

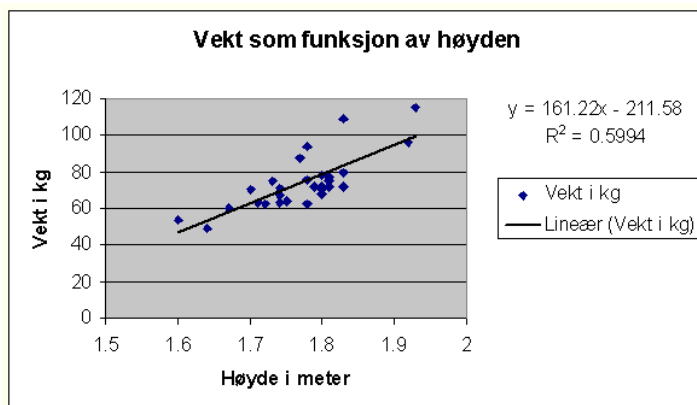
Kapittel 2. Matematiske modeller



En matematisk modell er en funksjon som mer eller mindre bra beskriver en praktisk situasjon.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hvordan lage en matematisk modell ved hjelp av gitte opplysninger.
- Hvordan finne en matematisk modell ut fra en tabell med observerte sammenhenger mellom to størrelser (regresjon).
- Hvordan finne mønster i et tallmateriale.



Mål for kapittel 2. Matematiske modeller



Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre målinger i praktiske forsøk og formulere matematiske modeller på grunnlag av observerte data
- analysere praktiske problemstillinger knytte til dagligliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller
- utforske matematiske modeller, sammenligne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon, og vurdere hvilken informasjon modellene kan gi, og hvilket gyldighetsområde og begrensninger de har
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva vi mener med en matematisk modell
- hvordan jeg legger inn data fra en tabell i et regneark i GeoGebra
- hvordan jeg utfører regresjonsanalyse i GeoGebra for å finne en matematisk modell

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan jeg kan hente ut informasjon fra en matematisk modell
- hvordan jeg finner mønster i tall og figurer

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- velge hvilken modell som passer best til en praktisk situasjon
- forklare hvilken informasjon en matematisk modell kan gi
- argumentere for en modell sitt gyldighetsområde og hvilke begrensninger den har

Utforskende oppgave – Strikkhopp med Barbie og Ken

Kilder (hentet 07.06.2017):

<http://www.caspar.no/tangenten/2005/inspirasjonshefte2005.pdf> s. 122-128 og

<http://www.ntnu.no/documents/2004699/2c5c784d-cbe2-452d-8d37-5934c34bbb40>

I denne oppgaven skal du la Barbie eller Ken hoppe i strikk og bestemme en sammenheng mellom antall strikk og fallhøyden. Sammenhengen skal du bruke til å gjøre en praktisk beregning.

Problemstilling 1: Bestem sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Utstyr:

- En Barbie- eller Ken dukke
- Strikk
- Målebånd
- Papir og blyant
- GeoGebra

Oppgave:

1. Bind strikk rundt bena på Barbie
2. Slipp dukka fra en gitt høyde og mål fallhøyden (la Barbie falle med hodet først)
3. Lag en tabell som viser sammenhengen mellom antall strikk og fallhøyden

Antall strikk												
Fallhøyde (cm)												

4. Finn et uttrykk for sammenhengen mellom fallhøyde og antall strikk ved hjelp av regresjon i GeoGebra

(Lim inn GeoGebra bildet her)

$$f(x) =$$

5. Forklar hva de ulike konstantene i funksjonen uttrykker:

Problemstilling 2: Bruk modellen du kom frem til og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke i strikkhoppet for akkurat å bare bli våt i håret

Utstyr:

Et kar med vann hvor vannflaten står _____ cm under Barbies hoppunkt.

Oppgave:

1. Bruk modellen og finn ut hvor mange strikk Barbie må bruke

(Lim inn GeoGebra bildet her)

Antall strikk:

2. La Barbie hoppe med dette antallet strikk og undersøk om din beregning stemmer.
Resultat:

Feilkilder:

Har dette forsøket noen feilkilder?

1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra “virkeligheten”. Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

Eksempel 1

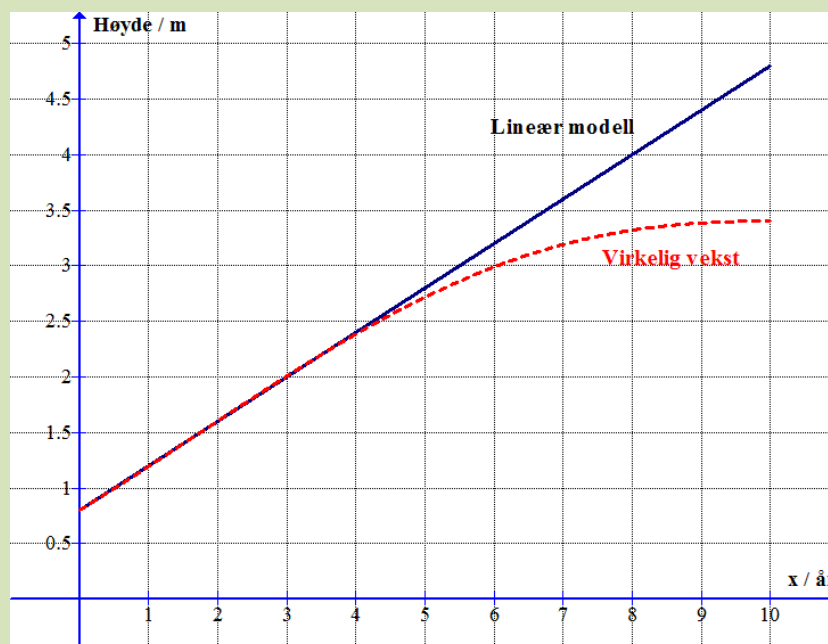
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for x , kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$ m.

Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er x mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik: $x \in [0,5]$.

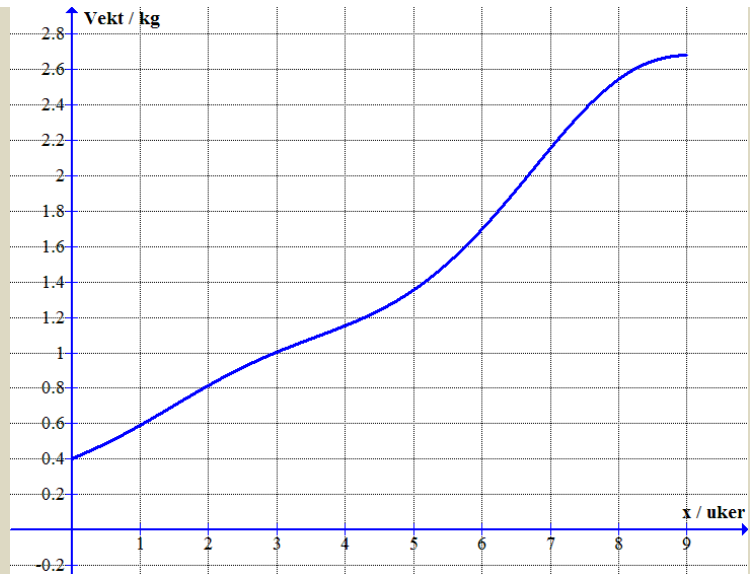


Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.

a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten $v(x)$ som passer bra for de fem første ukene.



Oppgave 2

Temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

a) Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?


b) Lag en lineær modell som beskriver temperaturen T i koppen etter x minutter.

c) Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?

d) Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?

e) Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når x øker.

f) Tegn grafen til modellen.

g)  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.

Eksempel 2

I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.

Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.

Temperaturforskjellen er $22 - (-8) = 30$ grader i starten.

Vekstfaktoren er $100 \% - 12 \% = 88 \% = 0,88$.

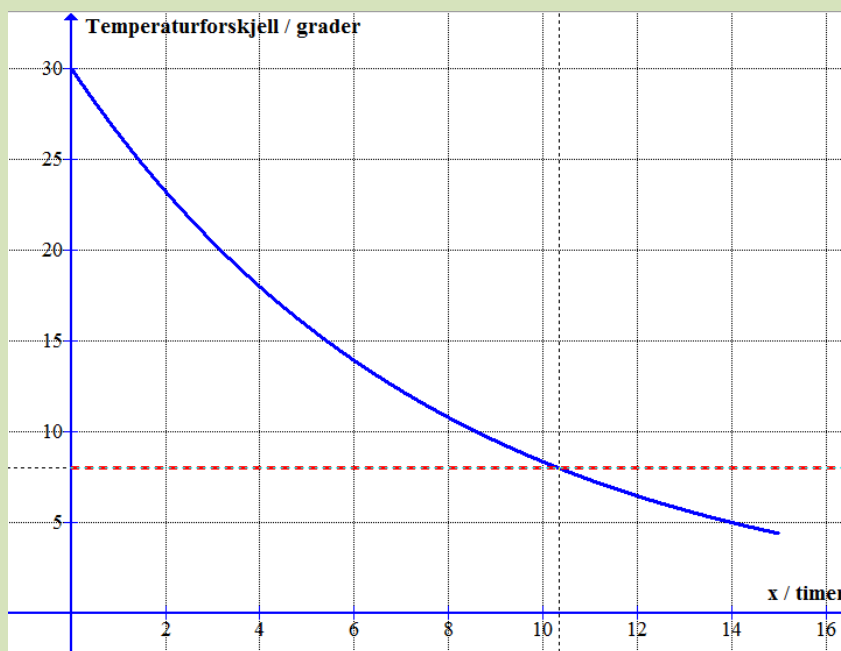
Vi kaller antall timer som har gått for x . Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0,88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.

Når er innetemperaturen null?

Vi tegner grafen til f med **Funksjon(30*0.88^x,0,15)**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen $y = 8$, viser at dette skjer etter 10,4 timer.

Oppgave 3

I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

- Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
- Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

Eksempel 3

En fabrikk lager hermetikkbokser. Hver uke har fabrikken 100 000 kr i *faste kostnader* (lønn, verditap på maskiner og annet). I tillegg koster det 0,60 kr per boks (metall, elektrisk energi og annet). Vi skal lage en modell for utgiftene per boks.

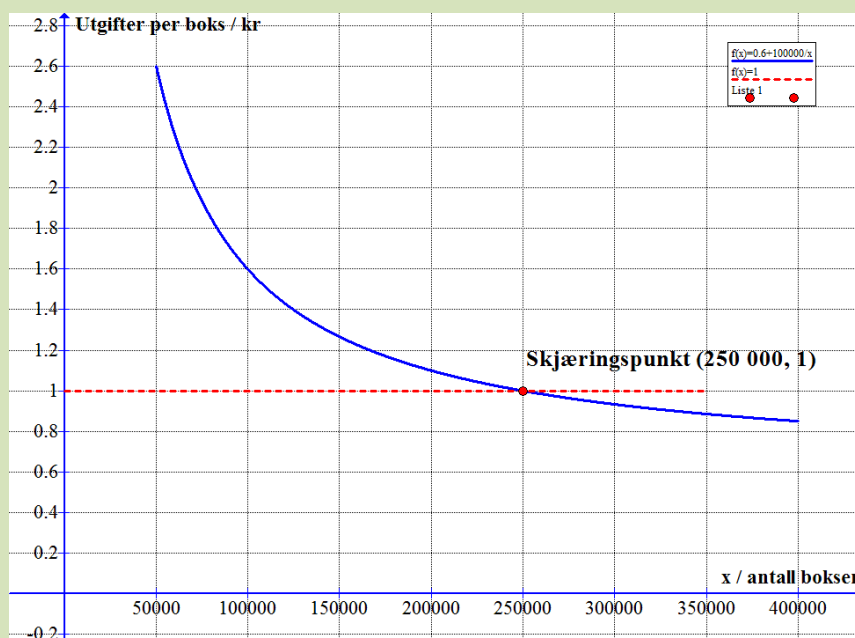
Vi kaller antall bokser som blir laget per uke for x og utgiftene per boks for U .

Utgiftene for x bokser blir $0,60x + 100000$.

$$\text{Utgiftene per boks: } U = \frac{0,60x + 100000}{x}.$$

Denne funksjonen må vi skrive slik i Geogebra: $(0.60x + 100000)/x$.

Hvor mange bokser må fabrikken minst lage for at utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr? Dette kan vi finne grafisk:



Vi ser at fabrikken må lage minst 250 000 bokser i uka hvis utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr.

Vi kan også løse en likning:

$$\frac{0,60x + 100000}{x} = 1$$

$$\frac{(0,60x + 100000)x}{x} = 1 \cdot x$$

$$0,60x + 100000 = x$$

$$100000 = x - 0,60x$$

$$100000 = 0,40x$$

$$x = \frac{100000}{0,40} = 250000$$

Oppgave 4

Ola er medlem av en klubb hvor han må betale 200 kr i året for å være medlem. Da kan han få kjøpe sokker til 30 kr per par. Vanlig pris på sokkene er 50 kr.

a) Lag en modell som viser hva han må betale per par når han tar med kontingenten i utgiftene.

b) Hvor mange par sokker må han minst kjøpe per år for at det skal lønne seg å være medlem?



Eksempel 4

En bonde har 200 m gjerde som han skal bruke til å sperre av et rektangulært beiteområde for noen kuer. Vi skal lage en matematisk modell for arealet $A(x)$ av beiteområdet hvis den ene siden i rektangelet er x meter.

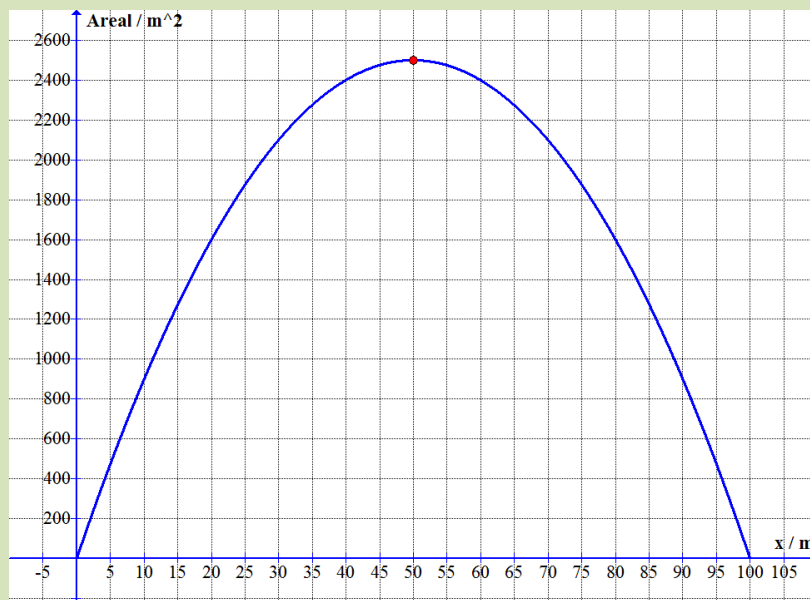
Hvis vi kaller den andre siden i rektangelet for y , må $x + y$ være lik halve omkretsen av rektangelet, nemlig 100 m. Da må vi ha at $y = 100 - x$. Arealet blir

$$A(x) = x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Modellen er altså et andregradspolynom.

Hvis bonden velger $x = 60$ m, blir arealet $100 \cdot 60 - 60^2 = 2400 \text{ m}^2$.

For å finne hvilken verdi av x som gir *størst areal*, tegner vi grafen til andregradsfunksjonen ovenfor:



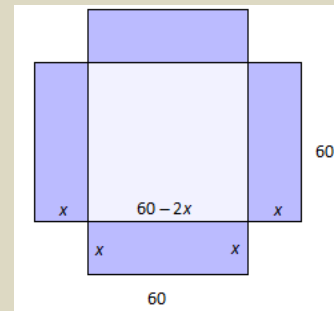
Vi ser at arealet blir størst når $x = 50$ m. Da er området et kvadrat.

Oppgave 5



Du skal lage en eske av en papp-plate med sidekant 60 cm ved å skjære bort et kvadrat i hvert hjørne og deretter brette opp de fargede sideflatene i figuren.

- Forklar at sidene i bunnen av esken blir $60 - 2x$.
- Lag en modell $V(x)$ for volumet av esken. Som du kanskje husker fra 1P er volumet lik arealet av grunnflaten multiplisert med høyden av esken.
- Hva er den største verdien x kan ha? Tegn grafen til $V(x)$. Hvilken verdi av x gir størst volum? Hvor stort er dette volumet?



3. Regresjon (kurvetilpasning)

3.1 Lineær regresjon

Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under **Innstillinger, Avrunding**. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

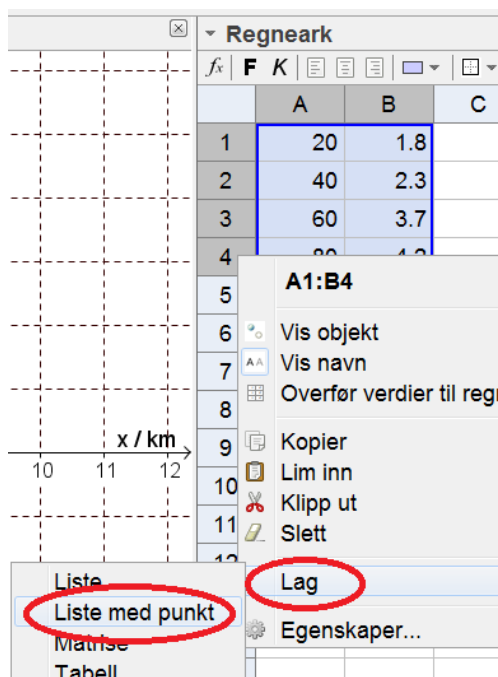
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder x / år	20	40	60	80
TV-tid y / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

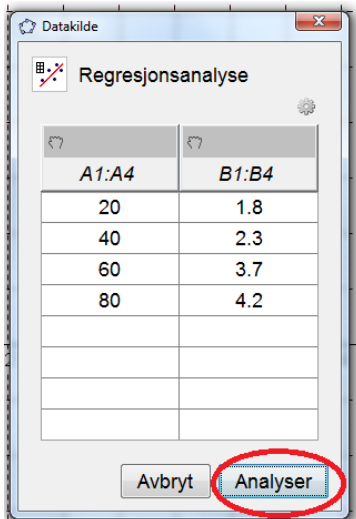
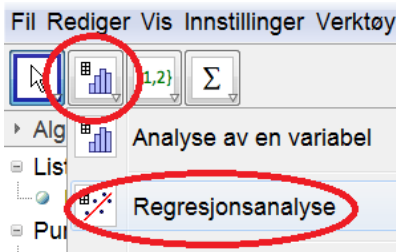
Vi åpner regnearket i Geogebra:



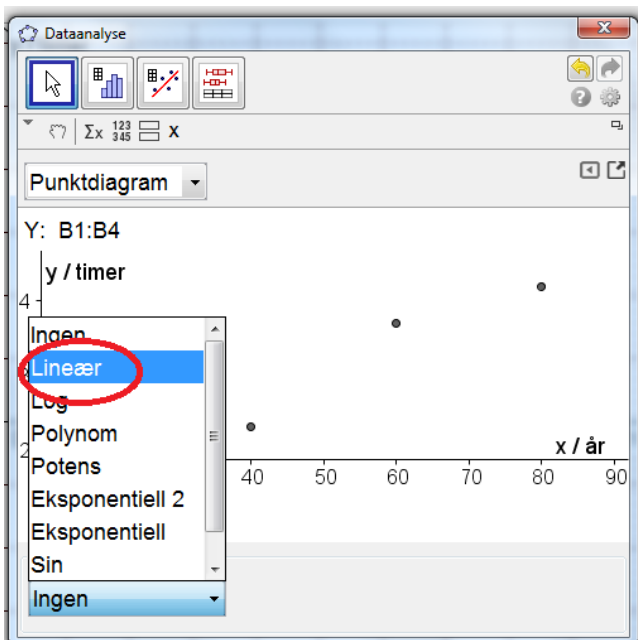
Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

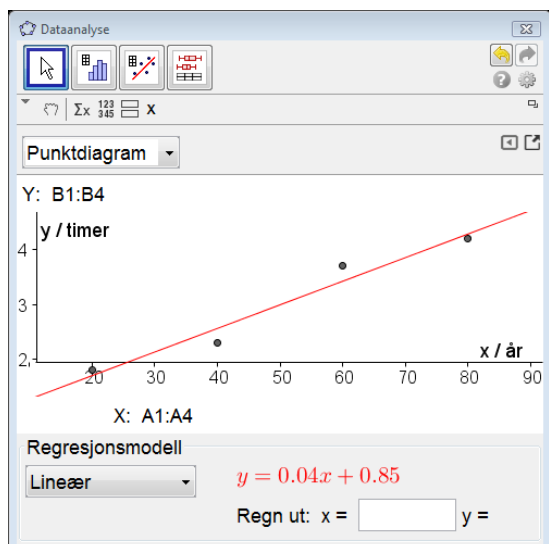


Så velger vi regresjonsanalyse:



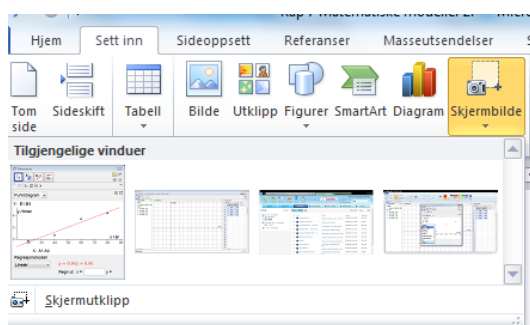
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er $y = 0,04x + 0,85$.

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.

Ut fra dette kan vi si at $f(x) = 0,04x + 0,85$ er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$ timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for x hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ($x = 0$) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

Oppgave 6

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 ($x = 0$) til 2000 ($x = 50$).

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

- Finns ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
- Hva var folketallet i 2010 ($x = 60$) i følge denne modellen?
- Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
- Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

3.2 Polynomregresjon

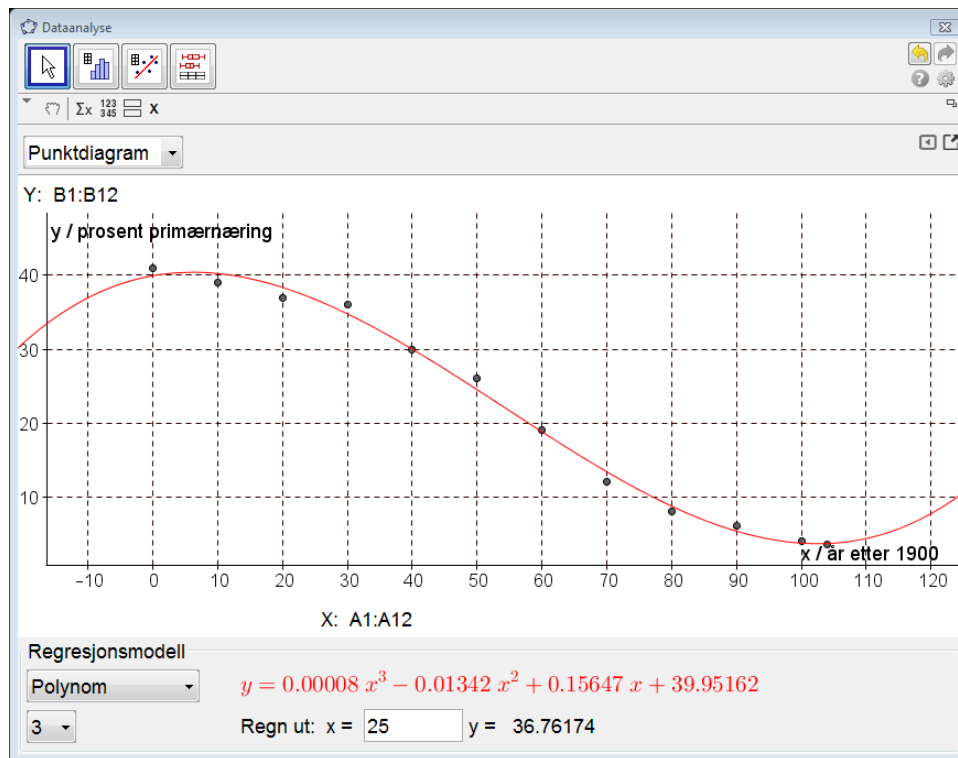
År	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2004
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
$y/\%$	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la x være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3,5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$. (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor x ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut $f(25)$ ved å skrive $x = 25$ inn i Geogebra vinduet (se ovenfor). Da finner vi $f(25) = 37\%$.

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av x i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut $f(120)$. Geogebra gir da ca. 8%.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8% i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

Oppgave 7

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen $O(x)$ er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
O	0	20	35	50	100	150	175	160

- La x være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.
- Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?
- I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?
- Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet (time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene..

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

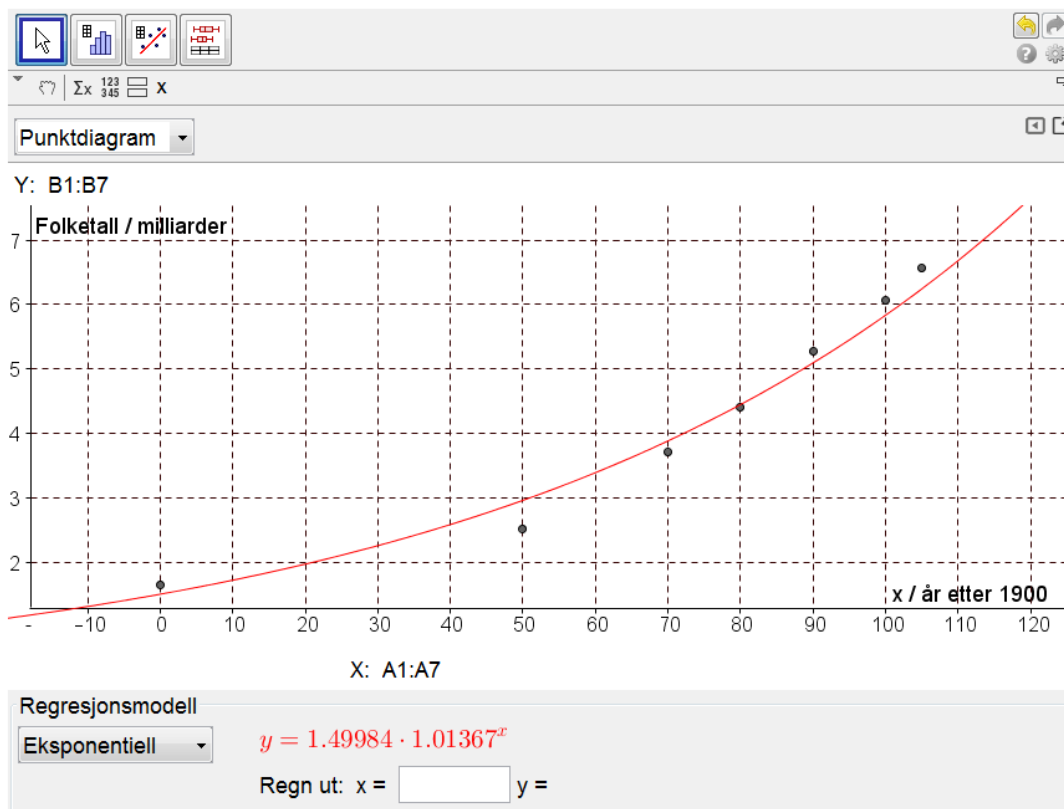
År	Folketall (milliarder)
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar x være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til $x = 0$, 1950 svarer til $x = 50$ osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

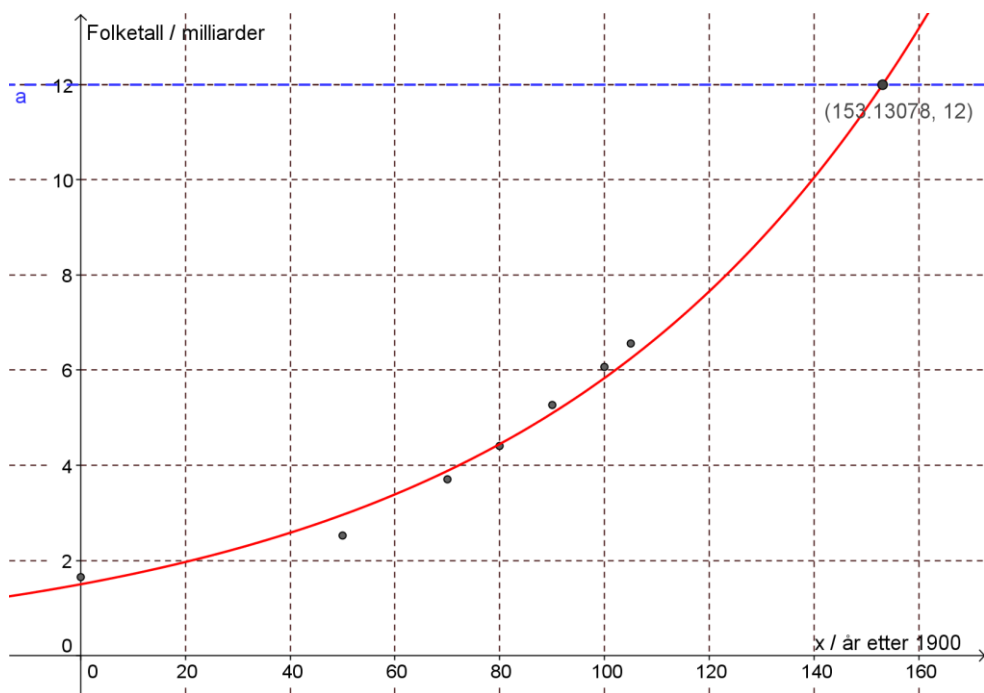
Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:



Funksjonen som passer best (passe avrundet) er $f(x) = 1,5 \cdot 1,014^x$.

Fra vekstfaktoren $1,014 = 101,4\%$ ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte $101,4\% - 100\% = 1,4\%$ i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja $y = 12$ og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:



Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

Oppgave 8

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

- Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der $x = 0$ svarer til 1975.
- Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
- Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
- En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

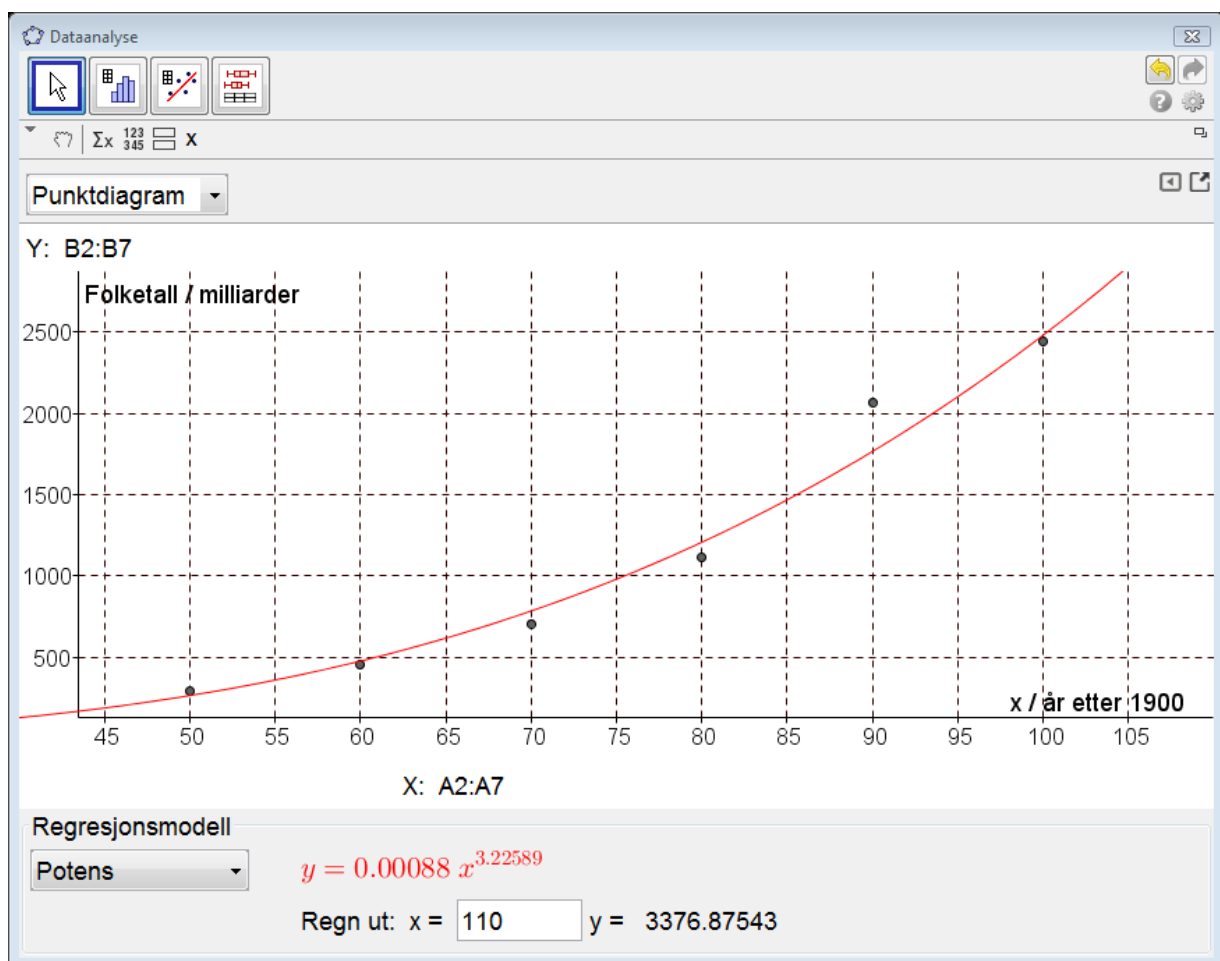
3.4. Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^b$. Eksponenten b kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
t / tusen	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar x bety antall år etter 1900 ($x = 50$ tilsvarer da 1950, $x = 60$ tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon*. Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er $t(x) = 0,00088x^{3,226}$ (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

Oppgave 9

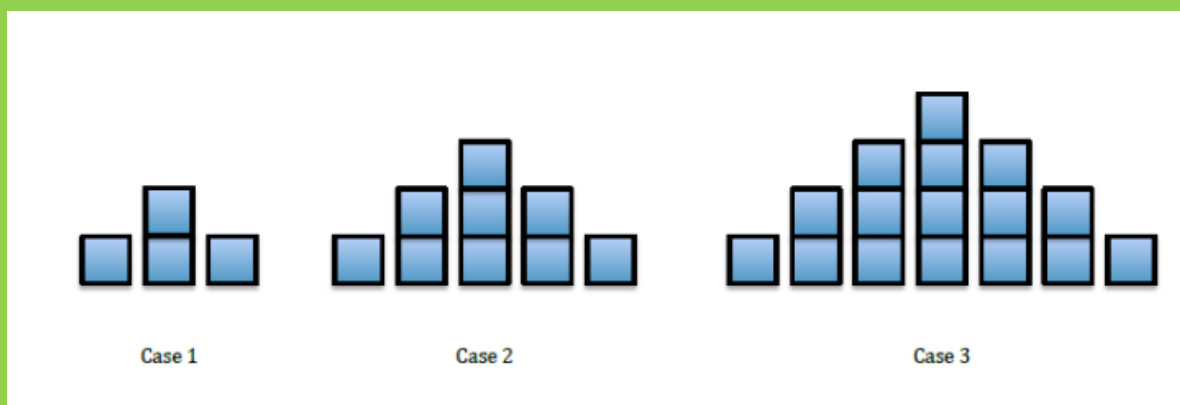
Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
x	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
y	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden x fra sola og omløpstiden y for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

- Finne den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.
- Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?
- Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

Utforskende oppgave – Mønster i figurer

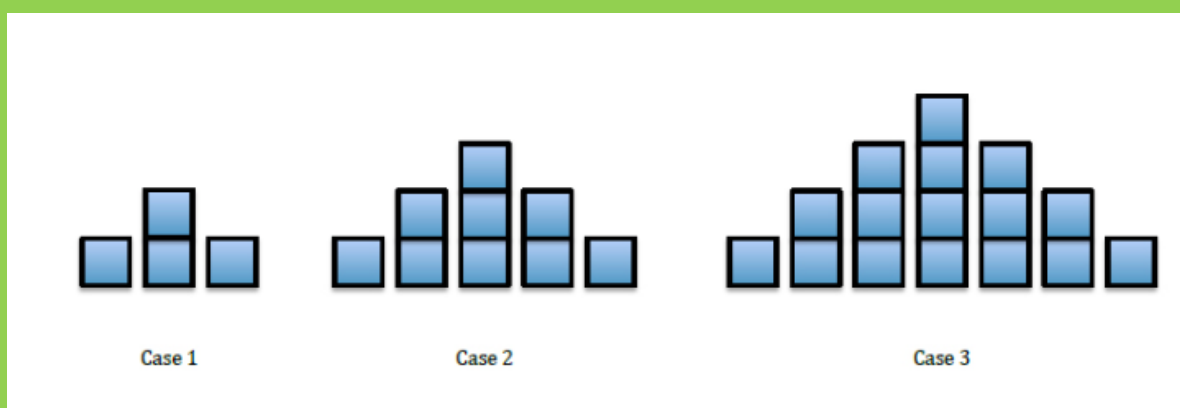
Kilde (hentet 08.06.2017): <https://www.youcubed.org/task/squares-upon-squares/>



I denne oppgaven skal du prøve å finne et mønster for hvordan klosser legges til fra en figur til den neste (se over).

Individuelt:

Se på figurene og marker hvordan du ser at klossene legges til fra en figur til den neste:



I gruppe:

Sammenlign det du ser med hva læringspartneren din ser. Er det bare en måte å se dette på?

Kommenter.

I plenum:

Hvor mange ulike måter har klassen kommet frem til?

Oppfølgingsspørsmål (IGP):

1. Hvordan ville figur 100 se ut? Hvor mange klosser ville den ha? Hvordan vet du det?

2. Hvordan ville figur 0 se ut? Hvordan vet du det?

3. Hvor mange klosser ville det være i figur n ? Hvordan vet du det?

4. Mønster i tall og figurer

Eksempel 5

Figuren viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.

Vi skal finne en formel (matematisk modell) for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage flere sammenhengende kvadrater.

Vi ser at for å lage to kvadrater trenger vi 7 fyrstikker.

For å legge på et nytt kvadrat, trenger vi 3 fyrstikker til, altså 10.

Vi kan si at antall fyrstikker er en funksjon av antall kvadrater. Variabler, slik som antall kvadrater, som bare kan være et *helt* tall, er det vanlig å kalle n istedenfor x . Det er også vanlig å skrive funksjonsuttrykket som f_n istedenfor $f(n)$.

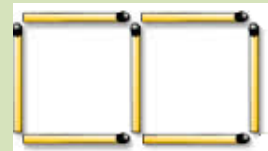
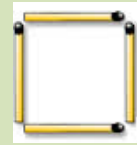
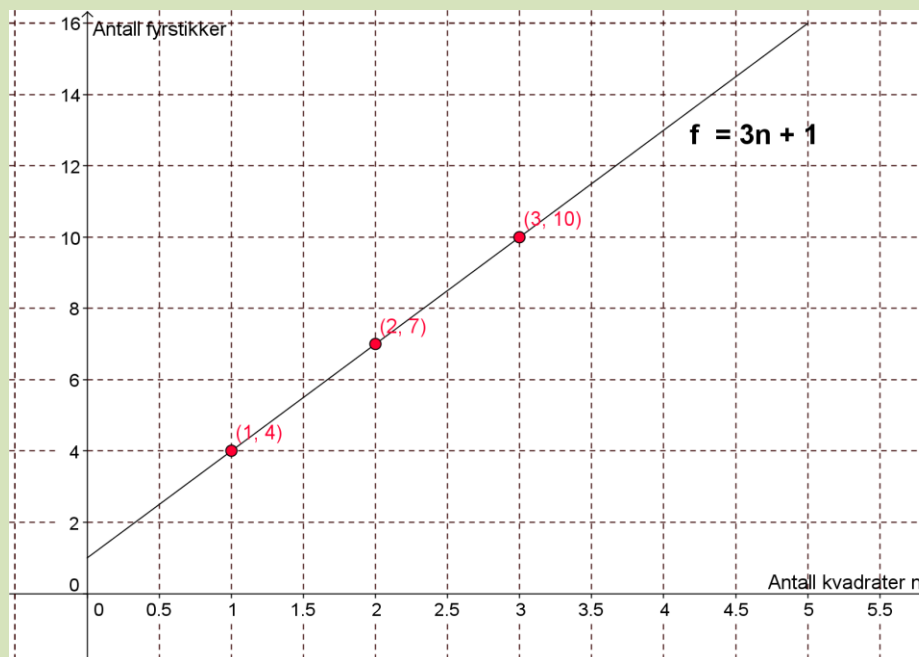
I dette eksemplet kan vi da skrive

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 7, \quad f_3 = 10.$$

For å finne en formel for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage n kvadrater, legger vi merke til at vi starter med 4 og legger til 3 for hvert nytt kvadrat vi legger til. Men hvis vi har n kvadrater, har vi lagt til $n - 1$ nye, hver med tre fyrstikker. Derfor har vi

$$f_n = 4 + 3(n - 1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

Formelen $3n + 1$ kan vi også finne bare ved å se på tallene 4, 7 og 10 og gruble litt, eller ved å legge inn punktene $(1, 4)$, $(2, 7)$ og $(3, 10)$ i Geogebra og foreta en *lineær* regresjon.



Oppgave 10

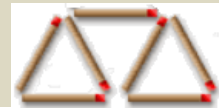
Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker f_4 trengs for å lage 4 slike trekanter?

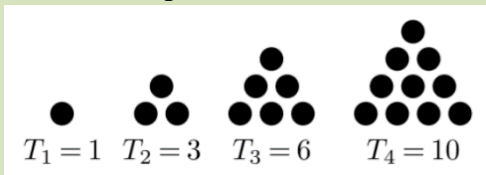
b) Finn en formel for f_n .

c) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?

d) 🤔 Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?



Eksempel 6

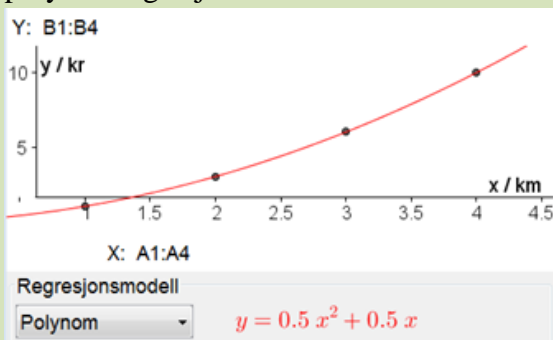


Figuren viser trekanter som er bygget opp av kuler. Antallet kuler utgjør de fire første *trekantallene*.

Vi ser at $T_2 = T_1 + 2$, $T_3 = T_2 + 3$, $T_4 = T_3 + 4$.

Da må vi ha $T_5 = 10 + 5 = 15$ og $T_6 = 15 + 6 = 21$.

Da antall kuler ikke øker like mye fra en trekant til den neste, kan en formel for T_n ikke være lineær. Vi legger punktene (1,1), (2,3), (3,6) og (4,10) inn i regnearket i Geogebra og prøver polynomregresjon. Da finner vi

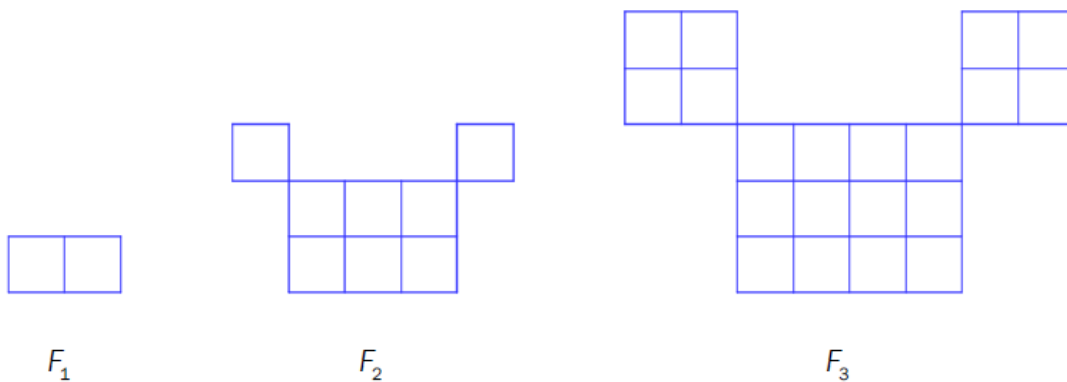


Formelen for trekantall nr. n er altså $T_n = 0,5n^2 + 0,5n = \frac{n^2 + n}{2}$.

Vi vil finne hvor stor trekant vi kan lage med 1000 kuler. Det kan vi gjøre ved å tegne grafen til funksjonen og finne skjæringspunktet med linja $y = 1000$. Da finner vi at vi kan lage trekant T_{44} med 1000 kuler. Da $T_{44} = 990$, får vi 10 kuler til overs.

Utfyllingsoppgave – Mønster i figurer

I denne oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan gå frem for å finne mønster i figurer.



(Eksamen 2P høsten 2016)

Se på figurene. **Tenk:** Hva skjer fra en figur til den neste? Beskriv hva du ser med ord og marker på figurene.

Tegn den neste figuren.

Tell antall deler hver figur består av og sett dette inn i en tabell

x (Figur nr)	1	2	3	4
y (Antall klosser)				

Legg tabellen inn i et regneark i GeoGebra og utfør regresjonsanalyse. Velg den modellen hvor punktene passer best med grafen.

(Lim inn GeoGebrabildet her)

Finn et uttrykk for antall klosser i figur F_n

Hvor mange klosser vil det være i figur F₇?

Fremgangsmåte:

Hvor stor figur kan du lage hvis du har 1000 klosser?

Fremgangsmåte:

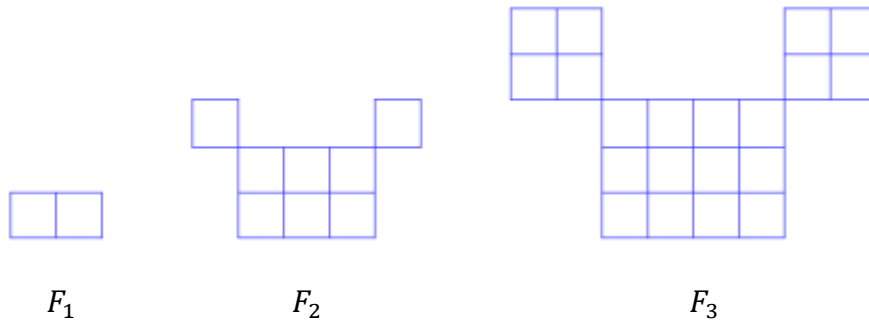
Hvor mange klosser vil du da ha igjen? _____

(Lim inn GeoGebrabildet her)

Eksamensoppgaver modeller

E1

(Eksamen høst 2016, Del 2, 6p)



Snorre lager figurer av kvadratiske klosser etter et fast mønster.

Ovenfor ser du figur F_1 , F_2 og F_3 .

- Hvor mange klosser trenger Snorre for å lage F_4 og for å lage F_5 ?
- Bestem et uttrykk for antall klosser i figur F_n uttrykt ved n .

Snorre har 1000 klosser. Han vil lage en figur som er så stor som mulig.

- Bruk formelen fra oppgave b) til å bestemme hvor mange klosser han får til overs når han har laget figuren.

E2

(Eksamen høst 2016, Del 2, 8p)

Tabellen nedenfor viser pris og antall solgte enheter av en vare.

Pris (kroner)	15	19	24	30	34	42	50
Antall solgte enheter	160	132	108	90	79	67	58

- Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1600 \cdot x^{0,85}$$

er en god modell for sammenhengen mellom pris og antall solgte enheter av varen.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $15 \leq x \leq 50$.
- Bestem antall solgte enheter når prisen er 45 kroner.
- Bestem prisen når antall solgte enheter er 100.
- Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten for funksjonen f fra $x = 20$ til $x = 40$.

Hva forteller svaret om antall solgte enheter?

E3

(vår 2012, Del 1)

Elev	Praktisk situasjon	Modell	Spørsmål
Stian	Jeg har laget noen armbånd. Armbåndene skal jeg selge for 50 kroner per stykk.	Jeg trenger en modell som viser hvor mye jeg kan tjene.	Hvor mye tjener jeg dersom jeg selger fem armbånd?
Sondre	Jeg har kjøpt en krukke med 150 drops. Hver dag vil jeg spise fem drops.	Jeg trenger en modell som viser hvor mange drops jeg har igjen i krukka hver dag.	Hvor mange dager går det før jeg har spist opp halvparten av dropsene?
Sebastian	Jeg skal klippe ut rektangelformede tøystykker i ulike størrelser. Lengden av hvert tøyestykke skal være 2,0 cm større enn bredden.	Jeg trenger en modell som viser hvor stort arealet av hvert tøyestykke blir.	Hvor stort blir arealet av et tøyestykke dersom jeg velger at bredden skal være 3,0 cm?

Ovenfor har tre elever beskrevet tre ulike situasjoner.

Ta for deg hver av de tre situasjonene.

- Svar på elevens spørsmål.
- Foreslå en matematisk modell.
- Si noe om modellens begrensninger.

E4

(høst 2011, Del 2)



Nils har funnet en bok på loftet. Tippoldefaren til Nils lånte boka på biblioteket og skulle levert den inn igjen 23.11.1911.

Nils lurer på hvor dyrt dette kunne blitt for tippoldefar dersom biblioteket hadde beregnet gebyr for sen innlevering. Han ser for seg at biblioteket kunne beregnet gebyr etter to ulike modeller.

Modell 1

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og så 5 øre i tilleggsgebyr for hver uke som går etter det. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 20 øre.)

Modell 2

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og deretter øker dette gebyret med 0,2 % hver uke. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 10,04004 øre.)

I denne oppgaven regner vi at det er 52 uker i et år.

- a) Tenk deg at tippoldefar leverer inn boka i dag. Regn at “i dag” er 23.11. 2011.
 - 1) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 1?
 - 2) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 2?
- b) For hvilken av de to modellene kommer gebyret raskest opp i 10 kroner?

E5


(vår 2011, Del 2)

Vibeke har fått en bakterieinfeksjon og tar tablett med antibiotika. En tablett inneholder 220 mg antibiotika. Antall milligram antibiotika i kroppen reduseres med 11 % hver time.

- a) Vibeke tar en tablett. Hvor mange milligram antibiotika er det igjen i kroppen hennes
- 1) etter én time?
 - 2) etter åtte timer?

Vibeke tar en tablett hver åttende time.

- b) Hvor mange milligram antibiotika har hun i kroppen rett etter at hun har tatt sin
- 1) andre tablett?
 - 2) tredje tablett?

- c)  Skisser grafen som viser hvor mange milligram antibiotika Vibeke til enhver tid har i kroppen det første døgnet etter at hun begynte å ta tablettene.

E6

(høst 2012, Del 1)



Et fallskjermhopp kan deles inn i fire faser. I hver fase ser vi på farten fallskjermhopperen har loddrett nedover.

Fase 1:

Fallskjermhopperen forlater flyet. Etter tre sekunder er farten 25 m/s, og etter åtte sekunder har fallskjermhopperen nådd den maksimale farten, som er 50 m/s.

Fase 2:

Fallskjermhopperen faller med maksimal fart i fire sekunder.

Fase 3:

Fallskjermen løses ut, og i løpet av ett sekund minker farten til 5 m/s.

Fase 4:

Fallskjermhopperen fortsetter med konstant fart 5 m/s i åtte sekunder før han når bakken.

Lag en grafisk framstilling som viser hvordan farten til fallskjermhopperen varierer med tiden i løpet av hoppet.

E7

(Eksamen høst 2016, Del 2, 5p)

Når en pasient har tatt en tablett, vil virkestoffet i tablett brytes ned i kroppen. Konsentrasjonen av virkestoffet i blodet vil avta eksponentielt med tiden.

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen i mikrogram per milliliter ($\mu\text{g/ml}$) av virkestoffet i blodet 1 time etter og 24 timer etter at pasienten har tatt tablett.

Timer etter at pasienten har tatt tablett	1	24
Konsentrasjon av virkestoff i blodet ($\mu\text{g/ml}$)	0,5	0,05

- Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for konsentrasjonen av virkestoffet i blodet x timer etter at pasienten har tatt en tablett.
- Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 10 timer etter at pasienten har tatt en tablett.

En pasient begynner å ta tabletter. Han tar én tablett klokka 08.00 hver morgen og én tablett klokka 20.00 hver kveld.

- Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme konsentrasjonen av virkestoffet i blodet 30 timer etter at pasienten tok den første tablett.

E8

(vår 2011, Del 2) 

Rebecca er på ferie i Kina. Hun vil kjøpe sko til kjæresten, Isak, hjemme i Oslo. Kinesiske skostørrelser er annerledes enn det hun er vant med fra Norge.

Nedenfor ser du hva Rebecca finner ut om kinesiske herresko.

- * Den minste størrelsen er 20. Sko i størrelse 20 er 21,5 cm lange.
- * Når størrelsen øker med 1, øker skolengden med 5 mm.
- * Kineserne bruker halvtørrelser, slik at for eksempel 37,5 er en mulig skostørrelse.

Rebecca vil sammenlikne norske og kinesiske skostørrelser. Hun setter opp tabellen nedenfor.

	Minste skostørrelse	Økning i lengde per størrelse	Halvtørrelser
Kina	20 (lengde 21,5 cm)	5 mm	Ja
Norge	32 (lengde 21,75 cm)	6,6 mm	Nei

- a) Hvor lang er en sko som har norsk skostørrelse 40?
- b) 1) Forklar at $y = (x - 20) \cdot 0,5 + 21,5$ er en formel for å regne ut skolengden, y , når du kjenner den kinesiske skostørrelsen, x .
- 2) Sett opp en tilsvarende formel for å regne ut skolengden når du kjenner den norske skostørrelsen.
- c) Isak bruker norsk skostørrelse 43. Hvilken kinesisk skostørrelse tilsvarer dette? Det er en lineær sammenheng mellom norske og kinesiske skostørrelser.
- d) Tegn av tabellen under i besvarelsen din. Fyll ut tabellen og finn den lineære sammenhengen.

Norsk skostørrelse	Kinesisk skostørrelse
32	
43	
	39

E9

(vår 2012, Del 2)

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen i Norge i perioden fra 1998 til 2011.

Årstall	Konsumprisindeks
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4

- a) Marker verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem der x - akse viser antall år etter 1998 (1998 tilsvarer $x = 0$) og y - akse viser konsumprisindeksen.

Bruk regresjon til å finne en rett linje som passer med punktene i koordinatsystemet.

- b) Hva vil konsumprisindeksen bli i 2030 ifølge modellen i a)?

Myndighetene har siden 2001 hatt som mål at konsumprisindeksen skal stige med 2,5 % per år.

- c) Hva ville konsumprisindeksen ha blitt i 2030 dersom den hadde steget med 2,5 % per år fra 2001 til 2030?

E10

(høst 2012, Del 2)

Måned	Januar	Mars	Juni	Juli	August	Desember
Antall kilogram pølser	45	144	299	328	336	36

Tabellen ovenfor viser antall kilogram pølser som ble solgt i en butikk noen måneder i 2011.


- a) Framstill datamaterialet i tabellen ovenfor som punkter i et koordinatsystem der x -aksen viser måned og y -aksen viser antall kilogram pølser.

(La $x = 1$ svare til januar, $x = 2$ til februar, $x = 3$ til mars, osv.)

- b) Bruk regresjon til å bestemme en modell på formen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ som kan brukes for å beskrive antall kilogram pølser som ble solgt per måned i løpet av dette året.

Tegn grafen til f i samme koordinatsystem som du brukte i a).

Butikken regner med at pølsealget vil være 20 % høyere hver måned i 2012 sammenliknet med tilsvarende måned i 2011.

- c)  I hvilke måneder i 2012 vil butikken da selge mer enn 300 kg pølser per måned dersom vi tar utgangspunkt i modellen i b)?

E11

(vår 2012, Del 2)


Tabellen nedenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år.

Årstall	1927	1961	1974	1987	1999	2011
Folketall (milliarder)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La x være antall år etter 1900 (i 1900 er $x = 0$, i 1901 er $x = 1$, og så videre).

- Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 1,27 \cdot 1,016^x$ kan brukes som modell for å beskrive hvordan folketallet i verden har endret seg i årene 1927–2011.
- Hvor mange prosent øker folketallet med per år ifølge modellen i a)?
- Når var folketallet 4,6 milliarder ifølge modellen i a)?
- Hvor lang tid går det ifølge modellen i a) mellom hver gang folketallet fordobles? Hvordan stemmer dette med tallene i tabellen ovenfor?

FN har utarbeidet prognoser som sier at folketallet i verden skal passere 8 milliarder i 2025 og 9 milliarder i 2045.

-  Vurder om modellen i a) passer med disse prognosene.

E12

(høst 2011 Del 2)

Årstall	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Innbyggertall	650	550	467	396	336	284
Endring fra året før		-100				
Prosentvis endring fra året før		-15,4 %				

Tabellen ovenfor viser innbyggertallet i en liten bygd i årene fra 2005 til 2010. Hans og Grete vil ut fra tabellen lage en matematisk modell som kan brukes til å anslå innbyggertallet i bygda i årene som kommer. Hans mener de bør velge en lineær modell. Grete er ikke enig.

a)

- 1) Tegn av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Fyll inn tallene som skal stå i resten av de hvite feltene.
- 2) Bruk opplysningene i tabellen. Argumenter for at Hans og Grete ikke bør velge en lineær modell, og foreslå hvilken type modell de bør velge.


La x være antall år etter 2005, og la $f(x)$ være innbyggertallet i bygda.

b) Bruk regresjon til å finne den modellen du foreslo i a).

c) 1) Hva vil innbyggertallet i bygda være i 2020 ifølge modellen du fant i b)?

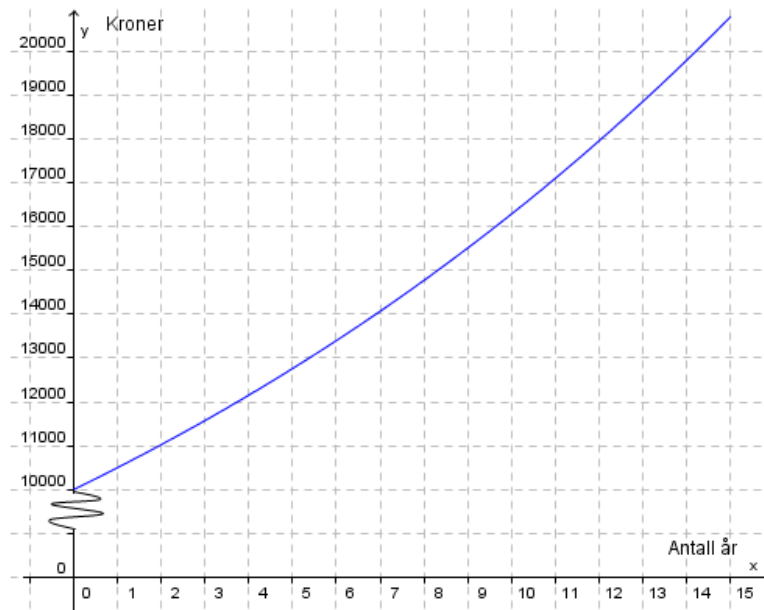
2) Hvor lang tid vil det gå før innbyggertallet er under 100 ifølge denne modellen?

Hans lager likevel en lineær modell. Han finner at $y = -62x + 635$.

d)  Vurder om denne modellen kan brukes til å beskrive innbyggertallet i bygda i årene fram til 2020.

E13

(høst 2012 Del 2)



Guri setter et pengebeløp i banken. Grafen ovenfor viser hvordan beløpet vokser de 15 første årene. Vi antar at renten er den samme hvert år.

- a) 🤔 Sett opp et matematisk uttrykk som kan være en modell for hvor mye penger Guri har i banken etter x år.
- b) Hvor mye penger vil Guri ha i banken etter 20 år ifølge modellen du satte opp i a)? Når vil beløpet hun har i banken, passere 50 000 kroner ifølge modellen?

E14

(vår 2011, Del 2)

Per prøver å finne en sammenheng mellom diameteren og volumet til kuler.
Han måler diameter og volum for noen kuler av ulik størrelse. Se tabellen nedenfor.

Diameter (cm)	3,0	6,0	10,0	16,0	26,0
Volum ($\text{cm}^3 = \text{mL}$)	14	113	525	2 145	9 200

- a) 1) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 0,52 \cdot x^{3,0}$ er en god modell for sammenhengen mellom diameteren, x , og volumet, $f(x)$, til kuler.
2) Tegn grafen til funksjonen f .
- b) Finn diameteren til en kule med volum 1000 mL.

Per lærte allerede i grunnskolen at formelen for volumet av en kule er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ der r er radius i kulen.

- c) Stemmer resultatet fra a) med denne formelen? Forklar.

E15

(høst 2011, del 2)

Haile Gebrselassie fra Etiopia har vært en av verdens beste langdistanseløpere. I tabellen nedenfor ser du hans beste tider på noen distanser.


Distanse x (i meter)	1 500	3 000	5 000	10 000	15 000	16 093	25 000	42 195
Tid T (i minutter)	3,550	7,417	12,656	27,033	41,633	44,400	71,617	123,988

- a) Bruk regresjon til å vise at $T = 1,44 \cdot 10^{-3} \cdot x^{1,07}$ er en modell for tiden T som funksjon av distansen x for Gebrselassies resultater.
- b) Tegn grafen til T .
- c) Hvor lang tid vil Gebrselassie bruke på en halvmaraton (21097,5 m) ifølge modellen i a)?

Pete Riegel har laget en modell som viser sammenhengen mellom tiden T_1 en løper bruker på en distanse D_1 , og tiden T_2 løperen bruker på en distanse D_2 .

Modellen ser slik ut:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^{1,06}$$

- d)  Ta utgangspunkt i tiden Gebrselassie bruker på 25 000 m, og regn ut hvor lang tid han vil bruke på en halvmaraton ifølge Riegels modell. Hvordan passer dette svaret med modellen du fant i a)?

E16

(vår 2013, Del 2)

Bilmerke	Volvo
Bilmodell	V50
Nybilpris i 2006	299 990
Antatt verdi i 2011	171 000
Verditap	128 900
Verditap årlig	25 780

I 2011 kjøpte Helene en bruktbil. Hun fant da tabellen ovenfor på Internett. Alle beløp er oppgitt i kroner.

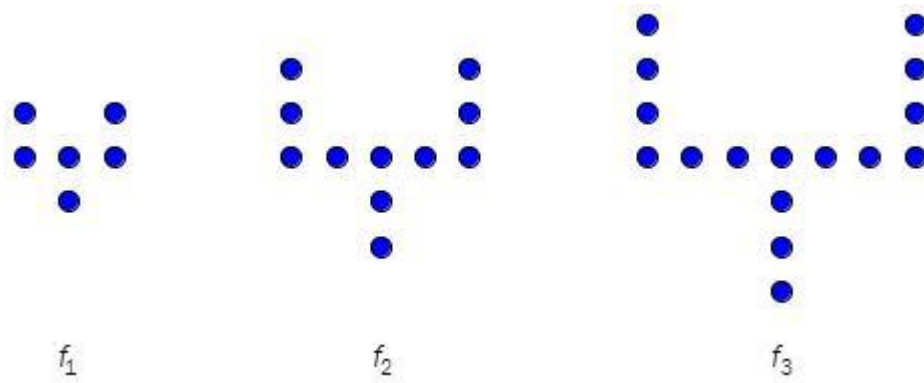
- a) Forklar at det årlige verditapet på bilen er beregnet ved hjelp av en lineær modell og bestem denne modellen.

Helene lurer på om det vil være mer realistisk å bruke en eksponentiell modell.

- b) Bestem en eksponentiell modell som totalt gir samme verditap på bilen fra 2006 til 2011 som den lineære modellen.
- c) Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den lineære modellen?
Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den eksponentielle modellen?

E17

(høst 2012, del 1)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1 , f_2 og f_3 .

a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4 .
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n , uttrykt ved n .

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

E18

(vår 2016, del 2)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1000 hPa (hektopascal)

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsider og se på noen modeller for hvor stort lufttrykket er x kilometer over havets overflate.



- a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell f der $f(x) = 1000 \cdot 0,88^x$

Tegn grafen til f for $0 \leq x \leq 10$.

- b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modellen i a). Gi denne modellen navnet g . Tegn grafen til g for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem som grafen til f .

- c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell h . Tegn grafen til h for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem du har brukt tidligere i oppgaven. Kommenter siste setning i sitat 3.
- d) Bruk hver av de tre modellene f , g , og h til å bestemme lufttrykket 8848 meter over havoverflaten. Sammenlikn svarene du får med sitat 4 og kommenter.

Fasit øvingsoppgaver modeller

Oppgave 1 a) ca. 0,95 kg b) $v(x) = 0,19x + 0,4$

Oppgave 2 a) 94 grader b) $T(x) = 100 - 3x$ ($= -3x + 100$) c) 76 grader d) -20 grader

Oppgave 3 a) $B(x) = 10000 \cdot 0,965^x$ b) ca. 65 timer

Oppgave 4 a) $U(x) = \frac{30x + 200}{x}$ b) 10 par

Oppgave 5 b) $V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x$ c) $x = 10$ cm, 16 000 cm³ ($= 16$ dm³ = 16 liter)

Oppgave 6 a) $f(x) = 0,024x + 3,3$ b) 4,8 millioner c) 0,024 millioner = 24 000 d) I 2060

Oppgave 7 a) $f(x) \approx -0,012x^3 + 0,65x^2 - 3,1x + 7$ b) 60 c) 2002 – 2003 d) 2018

Oppgave 8 b) $f(x) = 13,5x + 105$, ca. 850 personer c) $f(x) = 132 \cdot 1,049^x$, ca. 1830 personer d) En tredobling passer best med den eksponentielle modellen.

Oppgave 9 a) $y = 1,00 \cdot x^{1,50}$ b) Den gir 84,1 år c) 30,1

Oppgave 10 a) 9 c) $2n + 1$ d) 49, 2 fyrstikker til overs

Fasit eksamensoppgaver modeller

- E1 a) 38, 62 b) $F_n = 3n^2 - 3n + 2$ c) 80 til overs (kan lage F_{18})
- E2 a) vis b) graf c) 63 d) 26 e) $-2,5$, for hver krone prisen stiger, selges det 2,5 færre enh.
- E3 Stian: tjener= $50x$, x er antall armbånd, Sondre: dropsIgjen= $150-5x$, x er antall dager (drops igjen kan ikke gå under 0), Sebastian: areal= $x(x+2)$, x er bredde (bredden kan ikke være 0 eller negativ)
- E4 a) 1) 26005 øre = 260,05 kr 2) 324552 øre = 3245,52 kr c) Modell 1
- E5 a) 1) 196 mg 2) 87 mg b) 1) 307 mg 2) 341 mg
- E6 grafisk fremstilling
- E7 a) $f(x) = 0,55 \cdot 0,905^x$ b) $0,2 \mu\text{g/ml}$ c) $0,421 \mu\text{g/ml}$
- E8 a) 27,0 cm c) $y = (x-32) \cdot 0,66 + 21,75$ c) 35
- E9 a) $f(x) = 2,26x + 100,5$ b) 172,7 c) 222,4
- E10 a) (lag liste med punkt) b) $f(x) = -1,00x^3 + 10,4x^2 + 20,9x + 14,7$ c) fra juni til oktober
- E11 b) 1,6 % c) 1981 d) ca. 44 år e) Modellen gir høyere verdier enn FNs prognoser
- E12 b) $f(x) = 650 \cdot 0,848^x$ c) 1) 54 2) ca. 11 år
- E13 a) $y = 10000 \cdot 1,05^x$ b) 26530 kr c) Etter 33 år
- E14 b) 12,4 cm
- E15 c) 61,0 min d) 59,8 min.
- E16 b) $299900 \cdot 0,894^x$ c) 119 000 kr 136 000 kr.
- E17 a) 26 31 b) $f_n = 5n + 1$ c) f_{199}
- E18 a) $V_f = 100 \% - 12 \% = 88 \% = 0,88$. Startverdi = 1000, så derfor $1000 \cdot 0,88^x$
b) Høyde: $0+5,5 = 5,5$. $5,5+5,5 = 11$. $11+5,5=16,5$
Luftrykk: $1000/2=500$. $500/2=250$. $250/2=125$
c) $h(x) = 1000 - 125x$. Siste setning viser modellens begrensning
d) Ca. 325 hPa for f og g. ($1000/3=333$, så stemmer bra for f og g).
Negativ verdi for h, se c).