) en *tabell*
2) en *graf*
3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.
4) En tekst



Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for x.
Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for y.

Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr
Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr
Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3{,}5 = 70$ kr

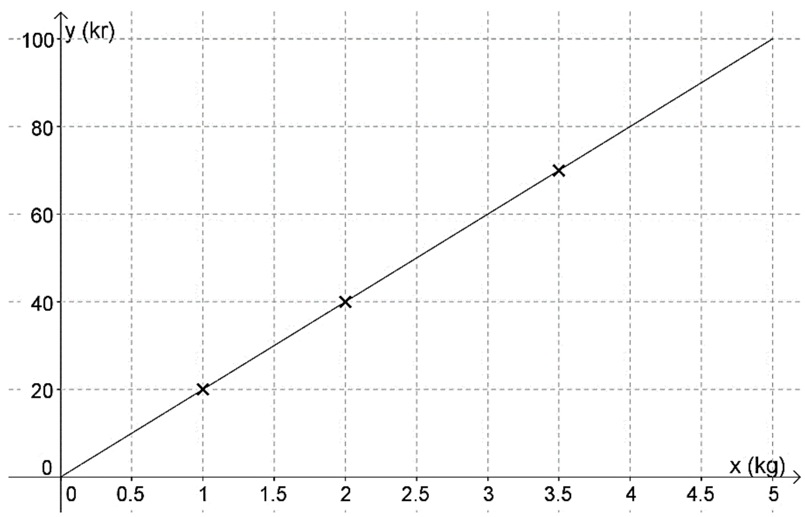
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (x) og prisen av posen (y) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenheten*e i tabellen.

Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *grafen* til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

Viktige begreper

Funksjon	
Konstantledd	
Stigningstall	
Variabel	
Funksjonsuttrykk	
Punkt	
Graf	
Lineær funksjon	

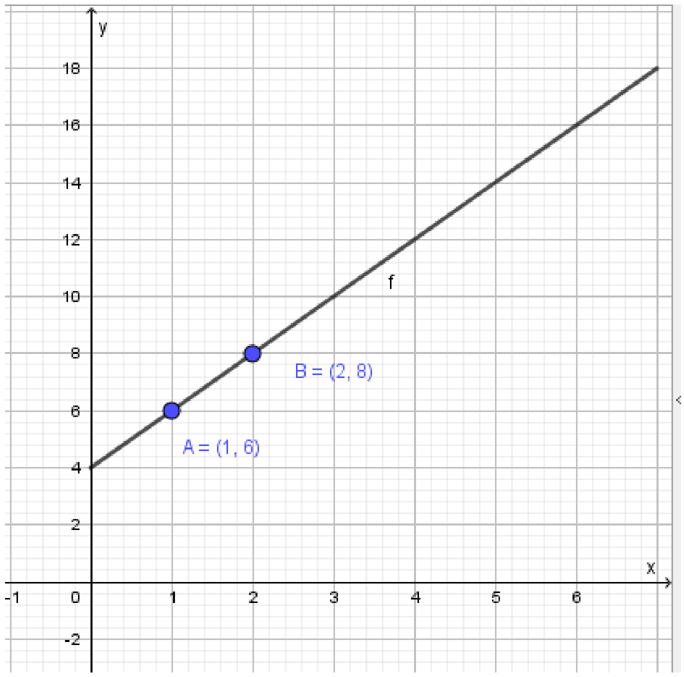
2.4 Lineære funksjoner

I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

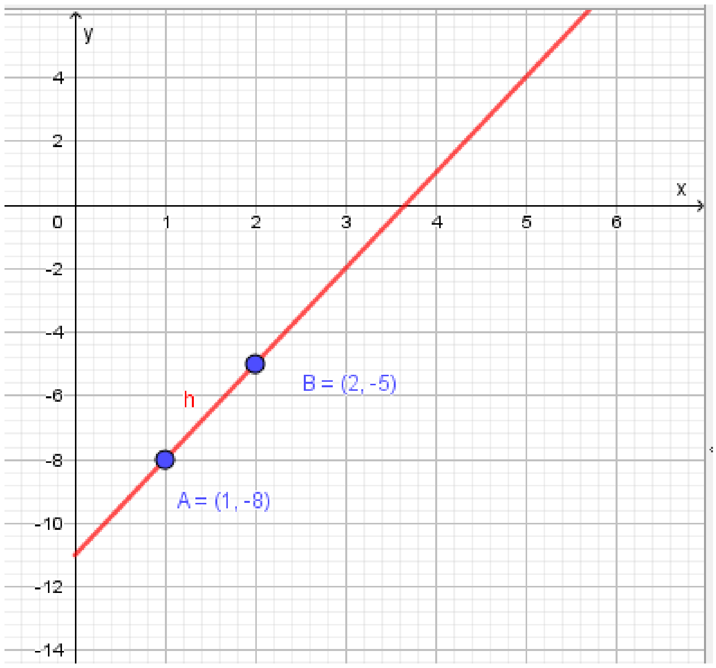
Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

Oppgave 12

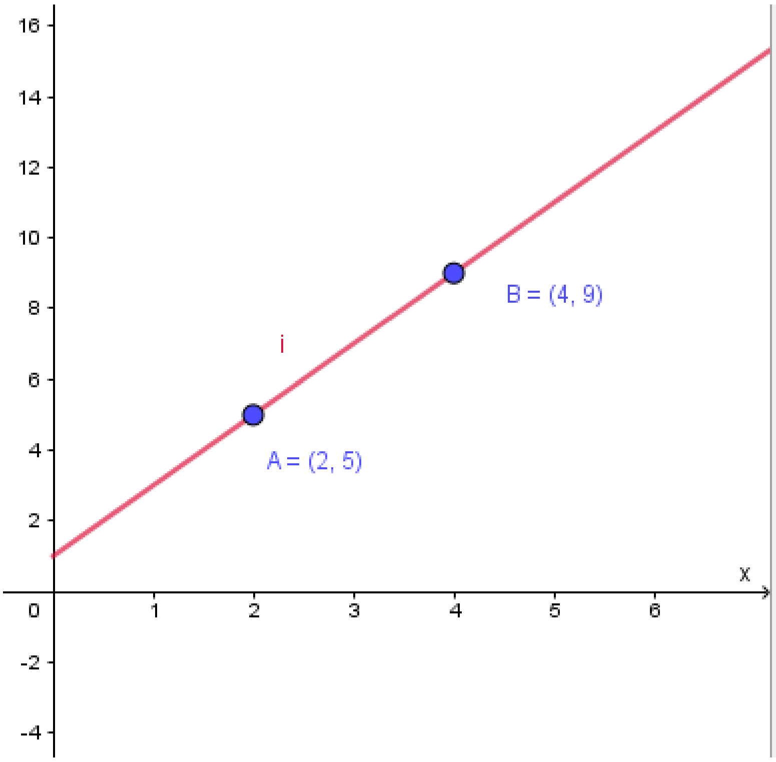
De lineære funksjonene *f. g, h og i* går gjennom punktene A og B. Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonen, og skriv funksjonsuttrykket til *f* på formen $y = ax + b$



a = _________ b = _________ *f*(x) = ______________________

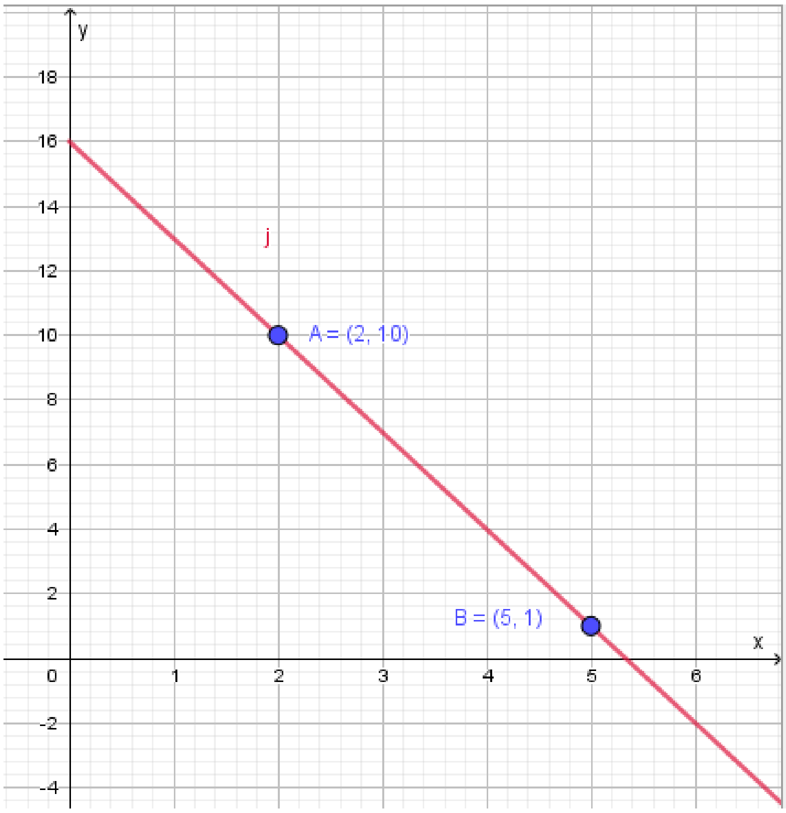


a = _________ b = _________ *h*(x) = ______________________



16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
5
6
x
i
B = (4, 9)
A = (2, 5)

a = _________ b = _________ *i*(x) = ______________________



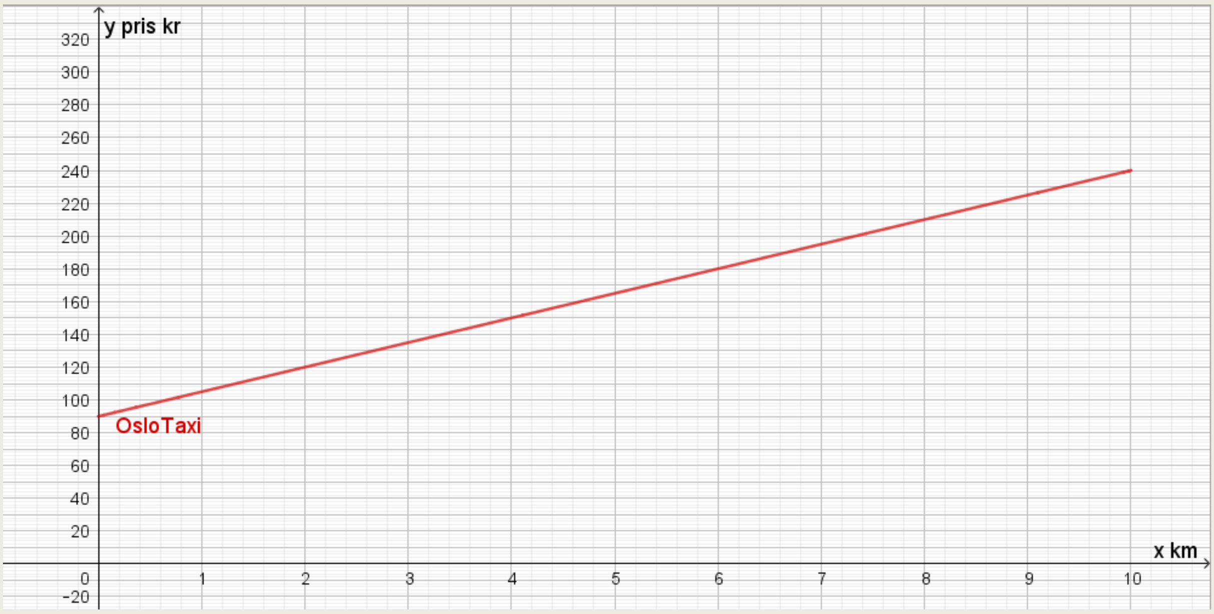
y
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
1
2
3
4
5
6
x
j
A = (2, 10)
B = (5, 1)

a = _________ b = _________ *j*(x) = ______________________

2.5 Praktisk bruk av lineære funksjoner

Oppgave 13

Når du kjører taxi er det en sammenheng mellom hvor langt du kjører og hvor mye du betaler. I tillegg må du betale en startpris. Prisen *y* er en funksjon av *x* antall km + startprisen. Grafen nedenfor viser denne sammenhengen for OsloTaxi.



a) Omtrent hvor mye må du betale for å kjøre 5 km med en taxi fra OsloTaxi?
b) En kunde betalte 220 kr. Omtrent hvor langt kjørte denne kunden?
c) Alle taxier har en startpris, det vil si hva taksameteret står på idet du setter deg inn i taxien. Hvor høy er startprisen til OsloTaxi?
d) I tillegg må du betale for hver enkelt km. Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut prisen per km.
e) Sammenhengen mellom ant. km og pris kan skrives på formen y = ax + b, der y er pris og x er antall km. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til prisen du betaler for å kjøre OsloTaxi.

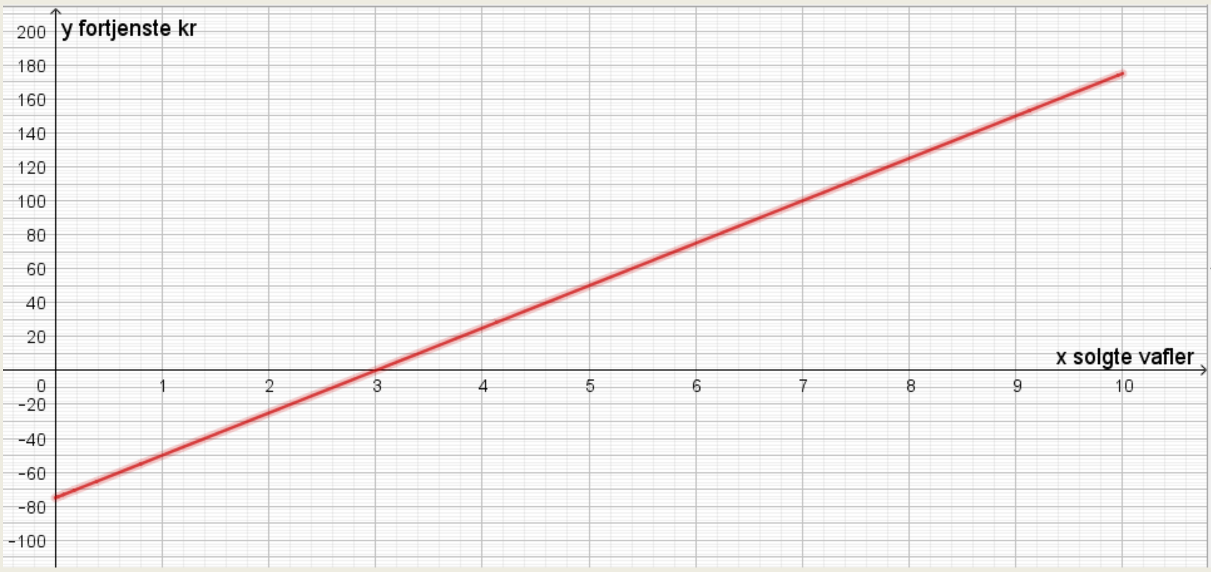
Oppgave 14

En familie hadde vært på ferie, og ønsket å lage en digital fotobok av bildene. Familien må betale en viss sum for selve boken. I tillegg øker prisen for hvert bilde med et fast beløp. Prisen *y* er en funksjon av *x* antall bilder + prisen for boken. Bruk tabellen nedenfor til å finne ut prisen for selve boken og prisen per bilde.

Antall bilder	10	20
Pris for fotoboken	300	350

Oppgave 15

Noen barn ønsket å selge vafler. De kjøpte en stor pose vaffelrøre og solgte vaflene til forbipasserende. Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom hvor mange vafler de solgte og hvor mye de tjente. Fortjenesten *y* er en funksjon av *x* ant. solgte vafler – prisen på vaffelrøra.



a) Omtrent hvor mye tjente de dersom de solgte 6 vafler?
b) Etter 1 time hadde de tjent 150 kr. Hvor mange vafler hadde de da solgt?
c) Hvor mye betalte de for posen med vaffelrøre?
d) Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut prisen per vaffel.
e) Sammenhengen mellom ant. solgte vafler og fortjeneste kan skrives på formen y = ax + b, der y er fortjeneste og x er antall solgte vafler. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til fortjenesten til disse barna.

Oppgave 16

Kjøtt som skal grilles bør ha romtemperatur før det legges på grillen. Et kjøttstykke tas ut av fryseren, og legges på kjøkkenbenken. Temperaturen stiger med et lavt antall grader per minutt. Temperaturen *y* er en funksjon av *x* antall minutter – temperaturen kjøttet hadde da det ble tatt ut av fryseren. Bruk tabellen nedenfor til å finne ut tepmperaturen på det frosne kjøttet og hvor mange grader temperaturen stiger med per minutt.

Antall minutter på kjøkkenbenken	60	360
Temperatur på kjøttet	- 12	18

Oppgave 17

Selbu sjokoladefabrikk selger gaveesker med sjokolade, hvor du betaler 40 kr for en gaveeske og 15 kr per sjokoladebit. Prisen y du betaler er en funksjon av x antall sjokoladebiter + gaveeska.

a) Fyll ut tabellen nedenfor, og skriv funksjonsuttrykket til prisen for gaveeske + sjokolade.

Antall sjokolader	0	2	6
Pris			

b) Marker punktene i koordinatsystemet på nedenfor

c) Tegn grafen for prisen for 0 til 15 sjokoladebiter. Skriv navn på aksene.

Bruk grafen til å svare på spørsmålene nedenfor.

d) Omtrent hvor mye må du betale for 9 sjokoladebiter i en gaveeske?

e) En kunde betalte 220 kr. Hvor mange sjokoladebiter kjøpte denne kunden?

Oppgave 18

Tenk deg at du kjøper en ny mobiltelefon velger tilbudet om delbetaling for telefonen. Det betyr at prisen på telefonen deles opp slik at du betaler et fast beløp per måned frem til hele prisen er betalt og telefonen er din. Grafen nedenfor viser sammenhengen mellom hvor mange måneder du har gått siden du kjøpte telefonen og hvor mye du har igjen å betale. Restbeløp *y* er en funksjon av telefonens pris - *x* ant. måneder.

a) Omtrent hvor høyt er restbeløpet når det har gått 7 måneder?
b) Hvor lang tid tar det før telefonen nedbetalt?
c) Hvor mye kostet telefonen?
d) Velg to punkter på grafen hvor du kan lese av nøyaktig x- og y-verdi, og bruk disse punktene til å regne ut nedbetaling per måned.
e) Sammenhengen mellom ant. måneder og restbeløp kan skrives på formen y = ax + b, der y er restbeløp og x er antall måneder. Bruk tallene du har funnet i c) og d), og lag funksjonsuttrykket til restbeløpet på denne telefonen.

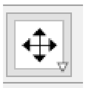
2.4 Lineære funksjoner i GeoGebra

Vi kan bruke en graftegner (GeoGebra) til å tegne lineære funksjoner. Vi skriver da inn funksjonsuttrykket i GeoGebra. Det er viktig å sette navn på aksene i koordinatsystemet.

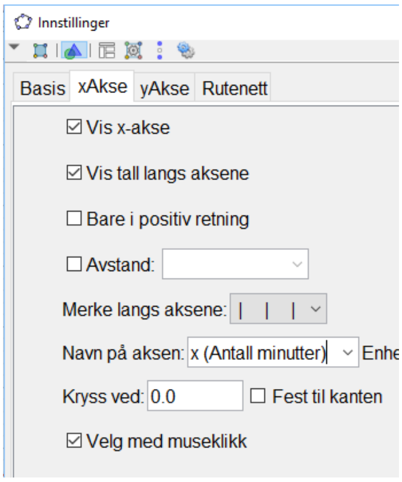
Eksempel:

Ole skal lade opp mobiltelefonen sin. Displayet viser at han har 23% igjen på batteriet og batteriet lades med 1% i minuttet. Uttrykket f(x) = x + 23 viser oppladingsprosenten til batteriet etter x minutter. Vi skal tegne funksjonen de første 60 minuttene.

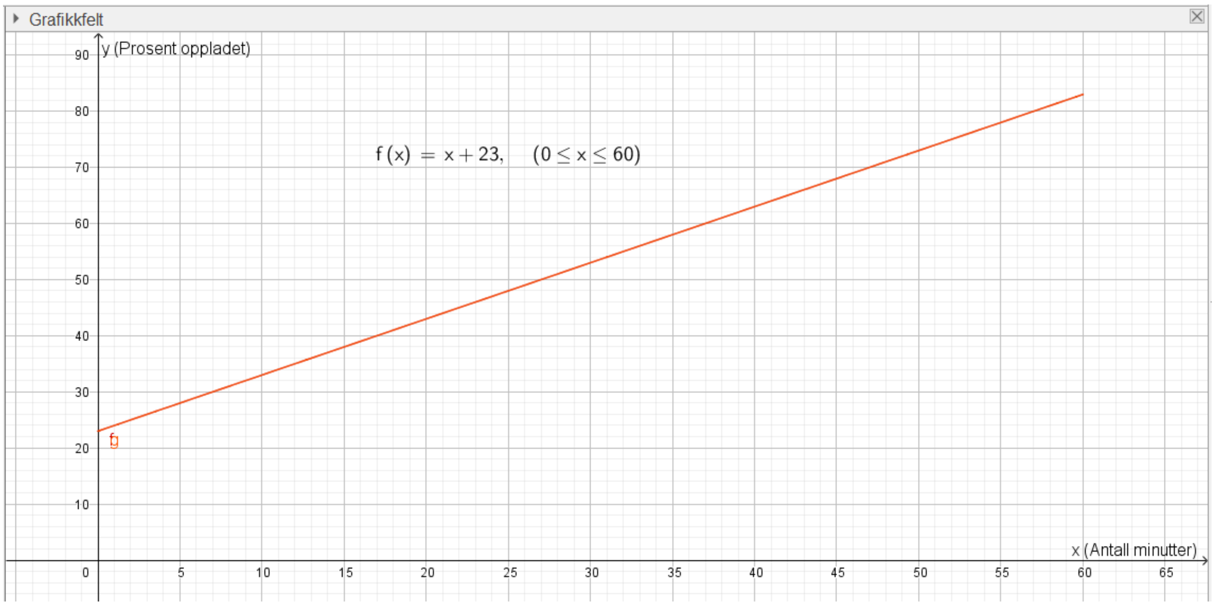
Vi går på **Skriv inn** og velger **Funksjon(Funksjon,start,slutt)**. Vi skriver inn det som står etter = i uttrykket og 0 på start og 60 på slutt slik **Funksjon(x+23,0,60)** og trykker enter.

Vi stiller aksene med  og drar i x og y-aksen slik at grafen legger seg over x-aksen fra 0 til 60.

Vi setter navn på aksene ved å **høyreklikke i Grafikkfeltet**, velge **Grafikkfelt** og x- og y-akse etter tur. Der det står **Navn på aksen** skriver vi inn hva x og y er.



Da blir bildet i GeoGebra slik:



Oppgave 19

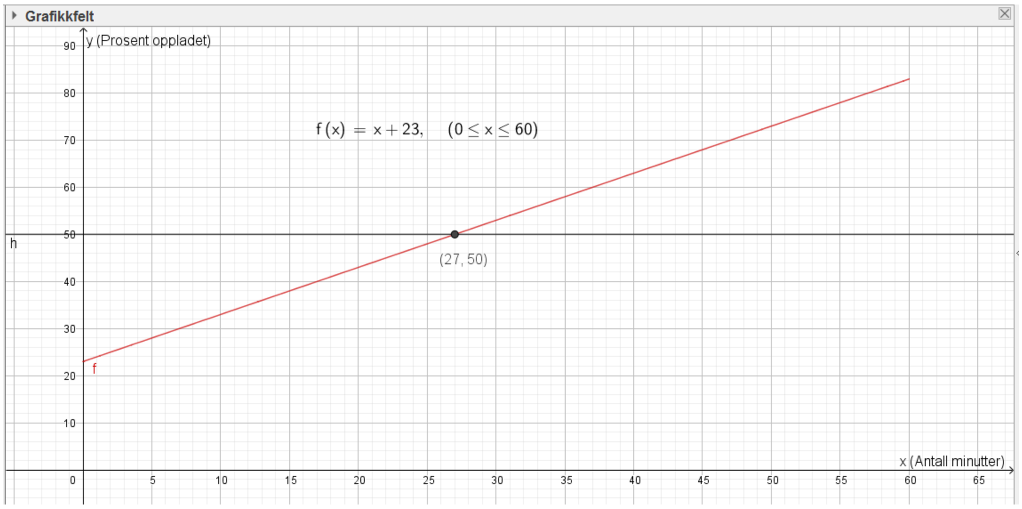
Bruk funksjonsuttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2. Tegn dem i hvert sitt koordinatsystem i GeoGebra og la $0 \leq x \leq 10$.

Vi kan bruke grafen til å finne informasjon om situasjonen vi har tegnet.

Eksempel.

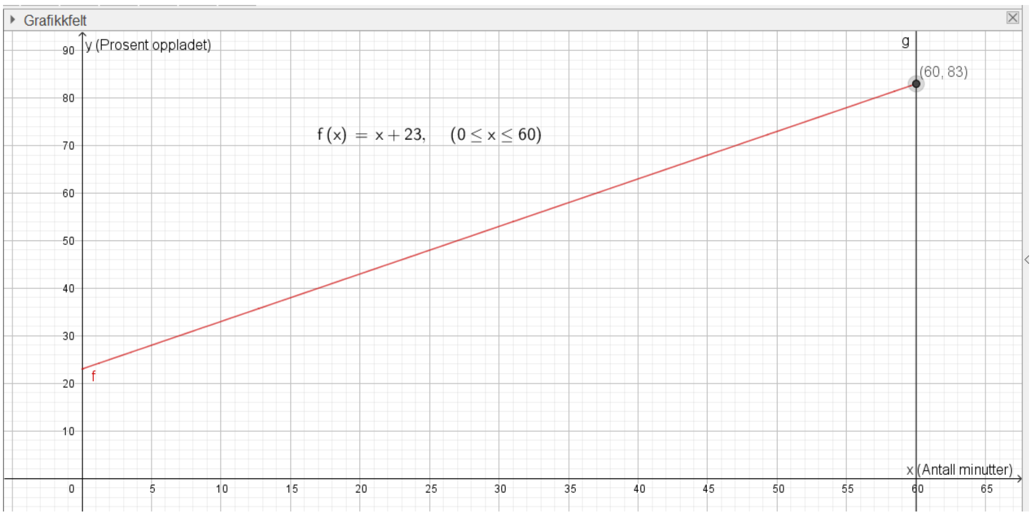
Ole lurer på når batterikapasiteten er på 50% og hvor mange prosent han har på batteriet etter 60 minutter.

Vi finner batterikapasiteten på y-aksen og skriver derfor inn **y = 50** på **Skriv inn** og trykker enter. Vi får da frem en rett linje som krysser grafen. Vi leser av x-verdien i skjæringspunktet med grafen ved å bruke **Skjæring mellom to objekt**.



Vi ser at batterikapasiteten er 50% etter 27 minutter.

Når vi skal finne batterikapasiteten etter 60 minutter, gjør vi det samme som ovenfor. Men vi finner minuttene på x-aksen. Derfor skriver vi inn **x = 60** på **Skriv inn** istedenfor. Vi leser så av y-verdien i skjæringspunktet med grafen.



Vi ser at batterikapasiteten er på 83% etter 60 minutter.

Du må alltid lime inn GeoGebra bildet i besvarelsen din og skrive svartekst og fremgangsmåte (hvilke kommandoer du har brukt i GeoGebra)

Sjekkliste for GeoGebra-oppgaver:

- ☐ Har jeg skrevet inn aksetitler?
- ☐ Har jeg trukket funksjonsuttrykket inn i koordinatsystemet?
- ☐ Har jeg trukket alle punktene inn i koordinatsystemet?
- ☐ Synes hele grafen på bildet?
- ☐ Har jeg skrevet framgangsmåte på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg skrevet en svarsetning på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg tydelig oppgavenummer?

Oppgave 20

Vi har en vekt og et begerglass. Vi slår på vekta og setter begerglasset på vekta. Vi legger i en og en terning og leser av hva vekta viser. Uttrykket

$$y = 5x + 100$$

viser vekta y når vi har lagt på x antall terninger.

a) Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 20
b) Hva viser vekta når vi har lagt på 7 terninger?
c) Hvor mange terninger ligger det på vekta når den viser 150 gram?
d) Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
e) Hvor mye veier en terning?

Oppgave 21

Per fyller bensintanken helt full. Han vil se hvor langt han kan komme på en full tank. Uttrykket

$$y = -0{,}5x + 45$$

viser hvor mange liter han har igjen på tanken når han har kjørt x mil.

a) Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 100
b) Hvor mye har Per igjen på tanken når han har kjørt 30 mil?
c) Hvor langt har Per kjørt når det er 10 liter igjen på tanken?
d) Hvor langt har han kjørt når tanken er tom?
e) Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
f) Hvor mange liter bruker bilen per mil?

3. Eksponentielle funksjoner

3.1 Flere prosentvis like endringer

I praksis kan det være lett å blande eksponentiell og lineær vekst, et mål er derfor å kunne avgjøre når veksten er eksponentiell og når den er lineær.

«Ja, Nei, Hvorfor?»

Timelønna til Peter er 200 kr. Han får to ulike tilbud om lønnsøkning:

Tilbud A: 10 % etter 6 måneder, deretter nye 10 % etter 12 måneder.	**Tilbud B: 20 kr etter 6 måneder, deretter nye 20 kr etter 12 måneder**

Vil Peter ha den samme lønna etter 12 måneder uavhengig av hvilket tilbud han velger?

Eksempel 1

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Hvor mye er det på konto etter 1 år? Etter 2 år? Hvorfor blir økningen forskjellig disse årene?

Etter 1 år vil si at 10000 kr har økt med 5 %. 1 % av 10000 kr er $\frac{10000}{100} = 100$ kr.
5 % er da $100 \cdot 5 = 500$. Etter 1 år er det 10000 + 500 = 10500 kroner i fondet.

Etter 2 år vil si at 10500 kr har økt med 5 %. 1 % av 10500 kr er $\frac{10500}{100} = 105$ kr
5 % er da $105 \cdot 5 = 525$. Etter 2 år er det 10500 + 525 = 11025 kroner i fondet.

Det første året øker fondet med 500 kr, det andre året øker fondet med 525 kr. Økningen er altså større det andre året, fordi tallet vi regner 5 % av er større.

Oppgave 22

Ved en skole er det 1000 elever. Antallet elever **vokser** med omtrent 10 % hvert år.

a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? ______________________

b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? ______________________

c) Hvorfor er endringen eksponentiell? ____________________________

Oppgave 23

a) En flatskjerm koster 10 000 kr. Vi antar at verdien **avtar** med 10 % hvert år.

b) Hva er verdien til flatskjermen etter 1 år? __________________________

c) Hva er verdien til flatskjermen etter 2 år? __________________________

d) Hvorfor er endringen eksponentiell? ______________________________

Oppgave 24

Tabellen under viser økningen i antall treningstimer til en svømmer fra hun er 15 til hun er 20 år.

a) Regn ut økningen i antall timer fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

b) Regn ut økningen i prosent fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

c) Er økningen i antall treningstimer eksponentiell? Begrunn svaret.

Alder	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Timer	**500**	**550**	**605**	**665**	**730**	**803**
Økning i timer						
Økning i prosent						

Ved eksponentiell vekst er endringen **prosentvis lik** per enhet.

3.2 Uttrykket til eksponentielle funksjoner

Fra kapitlet om prosent og oppgavene over ser vi at verdien alltid endrer seg med samme prosent fra en periode til den neste når veksten er eksponentiell. Da kan vi skrive verdien etter x år som ett regnestykke. Vi ser på situasjonen fra eksempel 2:

Eksempel 2

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Vekstfaktoren er $100\ \% + 5\ \% = 105\ \% = \frac{105}{100} = 1{,}05$

Startverdi: 10000

Uttrykk for verdi etter 1 år: $10000 \cdot 1{,}05$

Verdien etter 2 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^2$

Verdien etter 3 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^3$

Verdien etter x år: $10000 \cdot \underbrace{1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot \ldots \cdot 1{,}05}_{x \text{ antall år}} = 10000 \cdot 1{,}05^x$

Utrykk for eksponentiell vekst: **Startverdi · Vekstfaktor**$^{\textbf{antall perioder}}$

Oppgave 25

Skriv opp uttrykket for antallet elever om x år ved skolen i oppgave 8

____

Oppgave 26

Skriv opp uttrykket for verdien til flatskjermen om x år i oppgave 9

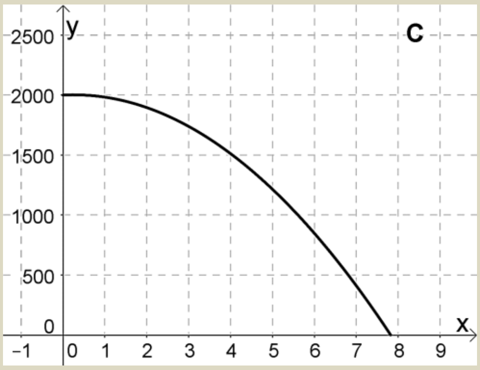
____

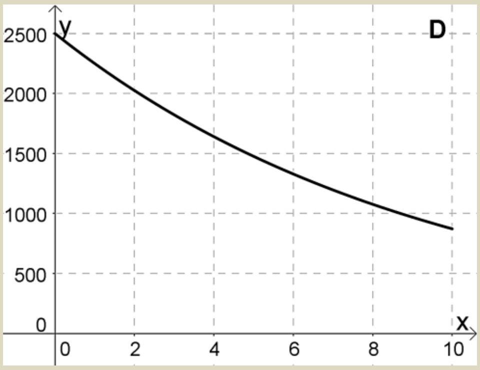
3.3 Grafen til eksponentielle funksjoner

Hvordan ser grafen ut til noe som vokser eller avtar med samme prosent?

Oppgave 27

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser eksponentiell vekst.

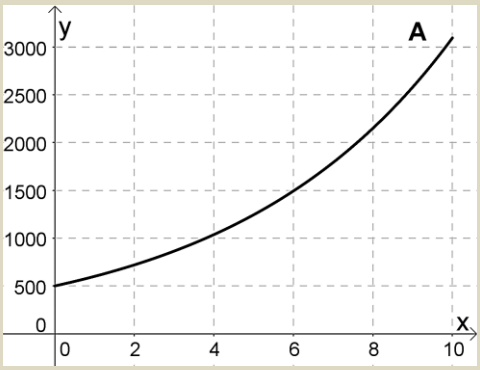


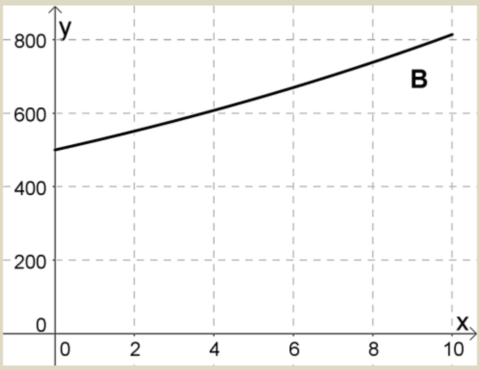


Forklar hvorfor grafen(e) viser eksponentiell vekst

Oppgave 28

Hvilken graf nedenfor er grafen til funksjonen $f(x) = 500 \cdot 1{,}20^x$? Begrunn svaret





3.4 Eksponentielle funksjoner i GeoGebra

Vi kan jobbe med eksponentialfunksjoner i GeoGebra på samme måte som med lineære funksjoner.

Oppgave 29

Da Dennis ble født satte foreldrene inn penger i et aksjefond. Uttrykket

$$f(x) = 10000 \cdot 1{,}05^x$$

viser hvor mye han har i aksjefondet etter x år.

a) Tegn grafen til f når x er mellom 0 og 20 år.
b) Hvor mye har Dennis i aksjefondet etter 10 år?
c) Når har han mer enn 15 500 kr i aksjefondet?
d) Hvor mange kroner satte foreldrene til Dennis inn i aksjefondet da han ble født? Forklar.
e) Hvor mange prosent rente får han i avkastning per år? Forklar.

Oppgave 30

Funksjonen

$$E(x) = 650 * 0{,}9^x$$

viser elevtallet ved en skole x år etter 2010.

a) Hva forteller tallene i uttrykket?
b) Tegn grafen til E for perioden 2010 til 2020.

Funksjonen

$$N(x) = 355 * 1{,}10^x$$

viser elevtallet ved naboskolen x år etter 2010.

c) Hva forteller tallene i uttrykket? Forklar.
d) Tegn grafen til N i det samme koordinatsystemet som E.
e) Når er det like mange elever på de to skolene.
f) I 2016 ble de to skolen slått sammen. Hvor mange elever var det da ved den nye skolen?

4. Polynomfunksjoner

"Polynom" betyr "flere ledd". En polynomfunksjon består av en sum av potenser av *x*. Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

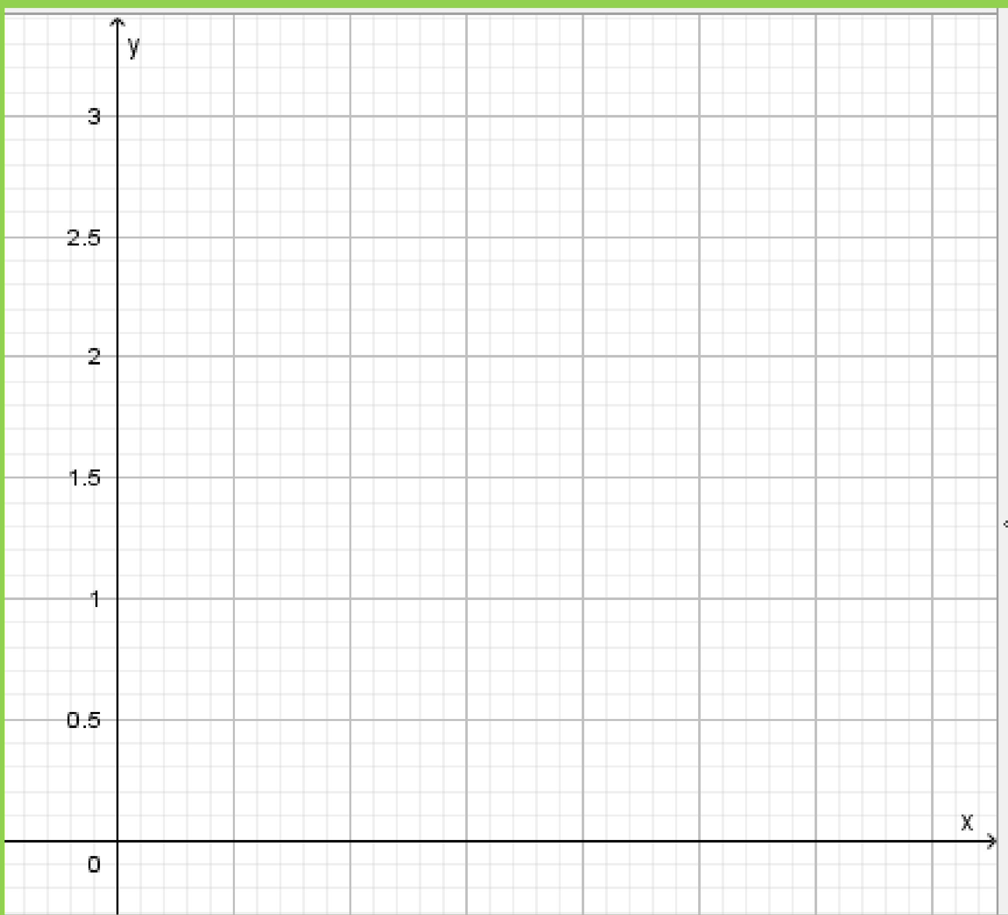
Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon.*

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene *f* og *g* ovenfor.

Utforskende oppgave – Grafen til en polynomfunksjon

En lærer kaster en ertepose opp i lufta, og lar den lande på gulvet. Skisser en graf som beskriver erteposens bevegelse i koordinatet nedenfor. Hvilke navn skal x- og y-aksen?



Hvilke spørsmål kan vi stille til en slik graf?

Akseintervall	
Definisjons-område	
Toppunkt	
Bunnpunkt	
Nullpunkt	

4.1. Spørsmål til polynomfunksjoner

Vi kan stille de samme spørsmålene til polynomfunksjoner som til lineære funksjoner. Siden grafen til polynomfunksjoner endrer retning kan vi i tillegg stille noen andre spørsmål.

Eks:
Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter *x* sekunder er ballen tilnærmet *h*(x) meter over bakken, der

$$h(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

Inntegning av grafen

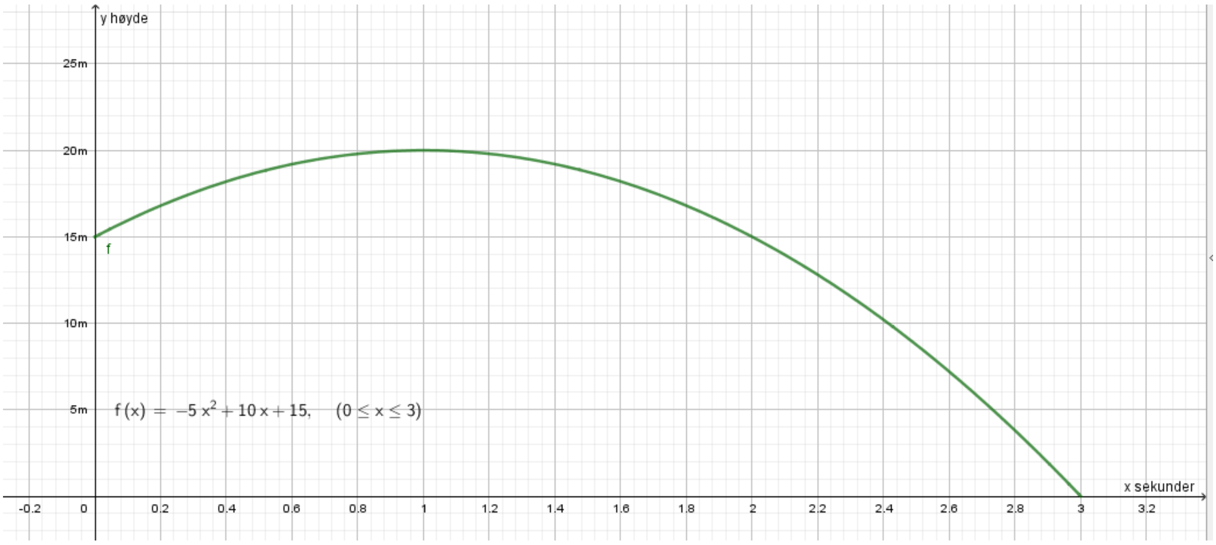
a) Tegn grafen til h når x er mellom 0 og 3 sekunder. Hvor høyt står Karl?
Dette betyr at definisjonsområdet til funksjonen er 0 til 3. Dette kan skrives på andre måter.

Eks:

$0 \leq x \leq 3$

$x \in [0,3]$

Løsning:

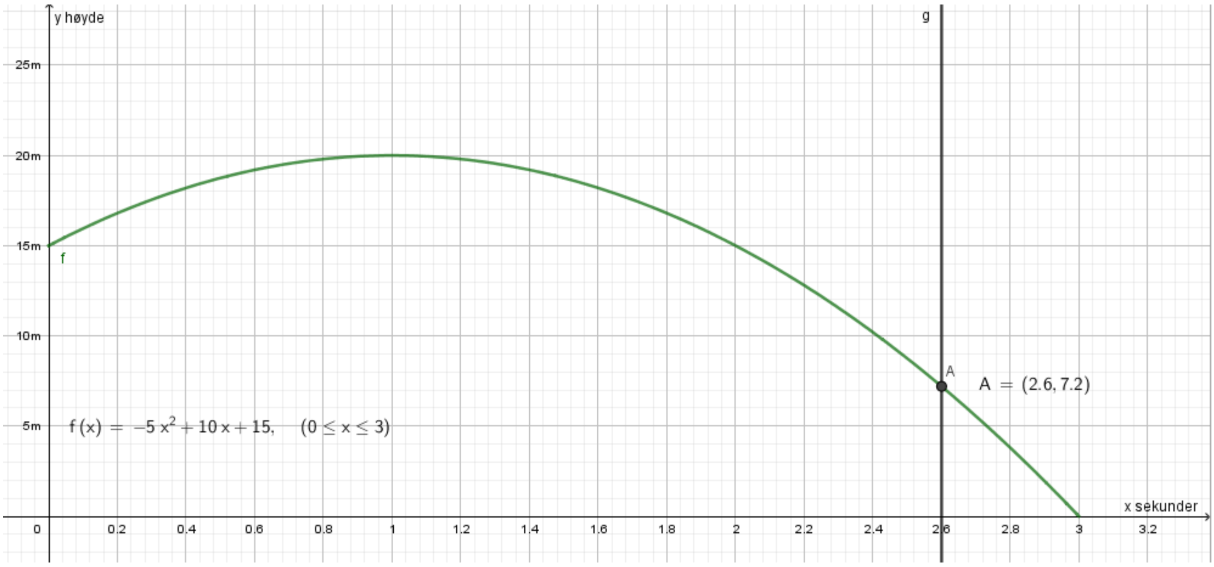


Svar: Karl står 15 meter over bakken. Dette er konstantleddet til funksjonen, og kan enten finnes i funksjonsuttrykket eller der grafen skjærer y-aksen.

Finne en y-verdi når x-verdien er oppgitt – skjæring mellom to objekt

b) Hvor høyt er ballen etter 2,6 sekunder?

2,6 sekunder er x-verdi. Høyden (som vi skal finne) er den tilhørende y-verdien.



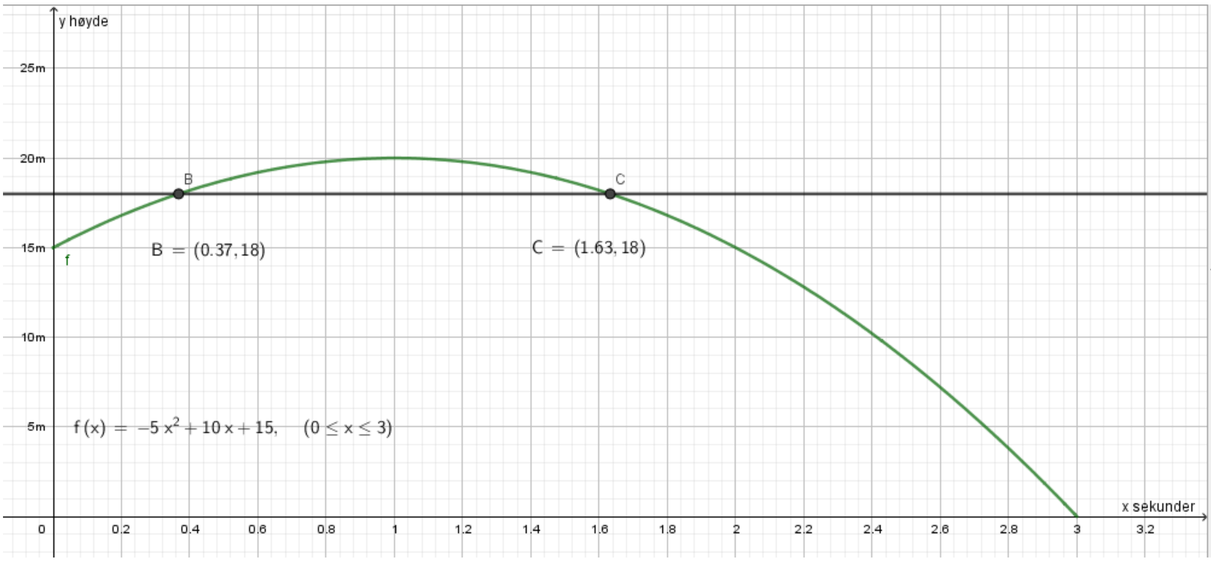
Svar: etter 2,6 sekunder er ballen 7,2 meter over bakken.

Fremgangsmåte: skrev x = 2.6, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt A.

Finne en eller flere x-verdier når y-verdien er oppgitt

c) Når er ballen 18 meter over bakken?

18 meter er y-verdi. Siden ballen er 18 meter over bakken både på vei opp og ned vil denne y-verdien ha 2 tilhørende x-verdier.

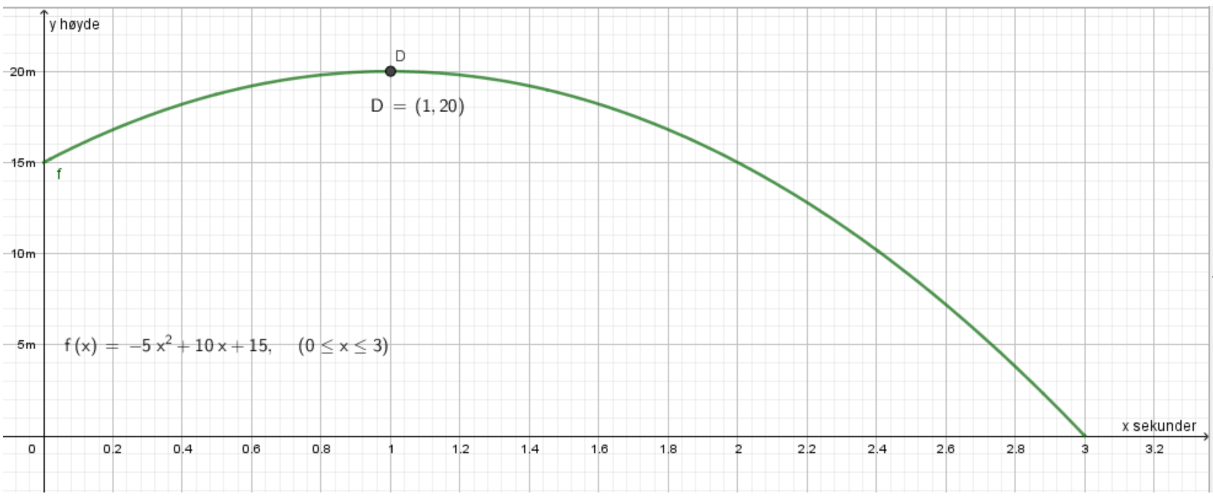


Svar: Ballen vil være 18 meter over bakken etter 0,37 og 1,63 sekunder.
Fremgangsmåte: skrev y = 18, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punktene B og C.

Finne topp- og bunnpunkter - ekstremalpunkt

d) Når er ballen på sitt høyeste? Hvor høyt er den da?

«Ekstremalpunkt» finner punktet der grafen endrer retning. Ofte er dette på det laveste/høyeste punktet. Derfor kan vi ofte bruke ekstremalpunkt for å finne topp- eller bunnpunkt (men ikke alltid).

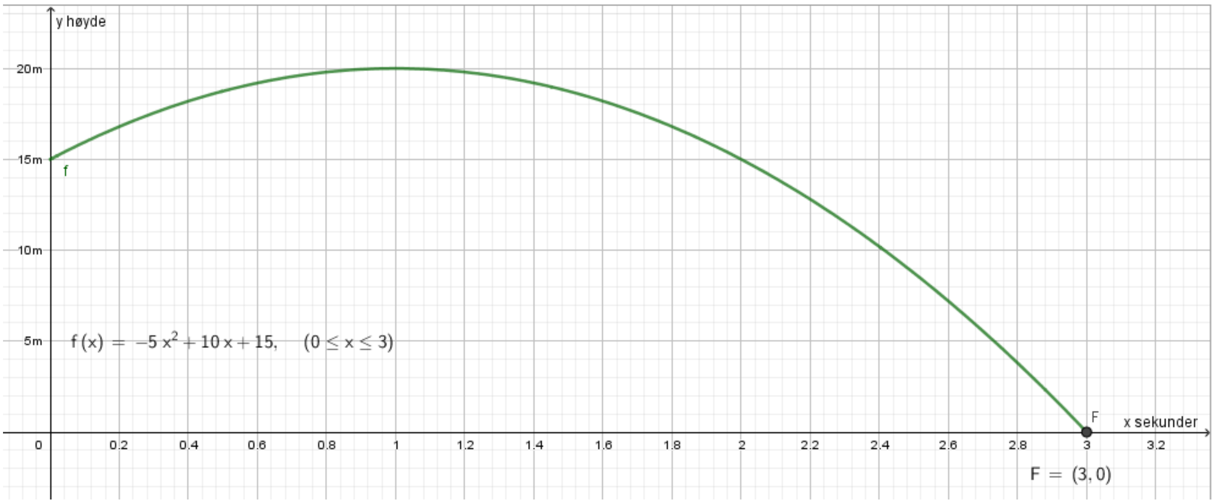


Svar: Ballen er på sitt høyeste etter 1 sekund. Da er ballen 20 meter over bakken.
Fremgangsmåte: brukte «ekstremalpunkt», fikk punkt D.

Finne nullpunkter - nullpunkt

e) Når treffer ballen bakken?

Når grafen skjærer x-aksen er y-verdien = 0. Dette kalles nullpunkt.

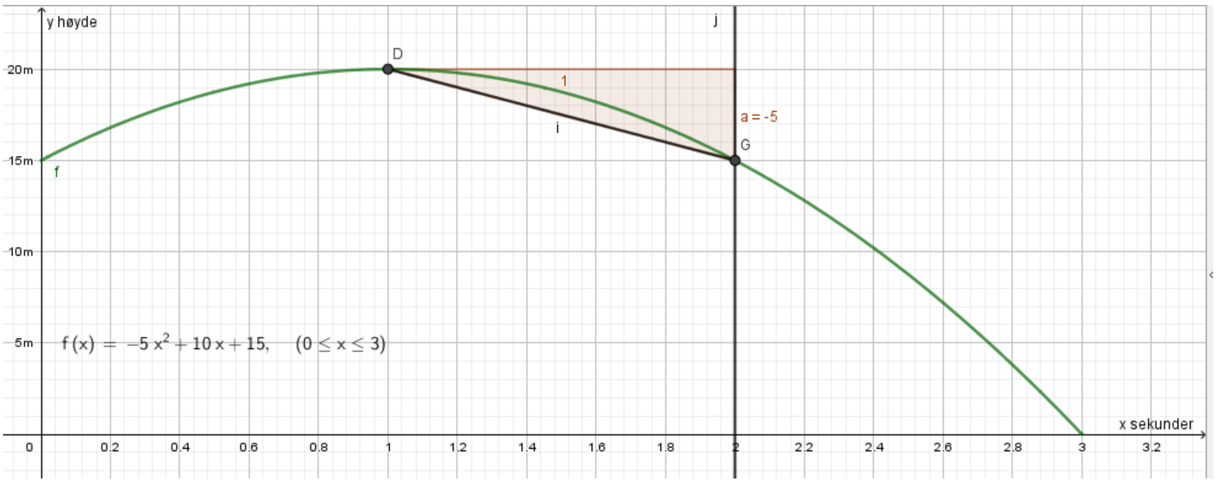


Svar: ballen treffer bakken etter 3 sekunder.
Fremgangsmåte: brukte «nullpunkt», fikk punkt F.

Finne gjennomsnittlig vekstfart mellom to x-verdier

f) Finn gjennomsnittlig vekstfart i ballens høyde mellom 1 og 2 sekunder.

Gjennomsnittlig endring = lik (konstant) endring = lineær funksjon. Vi er ute etter stigningstallet til den rette linja mellom de to oppgitte punktene.



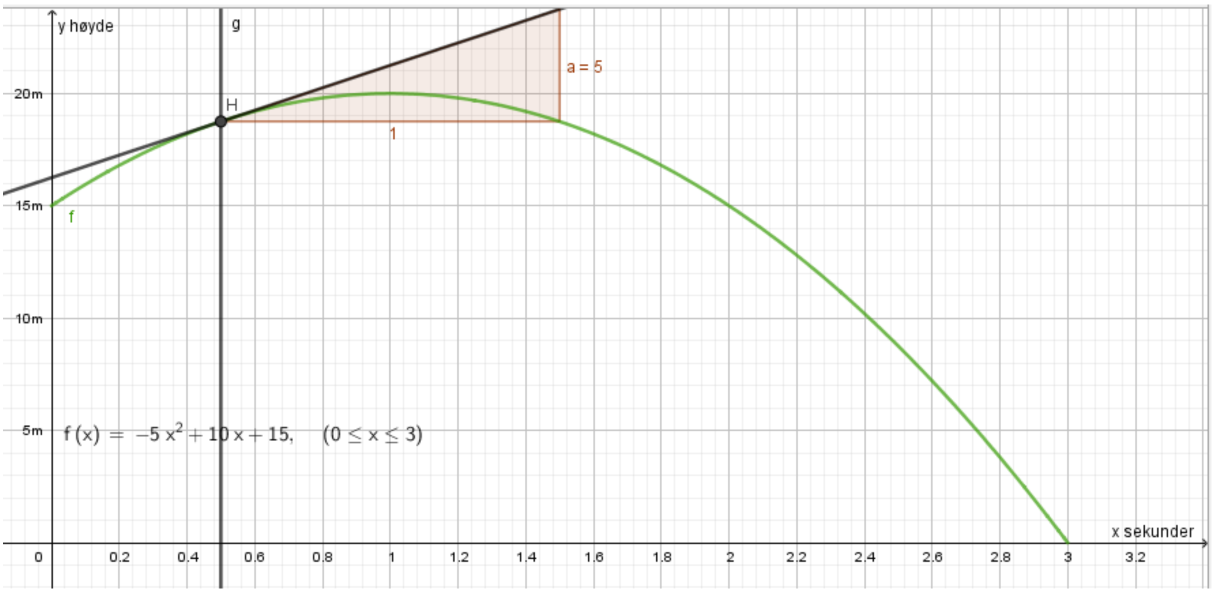
Svar: ballen sank i gjennomsnitt 5 meter per sekund mellom 1 og 2 sekunder.

Fremgangsmåte: skrev x = 2, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt G, brukte «linjestykke mellom to punkt», fikk linje i, brukte «stigning».

Finne momentan vekstfart i et punkt

g) Finn den momentane vekstfarten til $f(0,5)$.

Momentan vekstfart forteller hvordan y-verdien endres fra et punkt dersom x øker litt. Vi er ute etter stigningstallet til den rette linja som tangerer punktet og grafen.



Svar: fra 0,5 sekunder stiger ballens høyde med 5 m/sek.

Fremgangsmåte: skrev x = 0.5, brukte «skjæring mellom to objekt», fikk punkt H, brukte «tangent», fikk linje j, brukte «stigning».

4.2. Praktisk bruk av polynomfunksjoner

Sjekkliste for GeoGebra-oppgaver:

- ☐ Har jeg skrevet inn aksetitler?
- ☐ Har jeg trukket funksjonsuttrykket inn i koordinatsystemet?
- ☐ Har jeg trukket alle punktene inn i koordinatsystemet?
- ☐ Synes hele grafen på bildet?
- ☐ Har jeg skrevet framgangsmåte på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg skrevet en svarsetning på alle deloppgavene?
- ☐ Har jeg tydelig oppgavenummer?

Oppgave 31

Funksjonen h gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.
Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen t år etter 1. januar 1990.

a) Tegn grafen til h for $0 \leq t \leq 10$.
b) Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjorter var det i kommunen da? Når var hjortebestanden på sitt laveste, og hvor mange hjorter var det i kommunen da?
c) Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
d) Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 – 1. januar 1998?
e) Finn den momentane vekstfarten til $h(2)$, og gi en praktisk tolking av svaret.

Oppgave 32

Funksjonene G og J gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \qquad 0 \leq x \leq 12$$

$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \qquad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.
b) Hvor mange kilogram veide hver av de to babyene etter 8 måneder?
c) Når passerte vekta til hver av de to babyene 7 kilogram?
d) Hvor mye vokste Geir og Janne i gjennomsnitt per måned det første leveåret?
e) Finn den momentane vekstfarten til $G(2)$ og $J(2)$. Gi en praktisk tolking av svaret.

Oppgave 33

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \le x \le 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f

b) Noen sørlendinger bader når sjøtemperaturen er høyere enn 14 °C. Når kunne de gjøre dette ifølge modellen?

c) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

d) Bestem $f(100)$ og den gjennomsnittlige endringen i temperatur per dag de første 100 dagene i 2014.

Oppgave 34

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside x timer etter midnatt et gitt døgn.

a) Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 24$.

b) Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden? Hvor mange personer var logget på nettsiden da?

c) Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

d Bestem den gjennomsnittlige endringen i antall påloggete per time fra kl. 06.00 til kl. 14.30.

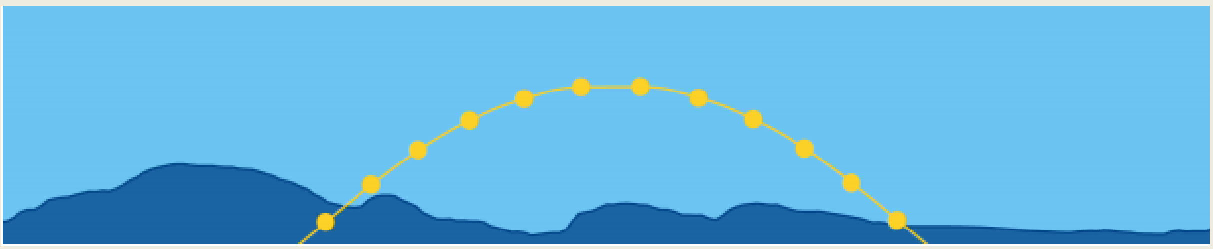
e) Finn den momentane vekstfarten til x = 19. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 35

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader *B(x)* sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.



a) Bruk graftegner til å tegne grafen til B.

b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?

d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 11.30?

e) Finn den momentane vekstfarten til *B*(20), og gi en praktisk tolking av svaret.

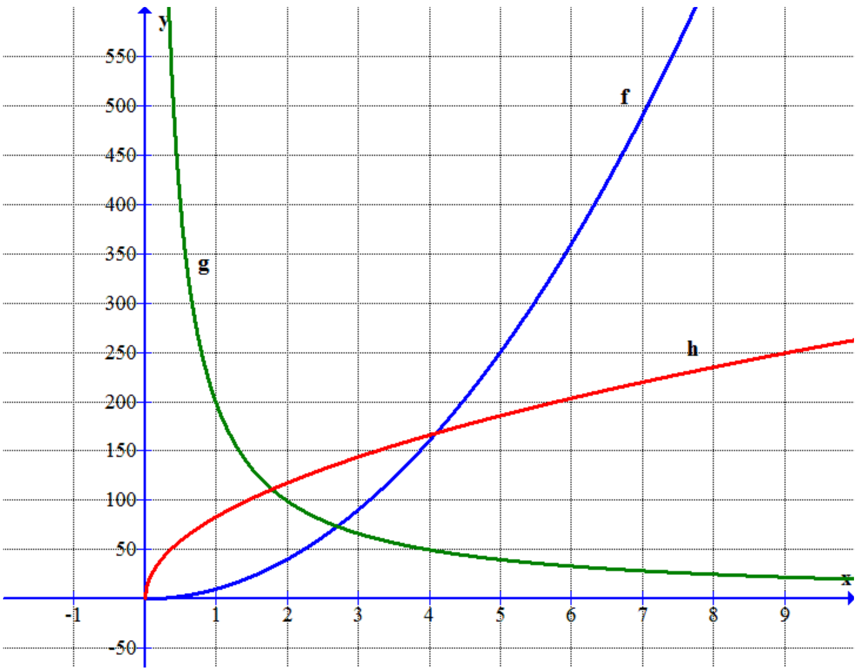
5. Potens- og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er *a* og *b* faste tall. Eksempler:

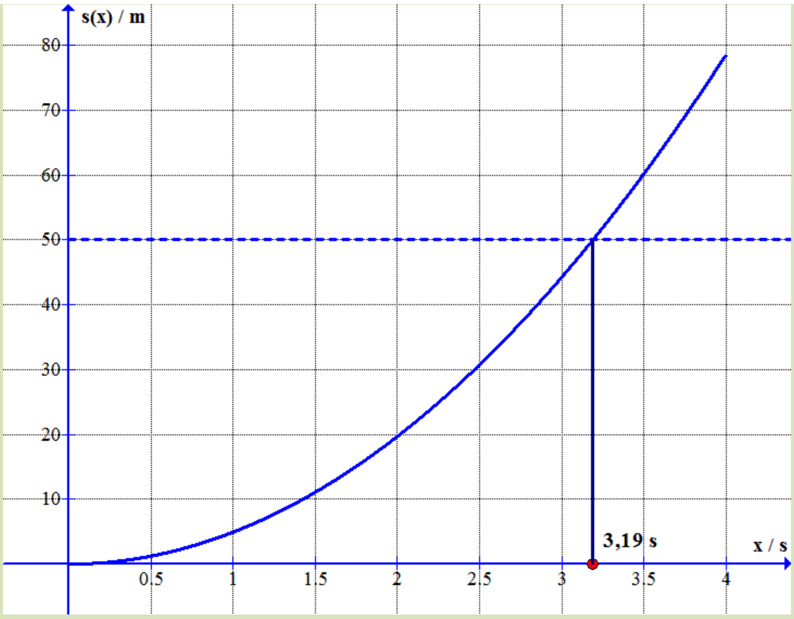
$$f(x) = 10 \cdot x^2$$
$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 3
Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter *x* sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x) = 4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..
For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja y= 50 i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

Oppgave 36

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle x meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x) = 0,45\sqrt{x}$.

a) Tegn grafen til t når $0 \leq x \leq 100$. $\sqrt{x}$ skriver du som sqrt(x) i Geogebra. (sqrt = square root.)

b) Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?

c) Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

GeoGebra – fremgangsmåte

Lage graf for et bestemt definisjons-område	
Lage graf utfra punkter	
Skrive inn aksetitler	
Tilpasse x- og y-aksen	
Svare på oppgaver	
Finne en x- eller y-verdi når den andre er oppgitt	
Finne topp- og bunnpunkt	
Finne nullpunkt	
Finne gjennomsnittlig endring mellom to x-verdier	
Finne momentan endring/vekstfart	

Oppsummerende oppgave

Funksjonen T gitt ved

$$T(x) = -0{,}08x^3 + 1{,}29x^2 - 3{,}9x + 1{,}2 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq 12$$

viser temperaturen i grader Celsius *T(x)* på Hellerud 1. april et år x timer etter midnatt

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *T*.

Fremgangsmåte:

b) Når var temperaturen over 10 ºC?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

c) Hva var temperaturen kl 01:00?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

d) Når var temperaturen 0 ºC?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

e) Hva var den laveste og den høyeste temperaturen disse timene?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

f) Hvor mange grader økte temperaturen med i gjennomsnitt per time fra den var på det laveste til den var på det høyeste?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

g) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen *T* når x=11.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret

Svartekst:
Fremgangsmåte:

Lim inn bildet fra GeoGebra her:

Eksamensoppgaver. Løsningsforslag finner du på ndla.no eller matematikk.net

V15 - Oppgave 7 (del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet h(t) meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$							

b) Tegn grafen til h.

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h(0)$ og $h(3)$.

V15 - Oppgave 8 (del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

V15 - Oppgave 5 (del 2)

Du skal kjøpe ny sykkel, og du vil forsikre den. Dersom sykkelen blir stjålet, må du betale 2000 kroner i egenandel på forsikringen.

Anta at sykkelen koster P kroner som ny. Dersom sykkelen blir stjålet før det har gått et år, vil du få utbetalt (P - 2000) kroner i erstatning fra forsikringsselskapet. Erstatningen avtar med 10 % per år.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Forklar at $F(x) = (P - 2000) \cdot 0,9^x$ er en modell for hvor mye du får utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter x år.

Du velger å kjøpe en sykkel som koster 10 000 kroner.

b) Hvor mye får du utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter 7 år?

For å forsikre sykkelen må du betale 150 kroner i forsikringspremie per år.

Anta at sykkelen blir stjålet etter x år.

c) Sett opp en modell som viser hvor mye du totalt sitter igjen med når du tar hensyn til det du har betalt i forsikringspremie i løpet av disse x årene.

Din venn Ronny mener at du bør si opp forsikringsavtalen etter 13 år.

d) Ta utgangspunkt i modellen du fant i oppgave c) og kommenter Ronnys utsagn.

V15 - Oppgave 6 (del 2)

Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \qquad 0 \le x \le 300$$

viser temperaturen f (x) grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet *x* dager etter

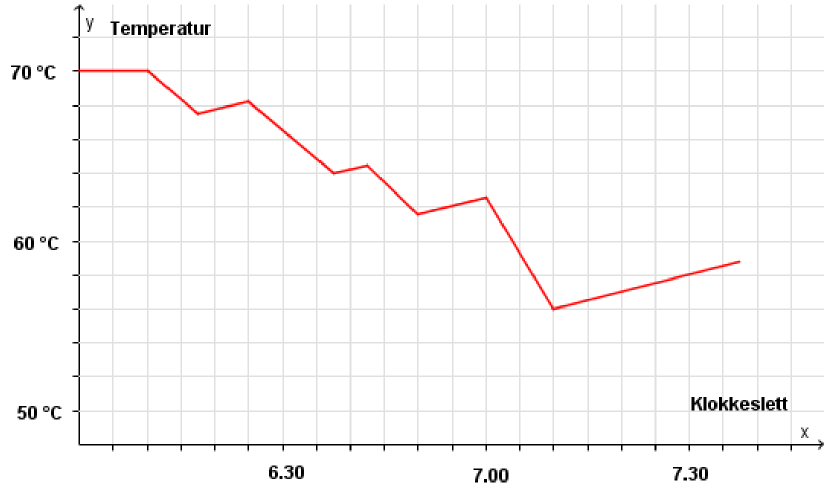
31. desember 2013.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *f*.

Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

b) Bestem *f*(100) og den momentane vekstfarten til *f* når *x* = 100.
Hva forteller disse svarene?

H15 - Oppgave 10 (del 1)



Hos familien Vassdal er termostaten i varmtvannstanken satt til 70 °C. Når familien bruker varmtvann fra tanken, renner kaldt vann inn, og gjennomsnittstemperaturen på vannet i tanken avtar. Varmeelementet slår seg da automatisk på, og vannet varmes opp igjen.

Grafen ovenfor viser hvordan temperaturen i tanken varierte en morgen. Det varme vannet ble bare brukt til å dusje.

a) Hvor mange familiemedlemmer dusjet denne morgenen?

Datteren Vanda var den som brukte lengst tid i dusjen.

b) Hvor lenge dusjet hun?

Da familien forlot hjemmet klokka 7.30, var temperaturen i varmtvannstanken 58 °C.

c) Hvor lang tid tok det før temperaturen var steget til 70 °C igjen?

V15 - Oppgave 2 (del 2)

Funksjonene G og J gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$
$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \qquad 0 \le x \le 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.

b) Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?

c) Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?

d) Bestem $\frac{G(12)-G(0)}{12}$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2}$
Hva forteller disse svarene om vekten til Geir?

V16 - Oppgave 6 (del 1)

Marte er telefornselger. Hun har fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner.
Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

a) Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.

b) Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.

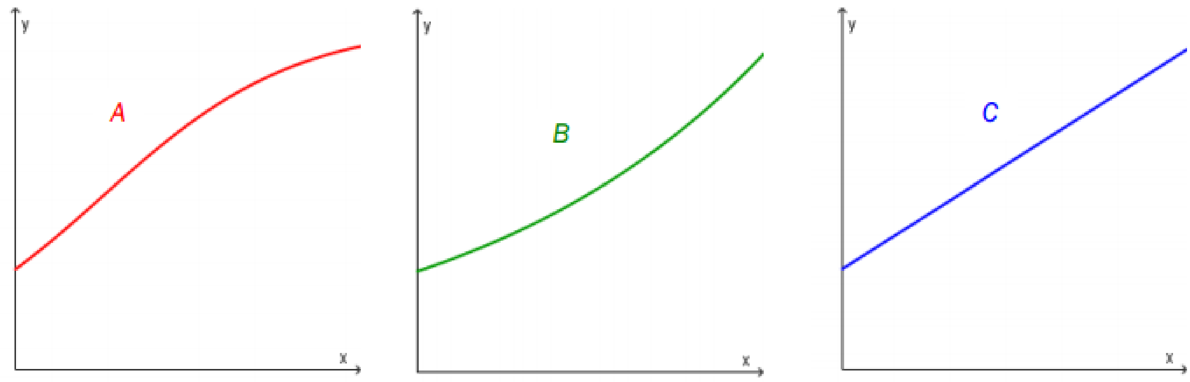
c) Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

V16 - Oppgave 6 (del 1)

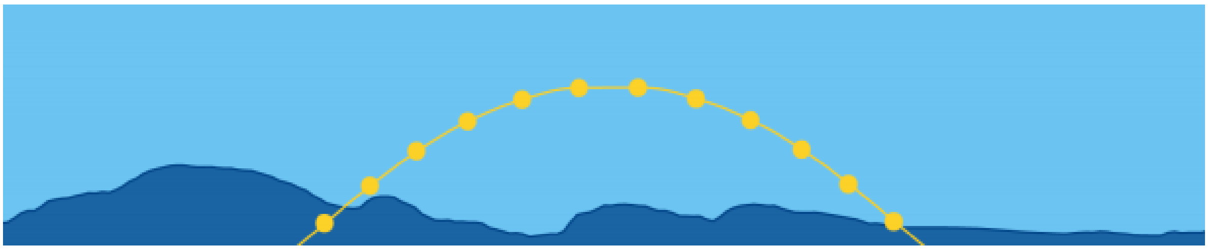
Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt.

Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse grafene illustrerer eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt.

(oppgaven fortsetter på neste side)



V16 - Oppgave 3 (del 2)



Funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}5 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola står over horisonten *x* timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *B*.

b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?

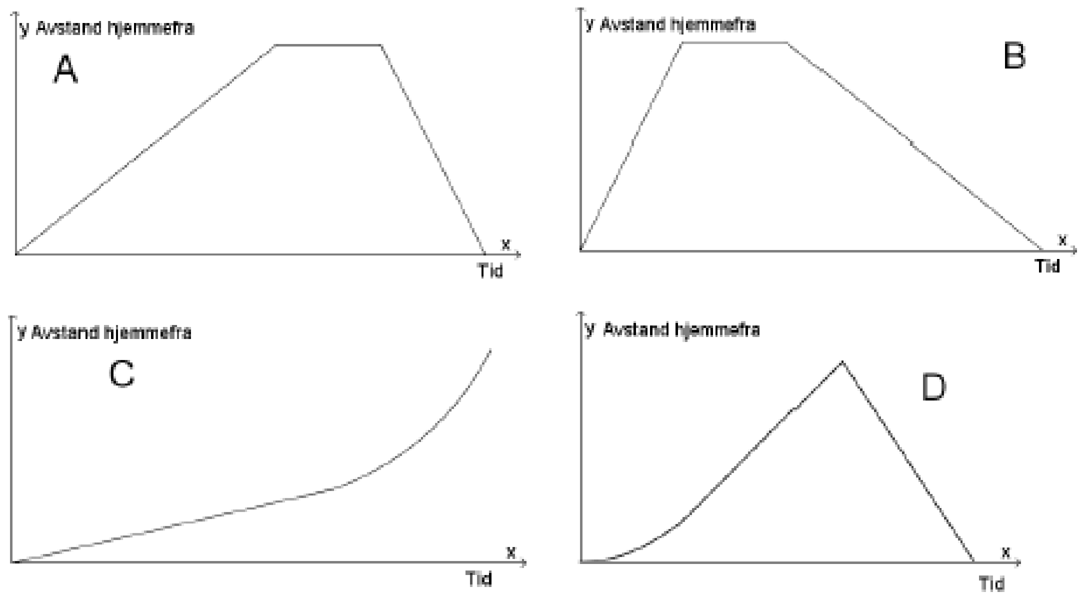
d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokken 05.00 til klokka 12.00?

H16 - Oppgave 10 (del 1)

Nedenfor har vi beskrevet fire ulike situasjoner.

Situasjon	Beskrivelse
1	Eline tar en løpetur. Hun starter hjemmefra i rolig tempo og øker så tempoet etter hvert. Etter en stund snur hun og løper raskt tilbake samme vei.
2	Eline løper hjemmefra for å rekke bussen. Etter å ha ventet noen minutter skjønner hun at hun ikke rakk bussen, og går tilbake samme vei.
3	Eline starter hjemmefra og går opp en bratt bakke. Hun tar en liten pause på toppen av bakken før hun løper tilbake samme vei.
4	Eline starter hjemmefra og padler over fjorden. I starten har hun motvind, men etter hvert avtar vinden, og farten øker.

Nedenfor ser du grafiske framstillinger som beskriver sammenhengen mellom tid og Elines avstand hjemmefra for hver av de fire situasjonene.



Hvilken graf passer til situasjon 1?
Hvilken graf passer til situasjon 2?
Hvilken graf passer til situasjon 3?
Hvilken graf passer til situasjon 4?

Begrunn svarene dine.

H16 - Oppgave 8 (del 1)

Siri har kjøpt bil. Hun antar at verdien av bilen x år etter at hun kjøpte den, vil være gitt ved

$$V(x) = 250\,000 \cdot 0{,}9^x$$

a) Hva forteller tallene 250 000 og 0,9 i dette funksjonsuttrykket om verdien av Siris bil?

b) Hva vil bilens verdi være ett år etter at Siri kjøpte den?

V17 - Oppgave 1 (del 2)

Funksjonen V er gitt ved

$$V(x) = 0{,}064x^4 - 2{,}41x^3 + 28{,}4x^2 - 105x + 39 \qquad , \qquad 0 \le x \le 18$$

viser vannstanden $V(x)$ centimeter over eller under middelvann x timer etter midnatt i Tromsø en dag.

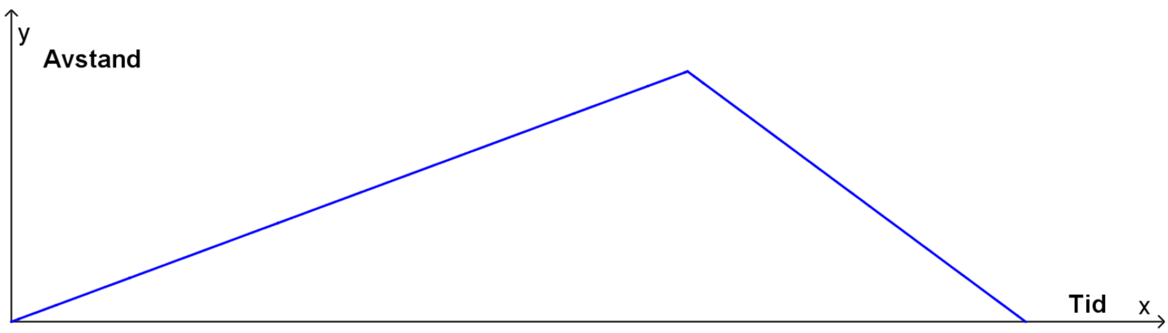
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.

b) Vis at vannstanden er ca. 40 cm under middelvann én time etter midnatt og ca. 31 cm over middelvann 12 timer etter midnatt.

c) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i perioden fra midnatt og fram til klokka 18.00.

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V klokken 07.00.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

V17 - Oppgave 4 (del 2)



Beskriv en praktisk situasjon som passer med grafen ovenfor.

V17 - Oppgave 6 (del 2)

Temperaturen blir lavere jo høyere over havet vi kommer. Spiterstulen ligger 1 106 m over havet. Toppen av Galdhøpiggen ligger 2 469 m over havet. En dag er temperaturen på Spiterstulen 12,0 °C .

Vi antar at temperaturen $T(x)$ °C , *x* meter over Spiterstulen denne dagen er gitt ved.

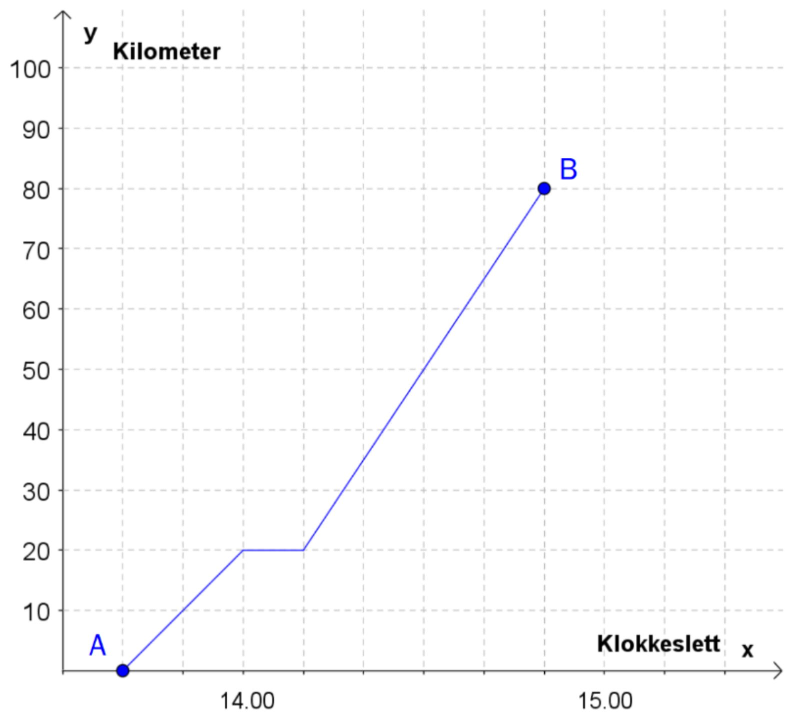
$$T(x) = -0{,}0065x + 12 \quad , \quad 0 \le x \le 1400$$

e) Hvor høyt over Spiterstulen vil du være når temperaturen er 5 °C denne dagen?

f) Bestem temperaturen på toppen av Galdhøpiggen denne dagen.

g) Hvor mange grader synker temperaturen med per 100 m stigning denne dagen?

H17 - Oppgave 3 (del 1)



Et tog kjørte fra by A til by B. Se diagrammet ovenfor.

(oppgaven fortsetter på neste side)

a) Bestem reisetiden mellom de to byene.

b) Beskriv hva som skjer 20 km fra by A.

c) Bestem farten til toget når det er 10 km fra by A, og når det er 10 km fra by B.
Du skal gi svarene i km/h.

H17 - Oppgave 6 (del 1)

I en butikk kan kundene kjøpe armbånd og charms (små figurer) til å feste på armbåndene. Butikken selger alle charms til samme pris. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall charms en kunde setter på et armbånd, og prisen kunden må betale for armbåndet med charms.

Antall charms	3	7
Pris for armbånd med charms (kroner)	1350	2450

a) Hvor mye koster armbåndet, og hvor mye koster hver charm?

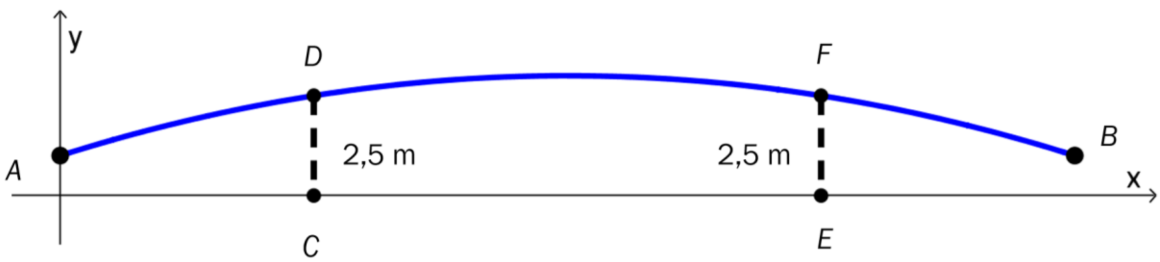
b) Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris for armbånd med charms.

Hanne betaler 3825 kroner for et armbånd med charms.

c) Hvor mange charms har hun på armbåndet?

H17 - Oppgave 2 (del 2)

En gangbro går over en elv. I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet en skisse av broen. På skissen går broen fra punktet A til punktet B.



(oppgaven fortsetter på neste side)

Funksjonen *G* gitt ved

$$G(x) = -0{,}0008x^2 + 0{,}08x + 1 \qquad , \qquad 0 \le x \le 100$$

viser broens høyde $G(x)$ meter over elva ved normal vannstand der den horisontale avstanden fra punktet *A* er *x* meter.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *G*.

En båt har en mast som når 290 cm over vannflaten.

b) Vil båten kunne passere under broen ved normal vannstand?

Broen hviler på to bropilarer i punktene *D* og *F*. Ved normal vannstand er høydene *CD* og *EF* fra vannflaten opp til broen lik 2,5 m.

c) Bestem avstanden fra *C* til *E*.

d) **V18 - Oppgave 1 (del 2)**

Funksjonen A gitt ved

$$A(x) = -0{,}08x^3 + 1{,}29x^2 - 3{,}9x + 6{,}2 \qquad , \qquad 0 \le x \le 12$$

viser hvor mange millioner kvadratkilometer $A(x)$ rundt Antarktis som var dekket av havis x måneder etter 1. januar 2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

b) Hvor lenge var mer enn 10 millioner kvadratkilometer dekket av havis?

c) Hvor mange kvadratkilometer økte området som var dekket av havis, i gjennomsnitt med per måned fra 1. mars til 1. september?

Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 5$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.