

Kapittel 6. Trekanter



Mål for kapittel 6:

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bruke og grunngi bruk av formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning til beregninger i praktisk arbeid
- løse problem som gjelder lengde, vinkel, areal og volum

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg regner ut en ukjent side i en rettvinklet trekant ved bruk av Pytagoras
- ☐ hva formlikhet er og hvordan løse en oppgave basert på formlikhet

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvorfor Pytagoras ligning stemmer
- ☐ hvorfor formlikhet er nyttig i dagliglivet og hvordan formlikhet knyttes til målestokk

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ lage og løse oppgaver knyttet til omkrets, areal og formlikhet
- ☐ forklare nytten ved kunnskap om areal og lengder i dagliglivet
- ☐ vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Test deg selv

1. Regn lengden til den ukjente siden i trekant A (hypotenus)
2. Regn lengden til den ukjente siden i trekant B (katet)
3. Regn lengden til de ukjente sidene i trekant C (katetene i en $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ - trekant)
4. Regn lengden til begge de ukjente sidene i trekant D (h og k i en $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ - trekant)

Mine svar

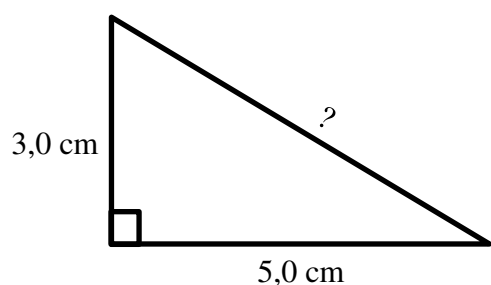
1. Hypotenus: _____ 2. Katet: _____

3. Katet: _____

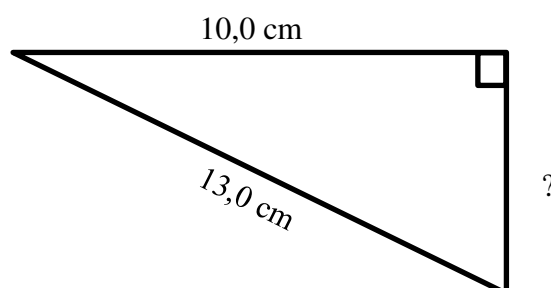
4. Hypotenus: _____ Katet: _____

Sett kryss ved det du fikk til. Skriv en kort kommentar dersom du har gjort noe galt.		
Ukjent side		Dette skal jeg øve på
Hypotenus i en rettvinklet trekant		
Katet i en rettvinklet trekant		
Katet i en $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ - trekant		
Hypotenus i en $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ - trekant		
Katet i en $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ - trekant		

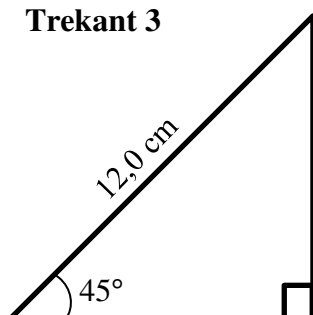
Trekant 1



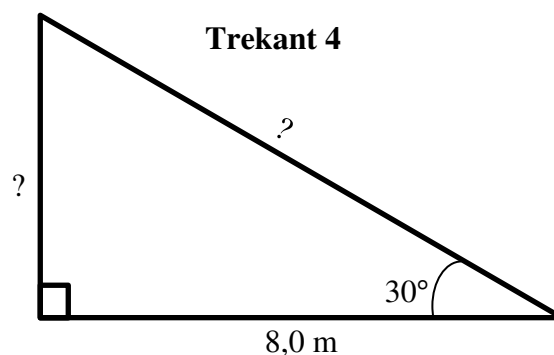
Trekant 2



Trekant 3

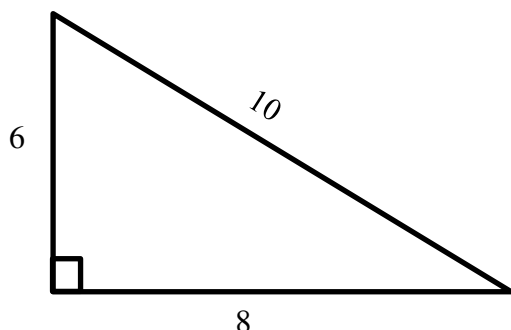


Trekant 4



Eksempler og forklaringer, ukjente sider i rettvinklede trekanter.

Utgangspunkt



I flere tusen år har vi hatt kunnskap om at det er en sammenheng mellom de korte sidene i en rettvinklet trekant og den lange siden.

La oss først sammenligne lengdene til sidene:

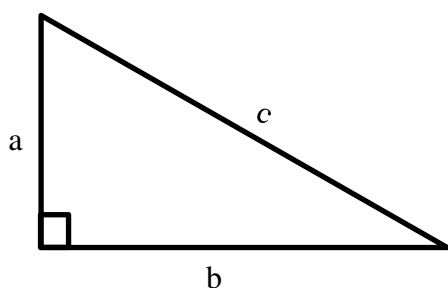
$6 + 8 = 14$. Dette er ikke det samme som den lange siden (som er 10). Så det er ingen sammenheng mellom lengdene i en rettvinklet

La oss deretter sammenligne kvadrattallet til sidene:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$10^2 = 100.$$

Her ser vi at svarene blir like, og det er ikke en tilfeldighet. Det viser seg at kvadrattallet til de to korte sidene lagt sammen blir like mye som kvadrattallet til den lange siden. Matematisk skriver vi denne sammenhengen slik:



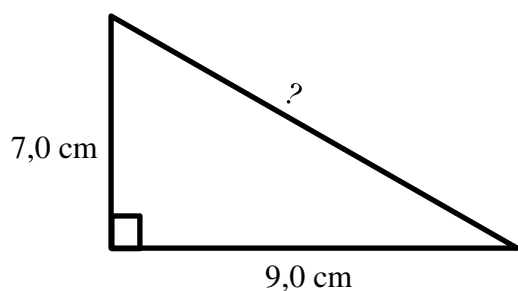
$$a^2 + b^2 = c^2$$

eller

$$c^2 = a^2 + b^2$$

I skolematematikken kaller vi ofte de korte sidene for katet (k) og den lange siden hypotenus (h). Vi bruker denne kunnskapen til å beregne ukjente sider i rettvinklede trekanter.

Å finne den lange siden (hypotenus)



Vi kan finne kvadrattallet til den lange siden ved å legge sammen kvadrattallene til de to korte sidene:

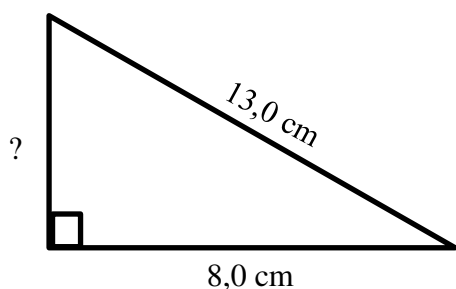
$$7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$$

Nå vet vi at kvadrattallet til den lange siden blir 130. For å finne lengden til den lange siden må vi bruke kvadratroten:

$$\sqrt{130} = 11,4$$

Det betyr at lengden på den lange siden er 11,4 cm.

Å finne en av de korte sidene (katet)



Vi kan finne kvadrattallet til den korte siden ved å regne kvadrattallet til de to kjente sidene, og deretter trekke det minste fra det største:

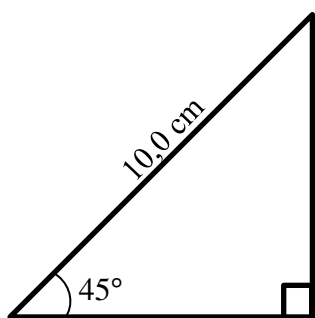
$$13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$$

Nå vet vi at kvadrattallet til den andre korte siden blir 105. For å finne lengden til den ukjente siden må vi bruke kvadratroten:

$$\sqrt{105} = 10,2$$

Det betyr at lengden på den korte siden er 10,2 cm.

90° - 45° - 45° - trekant



I en rettvinklet trekant hvor de to andre vinklene er 45° vil katetene være like lange. Det vil si at kvadrattallet til hvert av katetene er halvparten av kvadrattallet til hypotenusen.

$$10^2 : 2 = 100 : 2 = 50$$

Nå vet vi at kvadrattallet til begge katetene er 50. For å finne lengden til hver av katetene må vi bruke kvadratroten:

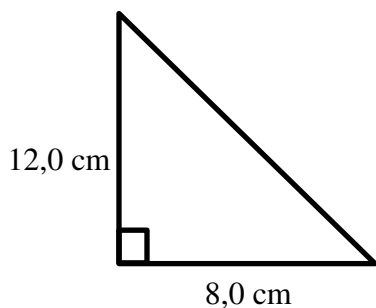
$$\sqrt{50} = 7,1$$

Det betyr at lengden på katetene er 7,1 cm.

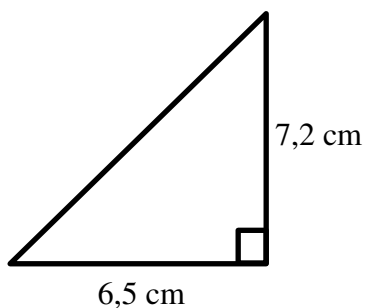
Oppgave 1

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

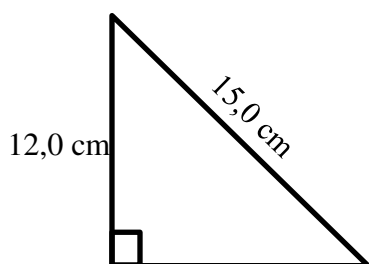
I en rettvinklet trekant er lengdene på de to katetene 14,7 cm og 19,2 cm.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hypotenusen.

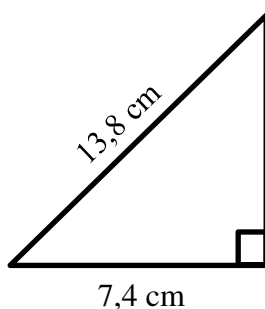
Oppgave 2

Finn den ukjente siden i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

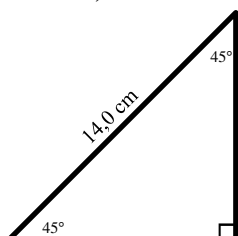
I en rettvinklet trekant er lengdene på hypotenusen 3,8 m og det ene katetet 1,7 m.

Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på det andre katetet.

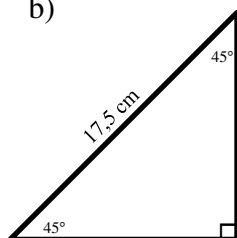
Oppgave 3

Finn de ukjente sidene i trekantene nedenfor.

a)



b)



c)

I en rettvinklet trekant hvor vinkelen mellom hypotenusen og hver av katetene er 45° er lengden på hypotenusen 8 m.

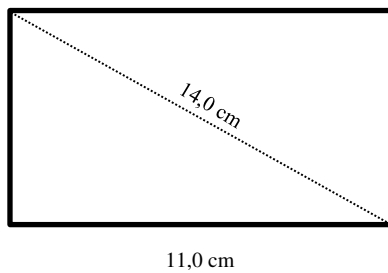
Lag en hjelpetegning av figuren og regn ut lengden på hver av katetene.

Praktisk bruk av Pytagoras' setning i andre figurer.

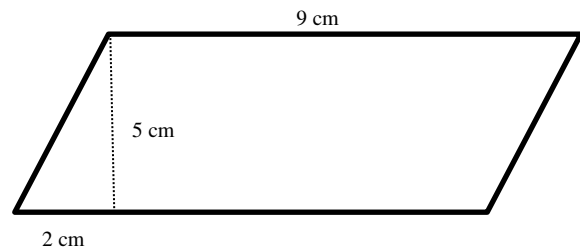
Oppgave 4

Regn areal og omkrets av figurene nedenfor (se kapittel 5 for formler om det er noe du har glemt).

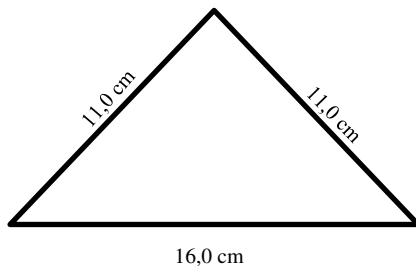
a)



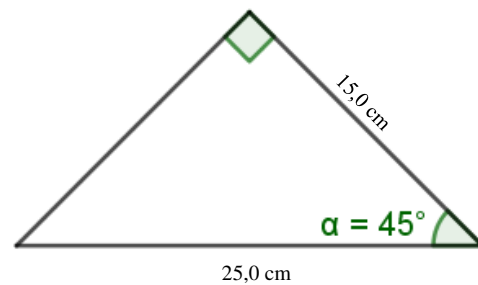
b)



c)



d)



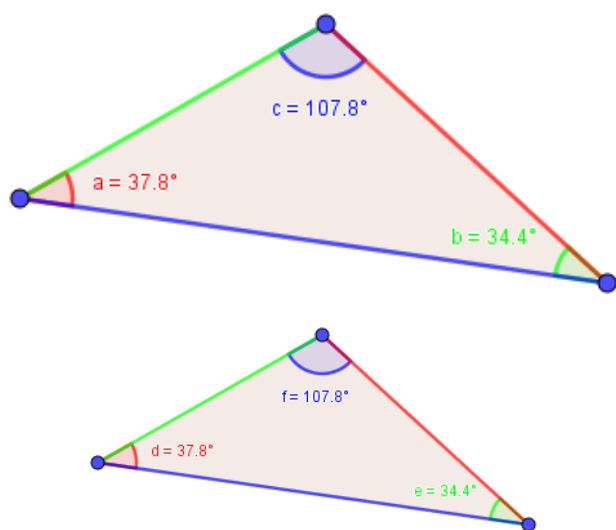
e)

Finn arealet av bordplaten. Tips: tegn bordet sett ovenfra og sett på mål.



Eksempler og forklaringer, formlike trekanter.

Hva er formlike trekanter?



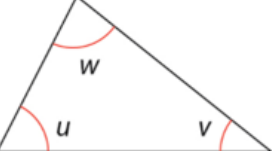
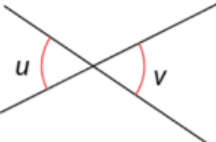
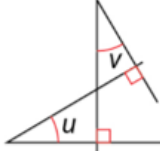
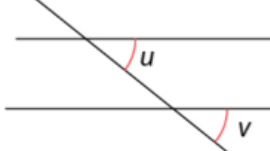
Dersom vinklene i to trekanter er identiske er trekantene formlike. Vi sier at vinklene er parvis like store. Du kan tenke på det som om den ene trekanten er en mindre eller en større kopi av den andre.

De to trekantene til venstre er formlike hverandre. De like vinklene er markert med farger. De kalles samsvarende vinkler. Når du skal markere samsvarende vinkler kan du bruke streker.

Sider som ligger på samme plass i de to trekantene kalles samsvarende sider. De samsvarende sidene er markert med farger. Når du skal markere samsvarende sider kan du bruke streker.

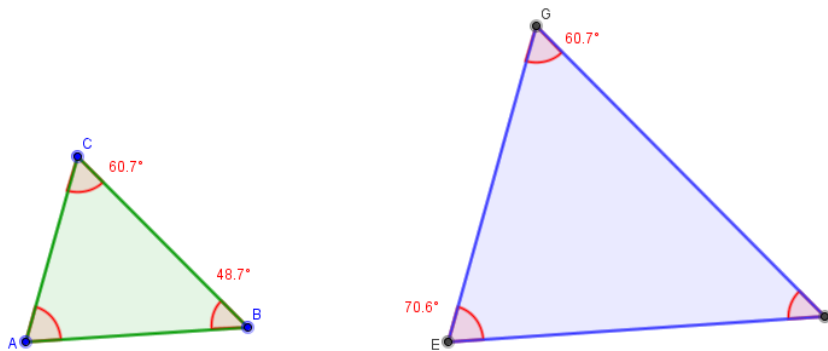
Hvordan avgjøre om to trekanter er formlike hverandre?

I rammen nedenfor finner du fire matematiske sannheter du skal støtte deg på når du skal avgjøre om to trekanter er formlike hverandre. Alle begrunnelser tar utgangspunkt i at vinkelsummen i en trekant er 180° , og at dersom du vet størrelsen på to av vinklene kan du regne ut den siste.

 $u + v + w = 180^\circ$	 $u = v$	 $u = v$	 $u = v$
Vinkelsummen i en trekant er 180°	Toppvinkler er like	Dersom vinkelbeina står parvis vinkelrett på hverandre, er vinklene like	Samsvarende vinkler med parallelle linjer er like

I oppgaver er ofte trekantene tegnet på en slik måte at det er lett å bli forvirret. De kan være tegnet speilvendt, rotet, liggende oppå hverandre eller på andre måter som skaper vansker. Det er derfor helt nødvendig å tegne dem ved siden av hverandre med samsvarende vinkler og samsvarende sider på samme plass.

Forklar at $\triangle ABC$ er formlik $\triangle EFG$



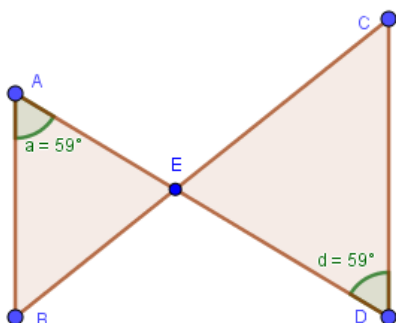
$$\angle A = 180^\circ - 48,7^\circ - 60,7^\circ = 70,6^\circ = \angle E$$

$$\angle F = 180^\circ - 70,6^\circ - 60,7^\circ = 48,7^\circ = \angle B$$

$$\angle C = 60,7^\circ = \angle G$$

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler. Derfor er $\triangle ABC$ formlik $\triangle EFG$.

Forklar at $\triangle ABE$ er formlik $\triangle CDE$



$$\angle A = \angle D$$

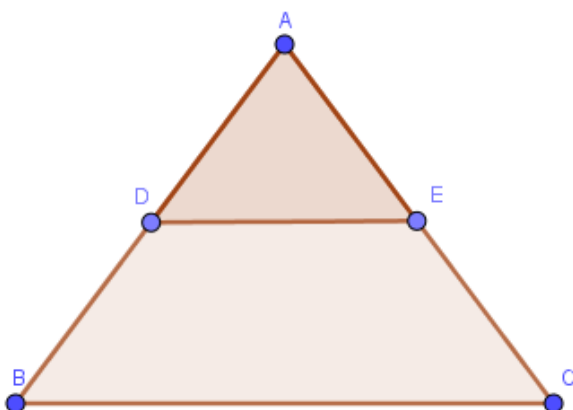
$\angle CED$ og $\angle AEB$ er toppvinkler, og dermed like

Da må $\angle B = \angle C$

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler.

Derfor er $\triangle ABE$ formlik $\triangle CDE$.

Linjestykkene BC og DE er parallelle. Forklar at $\triangle ABC$ er formlik $\triangle ADE$



$\angle A$ er lik i begge trekanter.

$\angle D$ og $\angle B$ samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

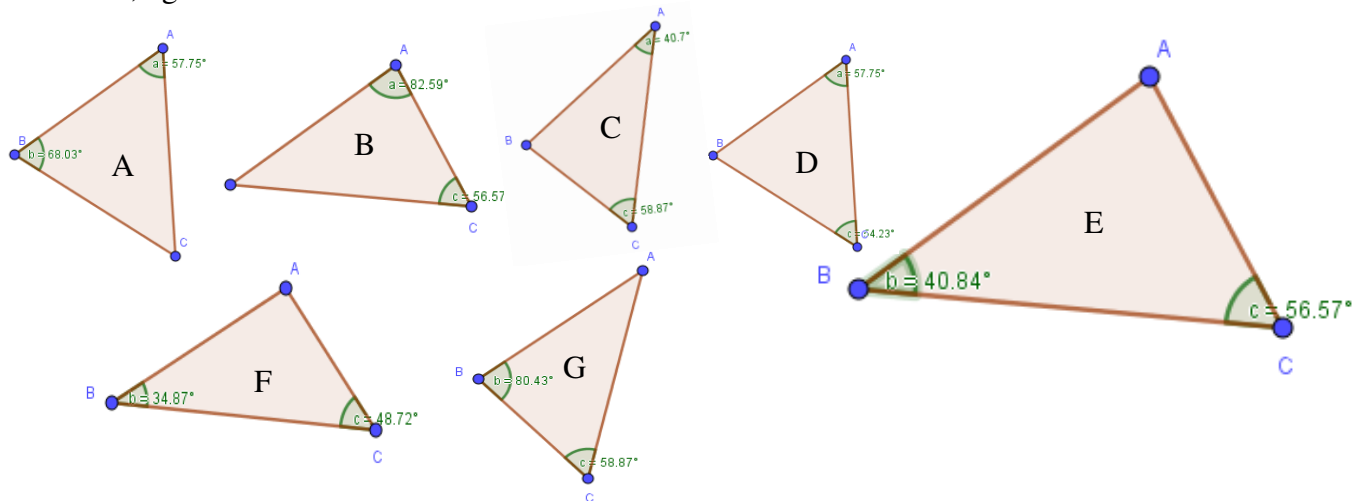
$\angle E$ og $\angle C$ samsvarende vinkler med parallelle linjer. De er derfor like store.

Har nå vist at trekantene har parvis like store vinkler.

Derfor er $\triangle ABC$ formlik $\triangle ADE$.

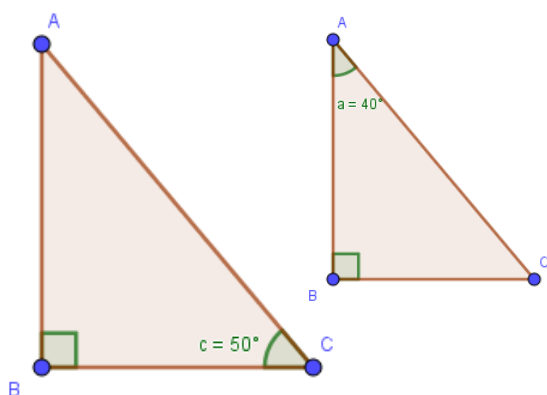
Oppgave 5

Nedenfor ser du trekantene A – G. Det er 3 par av formlike trekantar. Hvilke av trekantene er formlike? Tegn de formlike trekantene ved siden av hverandre, skriv på størrelsen på vinklene, og marker samsvarende sider.

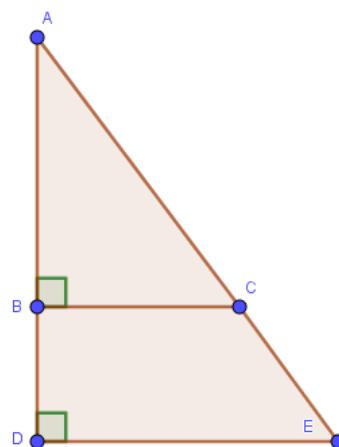


Oppgave 6

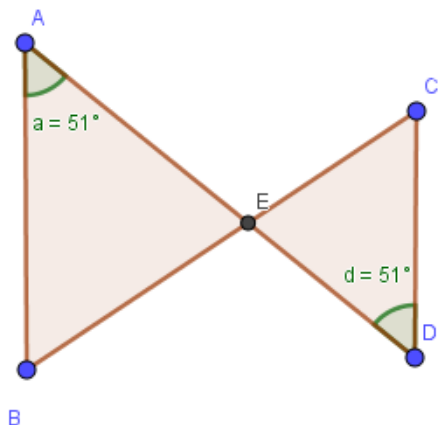
a) Forklar hvorfor trekantene er formlike.



b) Forklar at $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



c) Forklar at $\triangle ABE \sim \triangle CDE$



Tegn trekantene ved siden av hverandre og marker samsvarende sider.

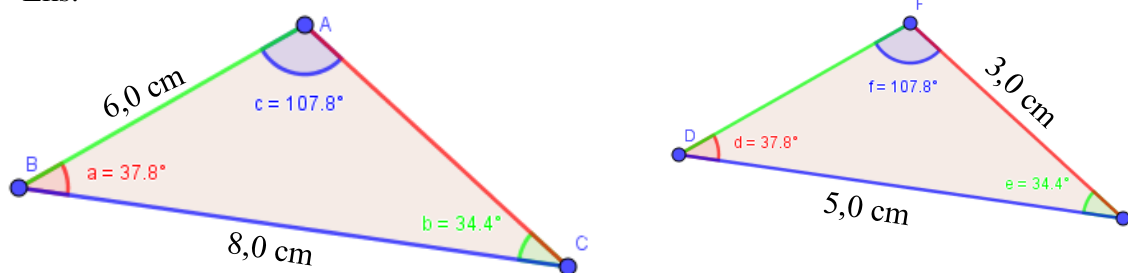
Hvordan bruke formlike trekanter til å finne ukjente lengder?

Dersom to trekanter er formlike vil forholdet mellom de samsvarende sidene være likt, og forholdet vil være proporsjonale størrelser.

Dersom vi vet forholdstallet mellom trekantene kan vi bruke forholdstallet til å regne ut de ukjente sidene, enten ved å multiplisere eller dividere med forholdstallet.

Vi kan også sette opp en forholdsligning, eller tegne en lineær graf.

Eks:



Finn lengden AC og lengden DF

Ved bruk av forholdstall

Vi finner først forholdstallet ved å dividere de kjente samsvarende sidene. Deretter må vi avgjøre om vi skal multiplisere eller dividere med forholdstallet for å finne de ukjente sidene.

Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
$\triangle ABC$	BC = 8 cm	AC = 3,0 cm $\cdot$ 1,6 = 4,8 cm	AB = 6,0 cm
$\triangle DEF$	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = 6,0 cm $:$ 1,6 = 3,8 cm
Forholdstall	$\frac{8}{5} = 1,6$	Multipliserer med 1,6 fordi AC er lengre enn EF	Dividerer med 1,6 fordi DF er kortere enn AB

Ved bruk av forholdsligning

Vi sammenligner alltid med de kjente samsvarende sidene. De ukjente sidene løses som x.

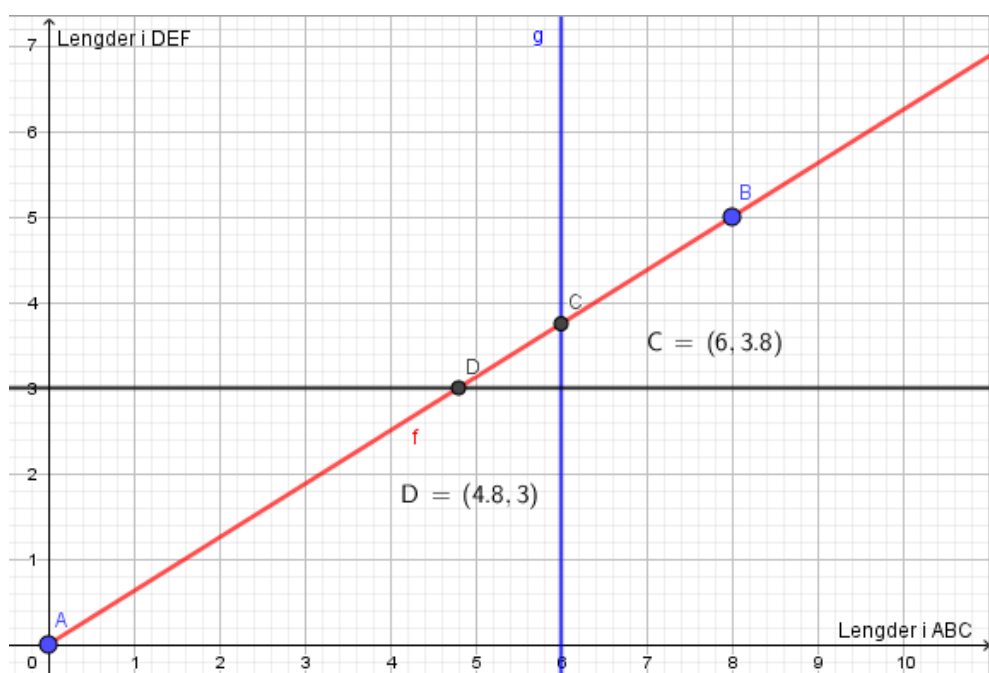
Eksempel	Samsvarende sider	Samsvarende sider	Samsvarende sider
$\triangle ABC$	BC = 8 cm	AC = x cm	AB = 6,0 cm
$\triangle DEF$	DE = 5 cm	EF = 3,0 cm	DF = x cm

$$AC: \frac{8}{5} = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{5} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 3}{5} = 4,8 \rightarrow AC = 4,8 \text{ cm}$$

$$DF: \frac{8}{5} = \frac{6}{x} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{5}{8} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{8} = 3,75 \rightarrow DF = 3,8 \text{ cm}$$

Ved bruk av lineær funksjon

Lengden av de samsvarende sidene er proporsjonale størrelser. Det vil si at grafen begynner i origo. I tillegg går grafen gjennom punktet (8,5), som er de kjente samsvarende sidene.



Punkt C gir DF = 3,8 cm

Punkt D gir AC = 4,8 cm

Fremgangsmåte:

Skrev inn punktene (0,0) og (8,5), og brukte «Stråle gjennom to punkt».

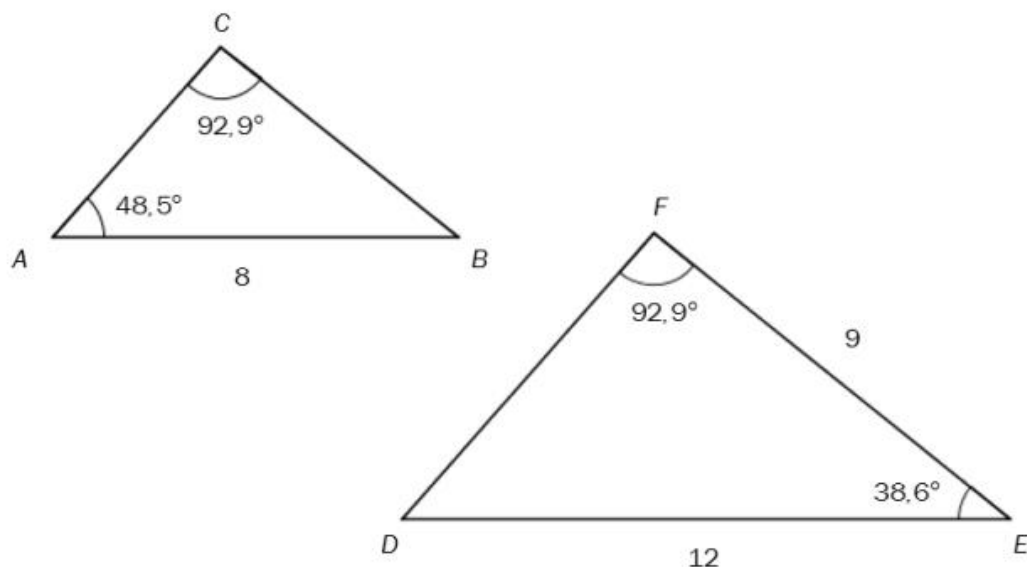
Skrev inn x = 6, brukte «Skjæring mellom to objekt», fikk punkt C.

Skrev inn y = 3, brukte «Skjæring mellom to objekt», fikk punkt D.

Endret avrunding til 1 desimal.

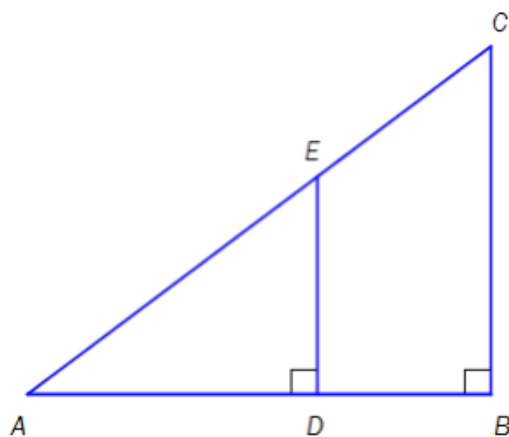
De påfølgende oppgaver er tidligere eksamensoppgaver. I slike oppgaver må du være forberedt på at du må bruke både formlikhet og Pytagoras' setning. Tegnene I og II angir om oppgaven ble gitt på del 1 (I) eller del 2 (II)

Oppgave 6 - I



- Forklar at de to trekantene ovenfor er formlike.
- Bestem lengden av siden BC ved regning.

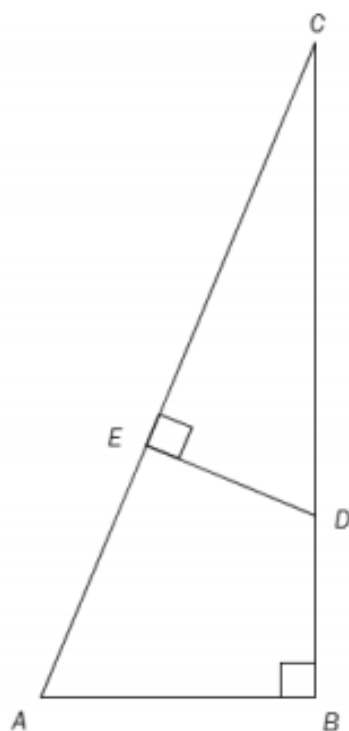
Oppgave 7 - II



$\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er gitt som vist på skissen ovenfor. $AD = 5,0$ m, $BD = 3,0$ m og $BC = 6,0$ m.

- Bestem lengden AC ved regning.
- Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er formlike og bestem lengden DE ved regning.
- Bestem arealet av $\square DBCE$ ved regning.

Oppgave 8 - II

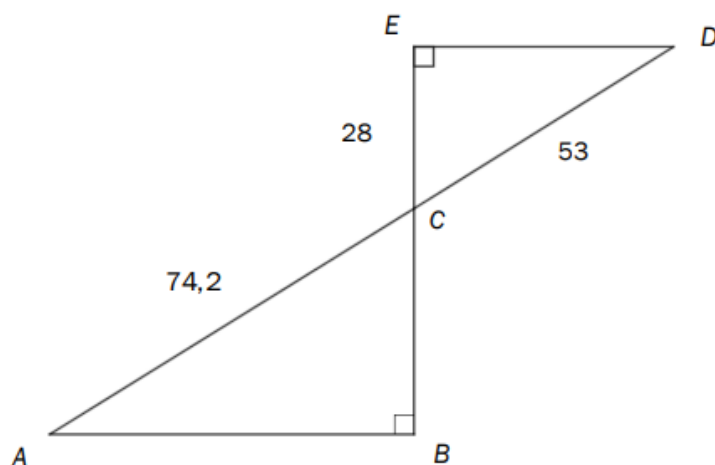


Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle CED$. Se figuren ovenfor.

$BC = 36$, $AC = 39$ og $CD = 26$.

- a) Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike.
- b) Bestem lengden av CE .
- c) Vis at forholdet mellom arealet av $\triangle ABC$ og arealet av $\triangle CED$ er $\frac{9}{4}$.

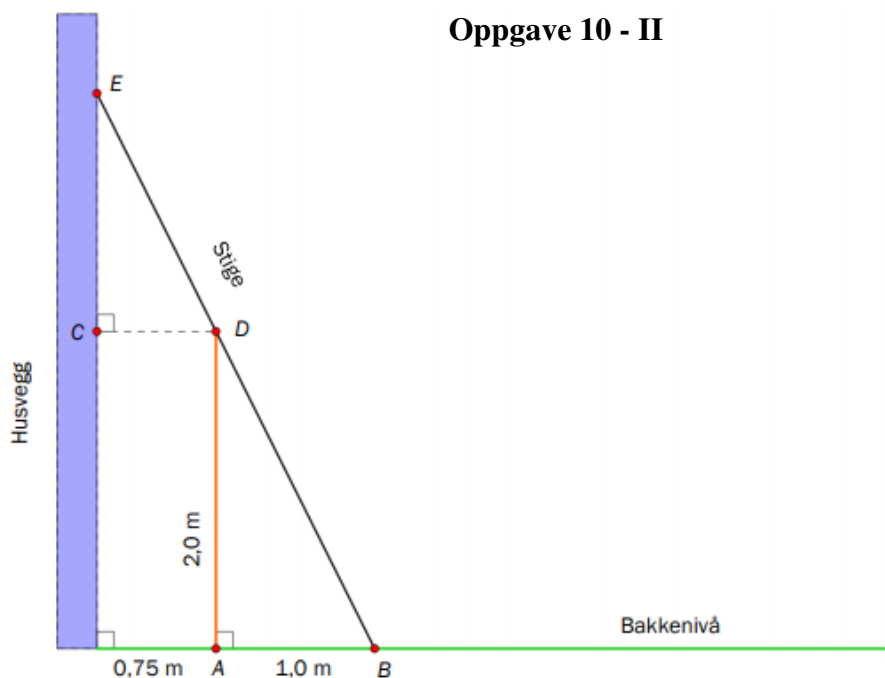
Oppgave 9 - II



Gitt figuren ovenfor. C er skjæringspunktet mellom AD og BE .
 $AC = 74,2$, $CD = 53$, $CE = 28$ og $\angle ABC = \angle DEC = 90^\circ$

- Forklar at $\triangle ABC$ og $\triangle CDE$ er formlike.
- Bestem lengden av BC og lengden av AB .
- Bestem forholdet mellom arealet av $\triangle ABC$ og arealet av $\triangle CDE$.

Oppgave 10 - II

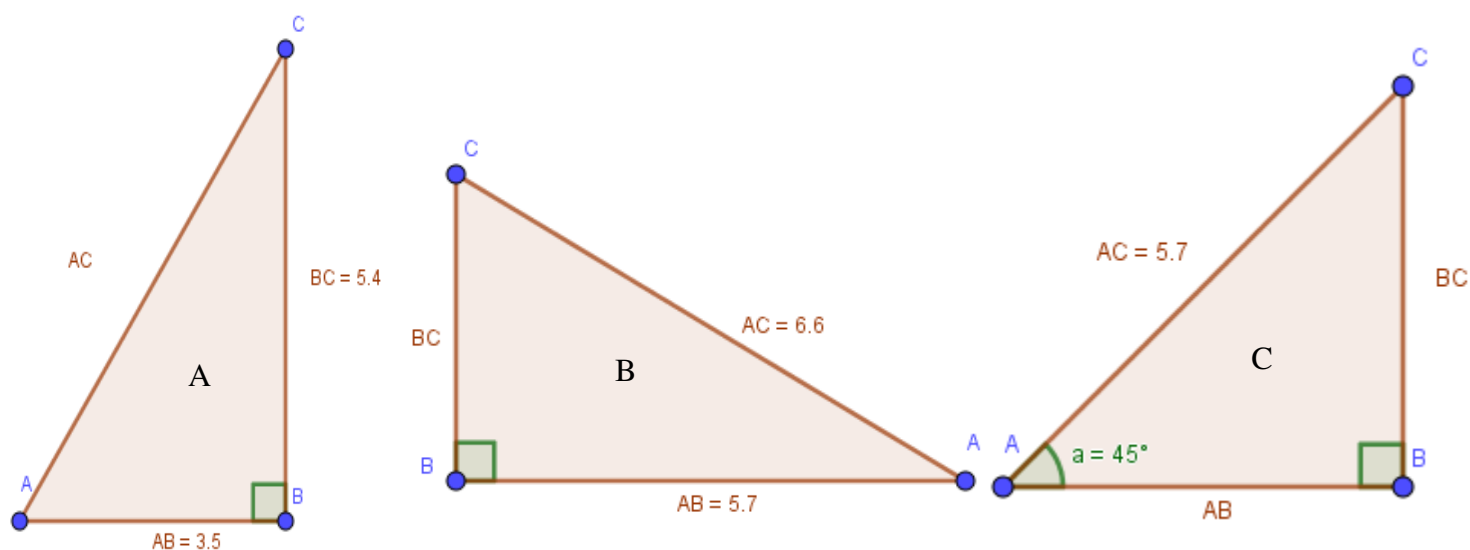


En stige står på skrå mot en husvegg. Stigen berører et gjerde. Gjerdet er 2,0 m høyt og står 0,75 m fra husveggen. Stigen er plassert 1,0 m fra gjerdet. Se figuren ovenfor.

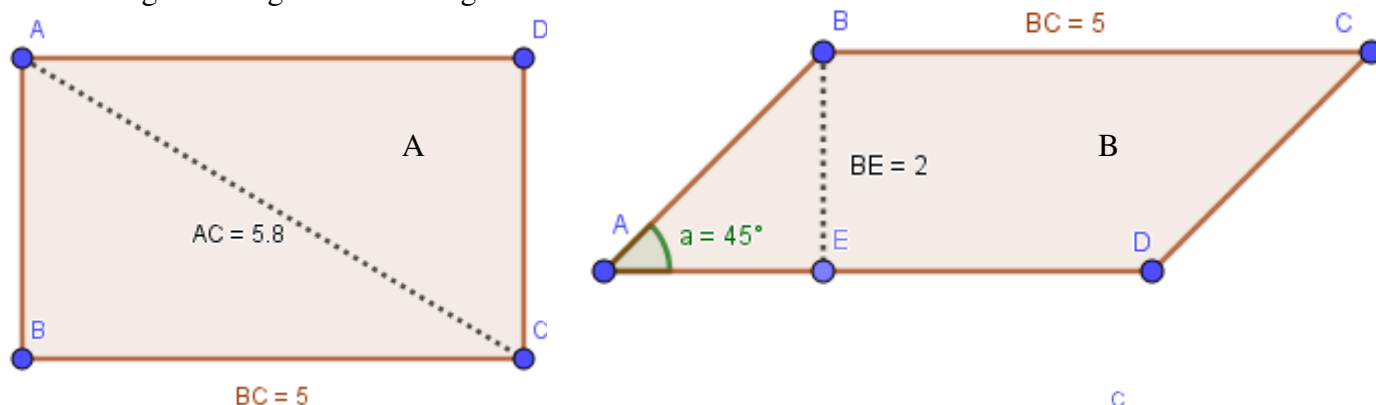
- Forklar at $\triangle ABD$ og $\triangle CDE$ er formlike.
- Hvor lang er stigen?

Forberedelse til prøven

F1 Regn areal og omkrets av trekantene nedenfor. Tallene er i cm.



F2 Regn areal og omkrets av figurene nedenfor. Tallene er i cm.



F3

Tegn trekantene ABC og CDE ved siden av hverandre og marker samsvarende sider.

Forklar hvorfor de er formlike hverandre.

Finn BC og DE ved regning. Tallene er i cm.

