

Kapittel 7. Funksjoner



Mål for kapittel 7, funksjoner.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- redegjøre for begrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner
- undersøke funksjonar som beskriver praktiske situasjonar, ved å fastsetje nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultatene

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva en lineær- og polynomfunksjon er
- hva nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt er og hvordan jeg finner det ved hånd og ved bruk av grafisk verktøy
- hvordan grafisk fremstille en funksjon både for hånd og ved bruk av digitale verktøy
- hvilken informasjon en grafisk fremstilling av en funksjon skal inneholde
- hvordan jeg finner stigningstall og konstantledd i en funksjon

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan jeg finner stigningstallet og konstantleddet til en lineær funksjon
- hva en funksjon fremstiller
- hvorfor en grafisk fremstilling må inneholde noe grunnleggende informasjon utover funksjonen

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- tolke en funksjon, både ved funksjonsuttrykk og grafisk
- forklare de praktiske betydningene av en funksjon
- lage og løse sammensatte tekstoppgaver knyttet til funksjoner
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – Måle og presentere

I denne oppgaven skal dere jobbe i par. Dere skal utføre, måle og notere. Bli enige om hvem som gjør hva.

Dere skal måle (enten vekten eller lengden) av ulikt antall gjenstander du får av læreren din. Deretter skal dere presentere resultatene for resten av klassen. Dette skal dere gjøre ved å

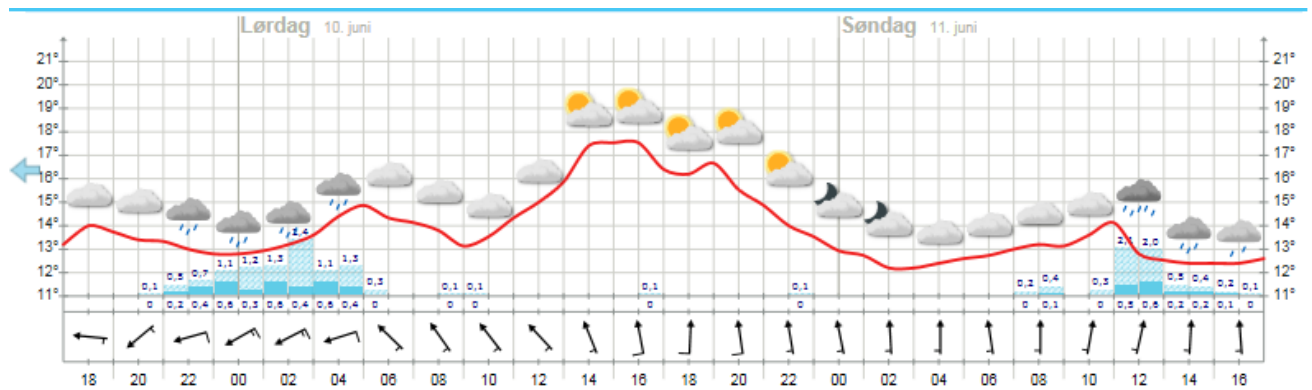
- fylle ut tabellen nedenfor til venstre
- fremstille resultatene i et koordinatsystem dere får av læreren
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

Måle:			Måle:	
Antall	Måltall i		Antall	Måltall i
0			0	
1			1	
2			2	
3			3	
4			4	

Deretter får dere en startverdi av læreren din. Dere skal nå gjøre det samme som dere gjorde ovenfor. Altså, du skal:

- fylle ut tabellen ovenfor til høyre
- fremstille resultatene i det samme koordinatsystemet
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

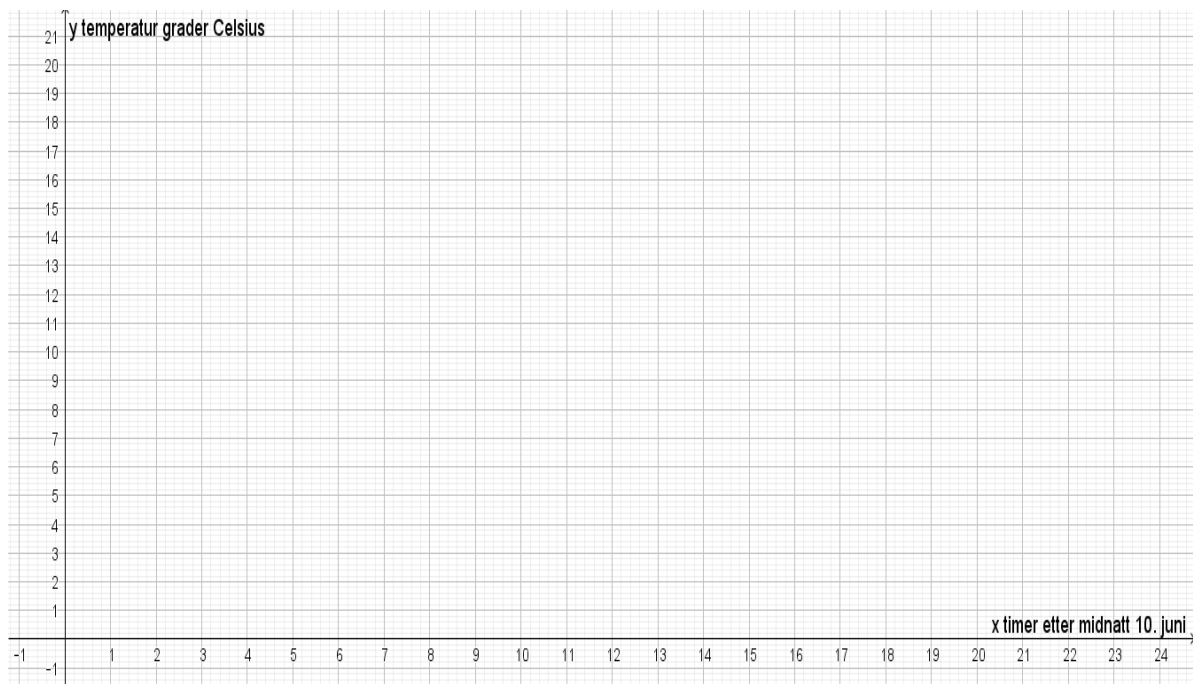
En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.



Se på bildet over fra yr.no som viser varselet for Hellerud videregående skole. Angi tidspunktene som hele timer, og temperaturen med én desimal. Starttidspunktet er kl. 17:00 fredag 9.juni.

- a) Når er det varmest på søndag?
 1. Hva er temperaturen da?
 2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
- b) Når blir det kaldest på lørdag?
 1. Hva er temperaturen da?
 2. Hvor mange timer er det gått siden starttidspunktet?
- c) Når vil det være varmest i perioden? (marker på figuren)
- d) Når vil det være kaldest i perioden? (marker på figuren)
- e) Hvor stor er forskjellen mellom det varmeste og kaldeste på lørdag og hvor mange timer går det fra det er kaldest til varmest?
- f) Hvor mye stiger temperaturen med per time fra det kaldeste til det varmeste på lørdag?
- g) Hvor mange ganger er temperaturen 15°C ? (marker på figuren)
- h) Når er temperaturen 13°C ? (marker på figuren)

- i) I hvilken periode er temperaturøkningen sterkest? (marker på figuren)
- j) I hvilken periode er temperaturreduksjonen sterkest? (marker på figuren)
- k) Tegn en framstilling av temperaturutviklingen i løpet av lørdag 10. juni i et koordinatsystem. Merk av temperatur hver time og tegn. Beskriv deretter temperaturutviklingen det døgnet med egne ord og relevante matematiske begreper.



Beskrivelse med ord:

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

1. Noen begreper

1.1 Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

1.2 Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*.

Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

1.3 Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

1.4 Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

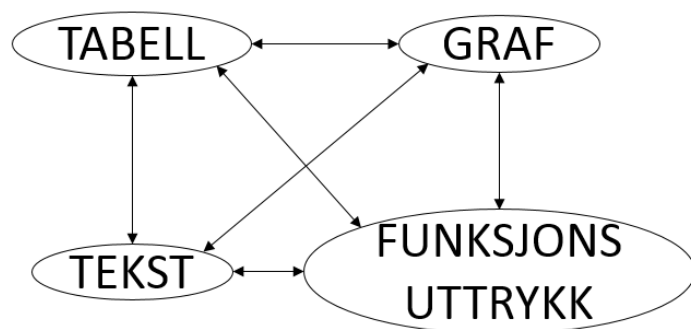
Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

2. Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

- 1) en *tabell*
- 2) en *graf*
- 3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.
- 4) En tekst



Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for x .

Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for y .

2.1 Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr

Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr

Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3,5 = 70$ kr

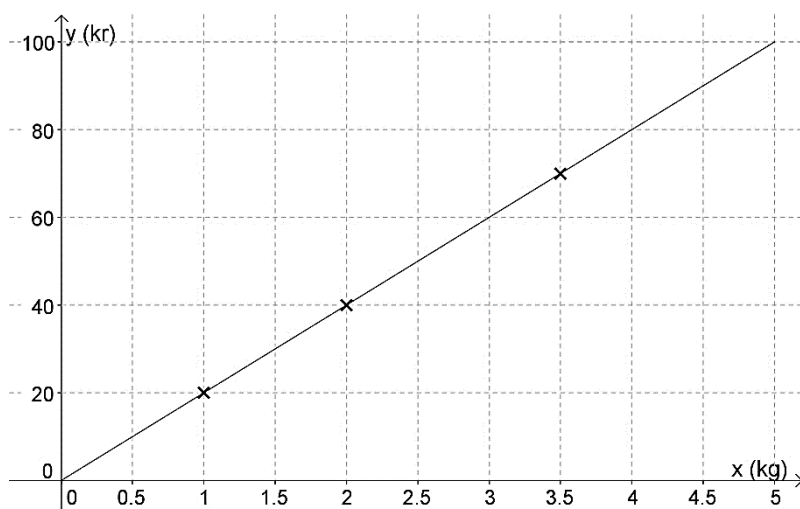
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (x) og prisen av posen (y) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenhetene* i tabellen.

2.2 Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *graf* til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

3.1 Lineære funksjoner

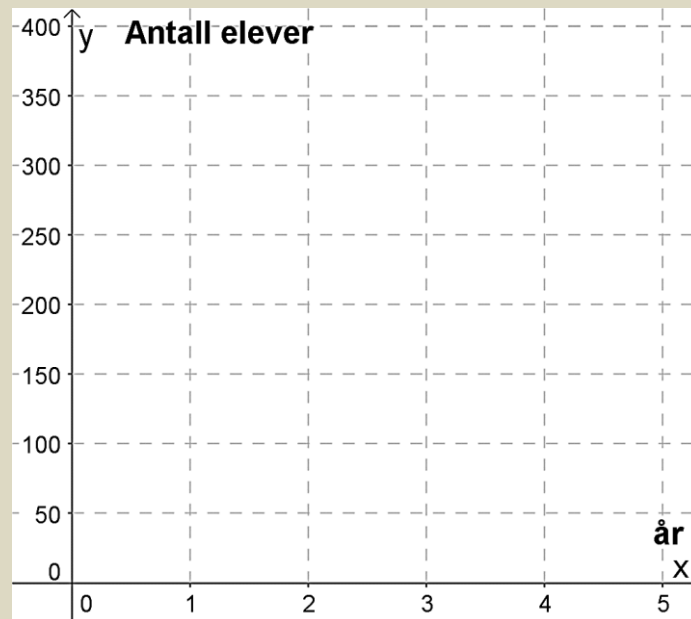
I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

Oppgave 1

Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

- a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? _____
- b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? _____
- c) Hvor mange elever er det ved skolen om 4 år? _____
- d) Merk av elevtallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet under:

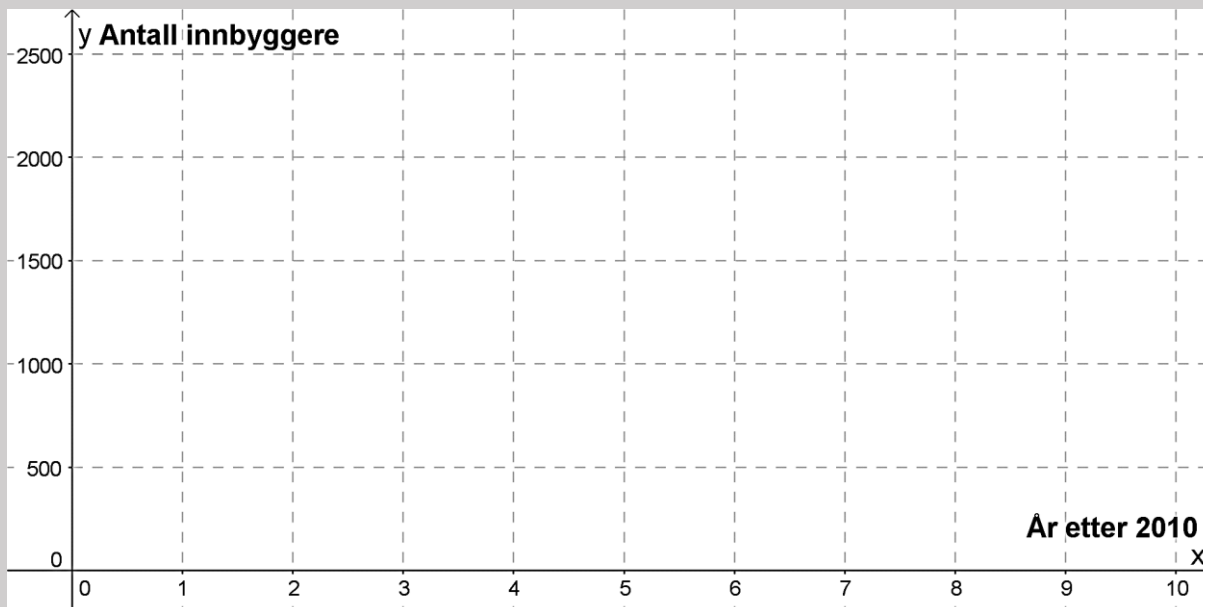


- e) Legg merke til at de tre punktene ligger på en rett linje, og tegn linja som går gjennom punktene.
- f) Når vil elevtallet ved skolen passere 300 dersom denne utviklingen fortsetter?

Oppgave 2

I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Årene etterpå har antall innbyggere avtatt (gått ned, mindet) med 250 per år.

- a) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2012? _____
- b) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2015? _____
- c) Hvis vi regner med at utviklingen vil fortsette, hvor mange innbyggere vil det være i bygda i 2020? _____
- d) Merk av innbyggertallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet



- e) Legg merke til at de tre punktene ligger langs en rett linje og tegn linja gjennom punktene.

Grafene i oppgave 1 og oppgave 2 viser begge lineær vekst.

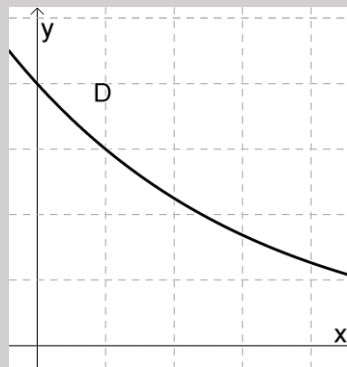
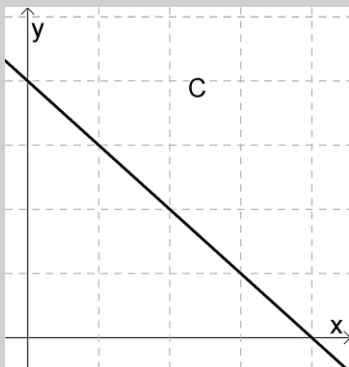
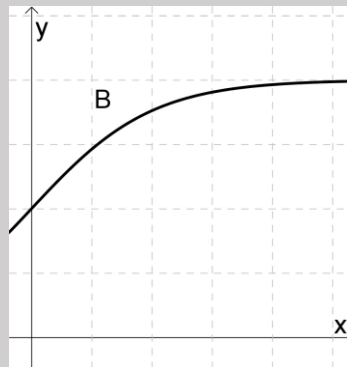
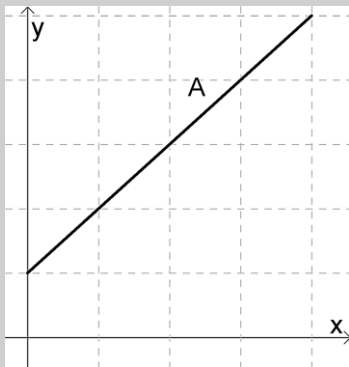
- Hva er likt?
- Hva er forskjellig?

Den grafiske tolkningen av lineær vekst er en **rett linje**.

Ved lineær vekst er **veksten lik** per enhet. Vi kan både ha positiv vekst (noe øker) og negativ vekst (noe avtar)

Oppgave 3

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser lineær vekst.



a) Forklar hvilke(n) graf(er) som viser lineær vekst, og begrunn svaret.

b) Beskriv en praktisk situasjon som passer til de(n) grafen(e) som viser lineær vekst.

Oppgave 4

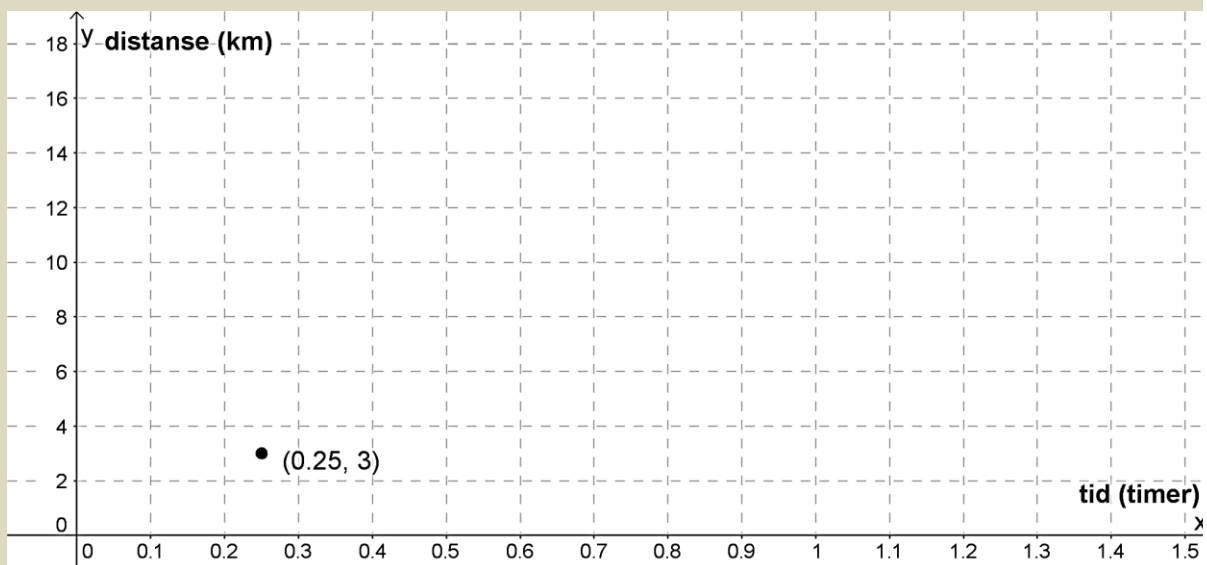
Vi løper på tredemølle med jevn fart 12 km/t og vil finne ut hvor langt vi løper dersom vi holder denne farten

- a) Fyll ut resten av tabellen under og merk av avstandene som punkter i koordinatsystemet.

x (tid (timer))	$f(x)$ (distanse (km))
0,25	3
0,5	
1	
1,5	

- b) Hvorfor viser denne situasjonen lineær vekst?
-

- c) Merk av punktene i koordinatsystemet og trekk en rett linje gjennom dem.



- d) Bruk grafen til å finne ut omtrent hvor lenge du må løpe for å ha løpt 10 km
-

- e) Hvor langt løper du i løpet av en time?
-

3.2 Praktisk tolkning av en lineær funksjon

Alle lineære funksjoner har

- **konstantledd** (der grafen skjærer y-aksen)
- **stigningstall** (hvor mye funksjonsverdien øker med når x-verdien øker med 1)

Som regel kaller man konstantleddet b og stigningstallet a . (a og b står for tall).

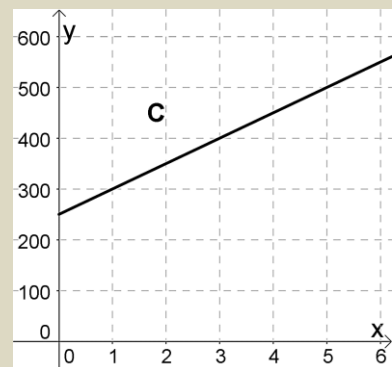
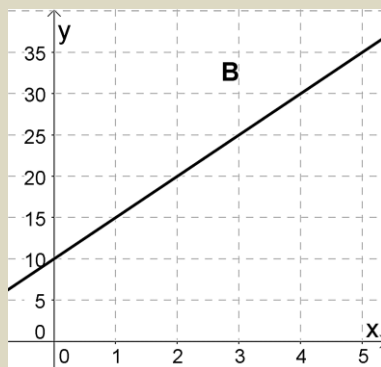
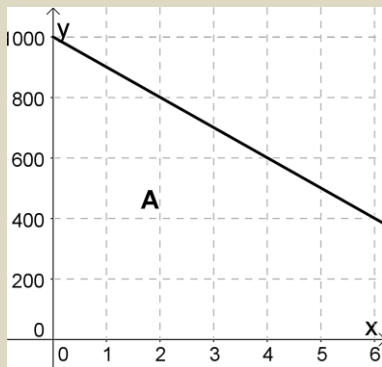
Uttrykket til en lineær funksjon kan da alltid skrives som

$$f(x) = a \cdot x + b \text{ eller } f(x) = b + a \cdot x$$

Oppgave 5

a) Hva er konstantleddet og stigningstallet til funksjonene i grafene under?

b) Hva er uttrykket til hver av funksjonene i grafene under?



A: $a =$ _____

B: $a =$ _____

C: $a =$ _____

$b =$ _____

$b =$ _____

$b =$ _____

$f(x) =$ _____

$f(x) =$ _____

$f(x) =$ _____

Det er interessant å vite uttrykket til en lineær funksjon fordi det gir oss informasjon om hva funksjonen beskriver. Vi skal nå finne uttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2:

Eksempel 1

1) Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

Antall elever totalt vil være $150 + \text{endringen}$.

Endringen er $+25$ hvert år, altså $25 \cdot \text{antall år}$.

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med x

Antall elever etter x år er gitt ved funksjonen $f(x) = 150 + 25 \cdot x$

1) I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Hvert år siden da har antall innbyggere avtatt (sunket) med 250.

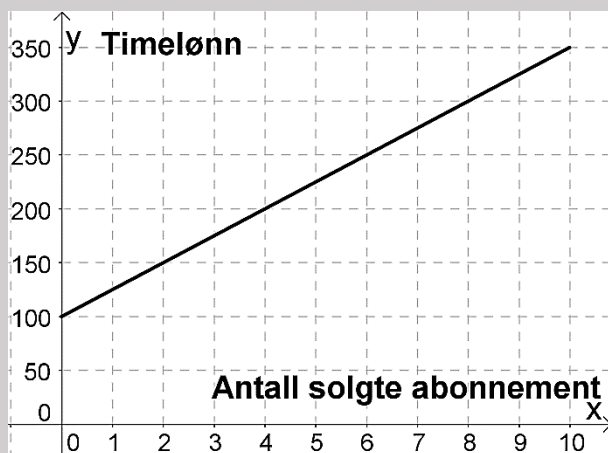
Antall innbyggere totalt vil være $2500 + \text{endringen}$

Endringen her er negativ (blir færre), -250 hvert år, altså $-250 \cdot \text{antall år}$

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med x

Antall innbyggere etter x år er gitt ved funksjonen $f(x) = 2500 - 250 \cdot x$

Oppgave 6



Emma arbeider som telefonselger.

Timelønna hennes er delvis provisjonsbasert, dvs at hun får et fast beløp hver time, i tillegg til en bestemt sum per abonnement hun selger.

Bestem uttrykket til funksjonen.

Hva sier uttrykket om lønna til Emma?

Oppgave 7

En fotobedrift selger album med bilder.

Prisen på albumet med x antall bilder er gitt ved funksjonen $P(x) = 100 + 20x$.

Hva er prisen på albumet (uten bilder)? _____

Hva er prisen for ett bilde? _____

Hvor mye vil et album med 10 bilder koste? _____

3.3 Lineære funksjoner i GeoGebra


Vi kan bruke en graftegner (GeoGebra) til å tegne lineære funksjoner. Vi skriver da inn funksjonsuttrykket i GeoGebra. Det er viktig å sette navn på aksene i koordinatsystemet. I eksemplet under repeterer vi fra 1P hvordan vi gjør det.

Eksempel:

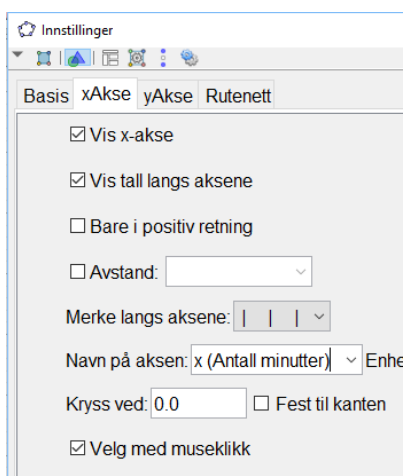
Ole skal lade opp mobiltelefonen sin. Displayet viser at han har 23% igjen på batteriet og batteriet lades med 1% i minuttet. Uttrykket $f(x) = x + 23$ viser oppladingsprosenten til batteriet etter x minutter. Vi skal tegne funksjonen de første 60 minuttene.

Vi går på **Skriv inn** og velger **Funksjon(Funksjon,start,slutt)**. Vi skriver inn det som står etter = i uttrykket og 0 på start og 60 på slutt slik **Funksjon(x+23,0,60)** og trykker enter.

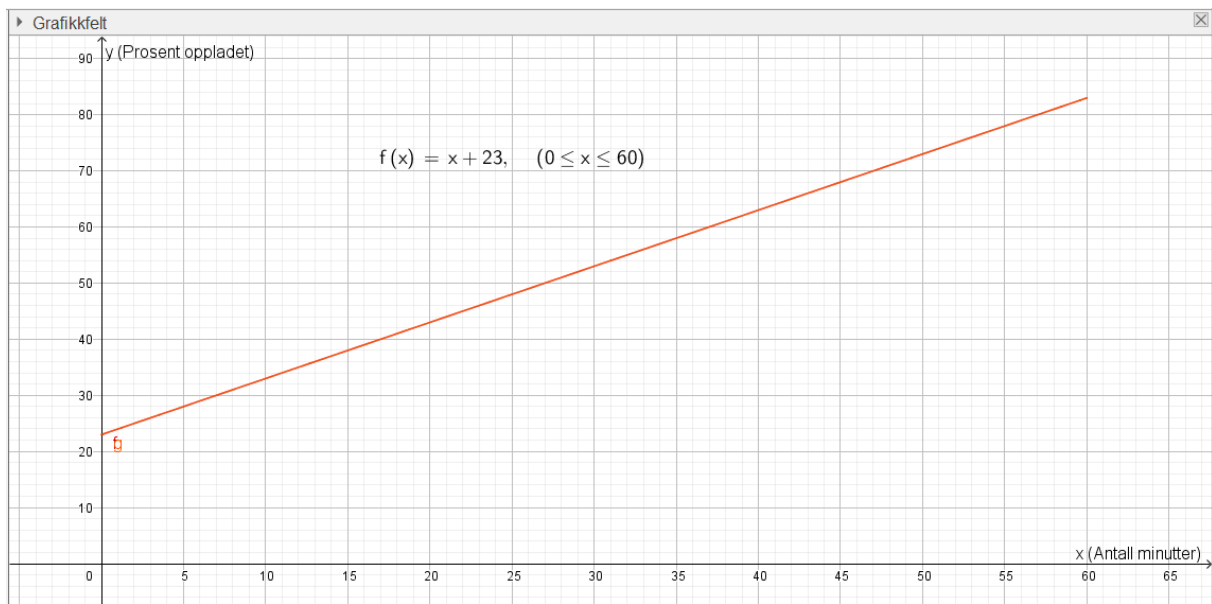


Vi stiller aksene med  og drar i x og y -aksen slik at grafen legger seg over x -aksen fra 0 til 60.

Vi setter navn på aksene ved å **høyreklikke i Grafikkfeltet**, velge **Grafikkfelt** og x - og y -akse etter tur. Der det står **Navn på aksene** skriver vi inn hva x og y er.



Da blir bildet i GeoGebra slik:



Oppgave 8

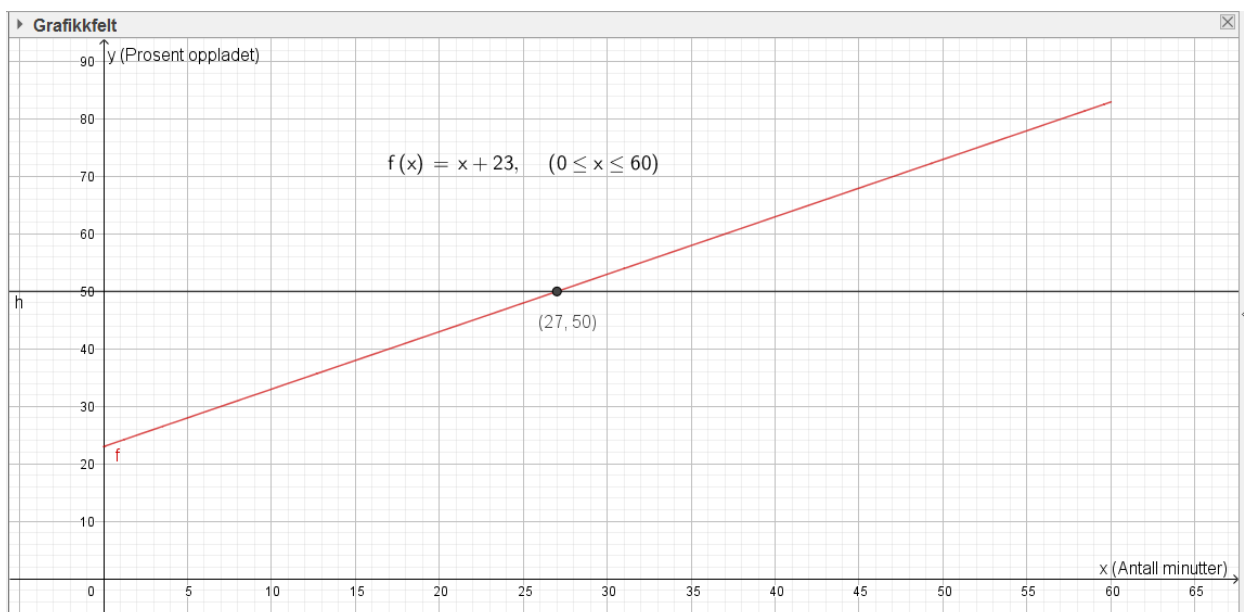
Bestem funksjonsuttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2. Tegn dem i hvert sitt koordinatsystem i GeoGebra og la $0 \ll x \ll 10$. Skriv ut grafene og lim dem inn her:

Vi kan bruke grafen til å finne informasjon om situasjonen vi har tegnet.

Eksempel.

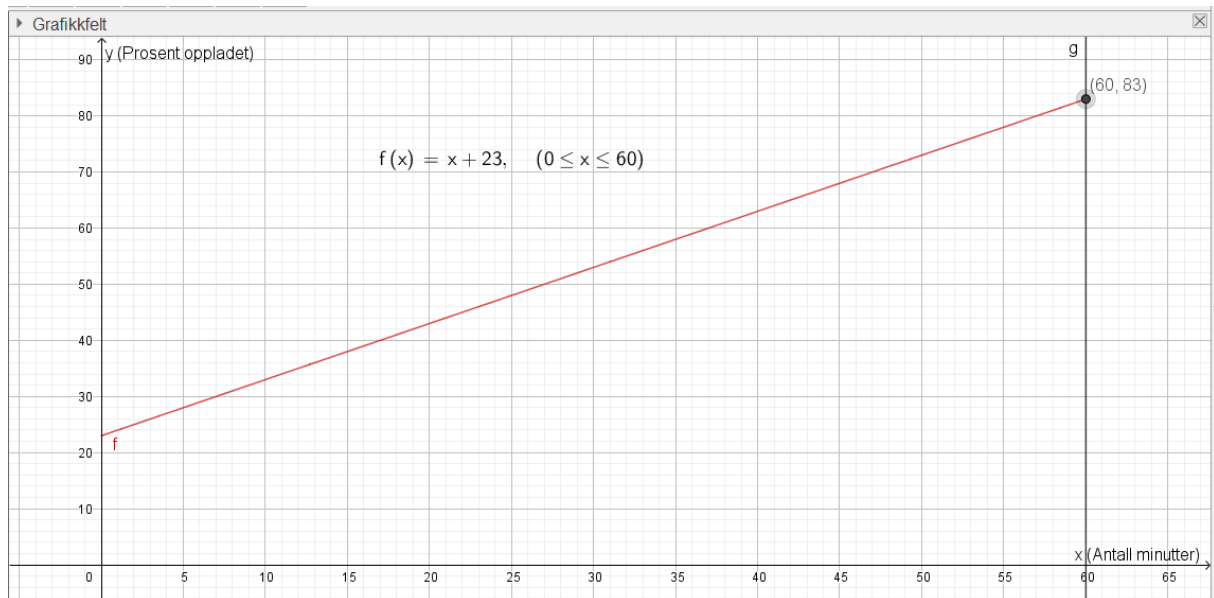
Ole lurer på når batterikapasiteten er på 50% og hvor mange prosent han har på batteriet etter 60 minutter.

Vi finner batterikapasiteten på y-aksen og skriver derfor inn $y = 50$ på **Skriv inn** og trykker enter. Vi får da frem en rett linje som krysser grafen. Vi leser av x-verdien i skjæringspunktet med grafen ved å bruke **Skjæring mellom to objekt** (i nedtrekksmenyen til andre knapp fra venstre).



Vi ser at batterikapasiteten er 50% etter 27 minutter.

Når vi skal finne batterikapasiteten etter 60 minutter, gjør vi det samme som ovenfor. Men vi finner minuttene på x-aksen. Derfor skriver vi inn $x = 60$ på **Skriv inn** istedenfor. Vi leser så av y-verdien i skjæringspunktet med grafen.



Vi ser at batterikapasiteten er på 83% etter 60 minutter.

Du må alltid lime inn GeoGebra bildet i besvarelsen din og skrive svartekst og fremgangsmåte (hvilke kommandoer du har brukt i GeoGebra)

Oppgave 9

Vi har en vekta og et begerglass. Vi slår på vekta og setter begerglasset på vekta. Vi legger i en og en terning og leser av hva vekta viser. Uttrykket

$$y = 5x + 100$$

Viser vekta y når vi har lagt på x antall terninger.

- Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 20
- Hva viser vekta når vi har lagt på 7 terninger?
- Hvor mange terninger ligger det på vekta når den viser 150 gram?
- Hvor krysser denne linja y-aksen? Hva forteller denne verdien?
- Hvor mye veier en terning?

Oppgave 10

Per fyller bensintanken helt full. Han vil se hvor langt han kan komme på en full tank.
Uttrykket

$$y = -0,5x + 45$$

viser hvor mange liter han har igjen på tanken når han har kjørt x mil.

- Tegn grafen til y når x er mellom 0 og 100
- Hvor mye har Per igjen på tanken når han har kjørt 30 mil?
- Hvor langt har Per kjørt når det er 10 liter igjen på tanken?
- Hvor langt har han kjørt når tanken er tom?
- Hvor krysser denne linja y -aksen? Hva forteller denne verdien?
- Hvor mange liter bruker bilen per mil?

Skriv ut grafen og lim den inn her:

4. Polynomfunksjoner

“Polynom” betyr “flere ledd”. En polynomfunksjon består av en sum av potenser av x . Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

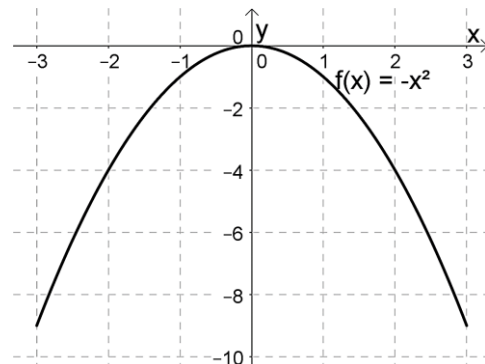
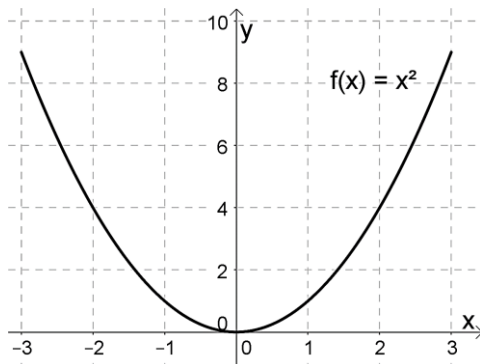
Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon*.

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene f og g ovenfor.

4.1 Grafen til en polynomfunksjon

En polynomfunksjon av grad 2 (=andregradsfunksjon) vil alltid ha et toppunkt eller et bunnpunkt, under ser du grafen til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = -x^2$.

Hva er likt og hva er forskjellig med disse grafene? Hvorfor er det slik?



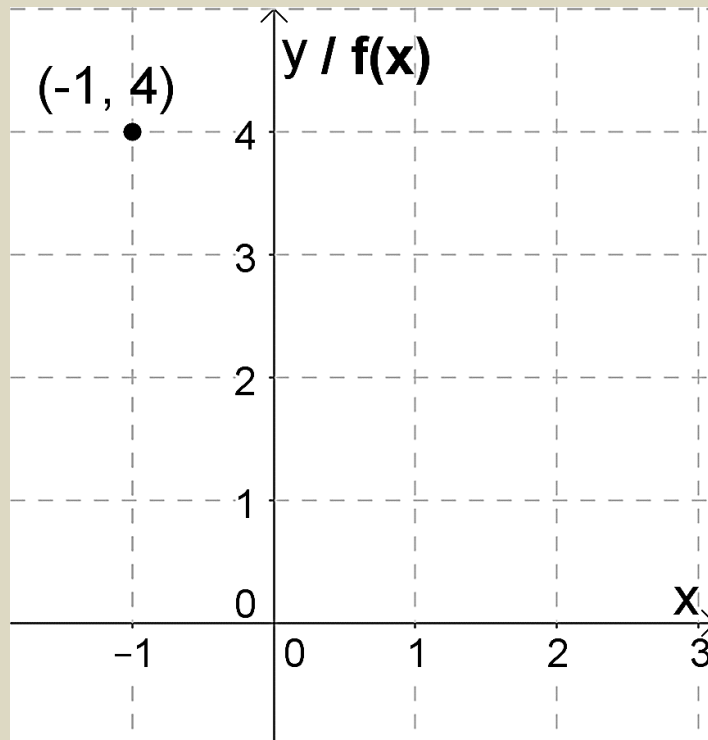
Oppgave 11

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

- a) Hva kan vi si om hvordan grafen vil se ut før vi tegner den?
- b) Gjør utregninger og fyll ut resten av tabellen:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4				

- c) Marker resten tallene fra tabellen som punkter i koordinatsystemet og tegn grafen.



- d) Skriv funksjonsuttrykket inn i GeoGebra. Bruk samme la grafen gå mellom x-verdiene -1 og 3

4.2 Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

Eksempel 2

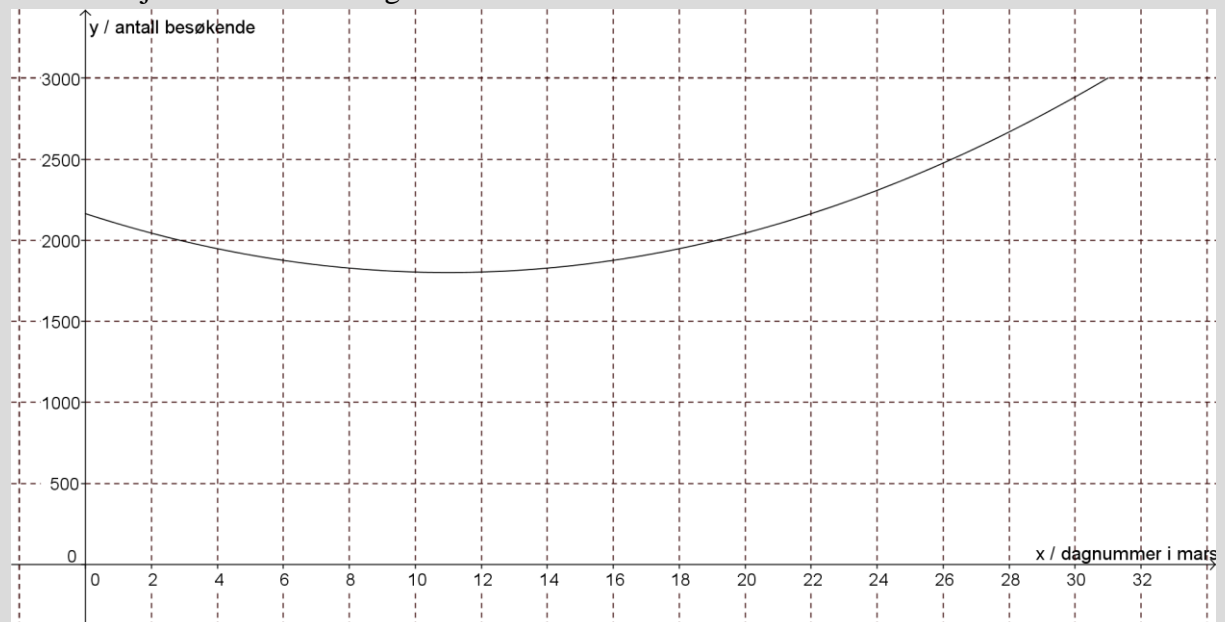
Funksjonen $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$ er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret x i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.

Tegn grafen til funksjonen når x ligger mellom 0 og 31.

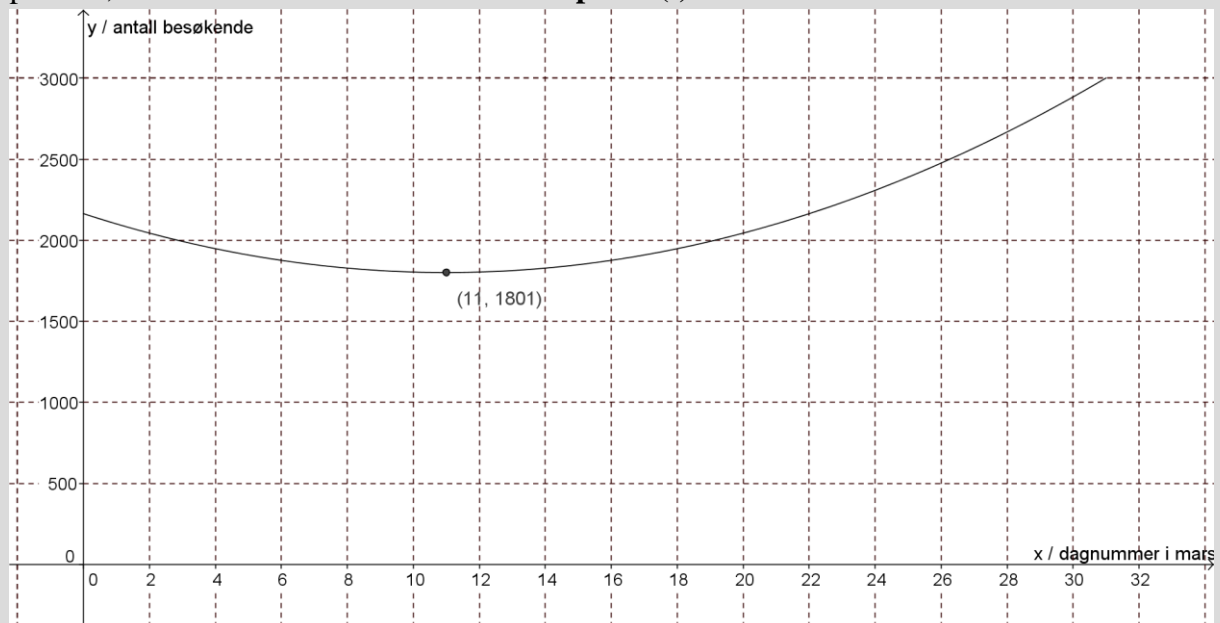
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon(3x² - 66x + 2164,0,31)**. Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra $x = 0$ til $x = 31$. Så skriver vi en passende tekst på aksene.

Etter å ha justert aksene skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet $f(x)$. For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt(f)**.



Vi ser at det var færrest besøkende for $x = 11$, altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

Oppgave 12

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$, der x er prisen på en enhet av varen i kroner.

- Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 100.
- For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

Oppgave 13

Funksjonen $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$ beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune x år etter år 2000. $x = 0$ er altså år 2000, $x = 1$ er år 2001 osv.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.
Her må du altså la x ligge mellom 0 og 13.
- Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

4.3 Nullpunkt

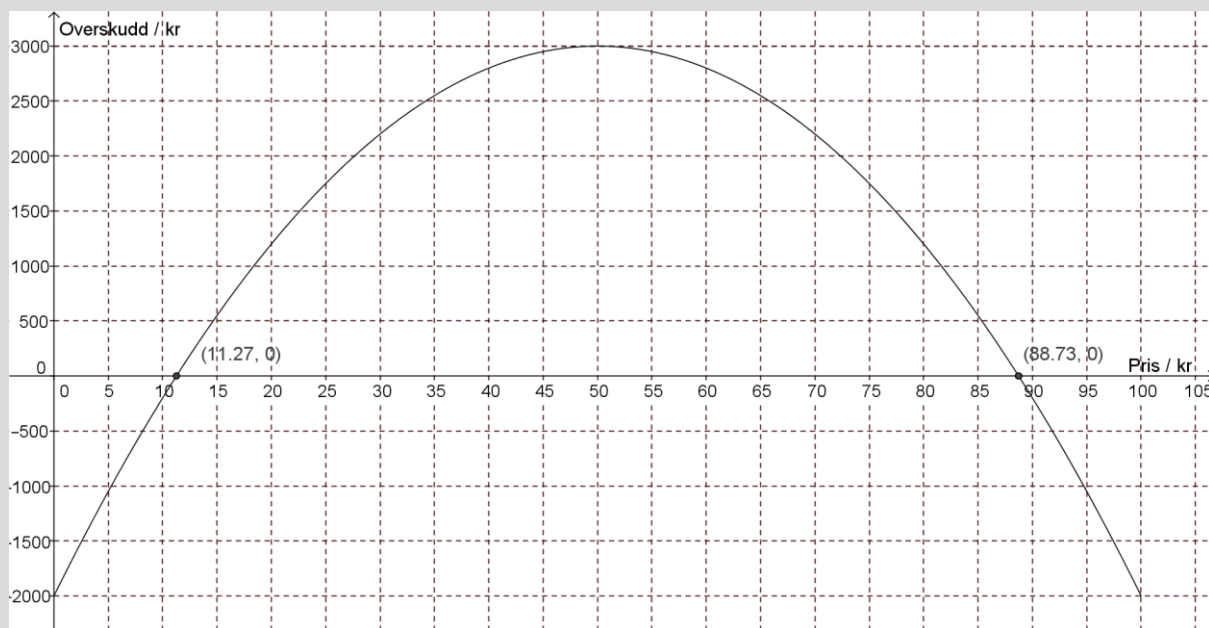
Et punkt der grafen til en funksjon treffer x -aksen kalles et *nullpunkt* til funksjonen. I et slikt punkt er funksjonsverdien lik null.

Vi ser først på hvordan vi finner nullpunkter i GeoGebra.

Eksempel 3

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 16. Først taster vi inn funksjonen:

Funksjon $(-2x^2+200x-2000,0,100)$. GeoGebra kaller funksjonen for f . Så skriver vi kommandoen **Nullpunkt(f)**.



Det ene nullpunktet er $x = 11.27$, og har koordinatene $(11.27, 0)$. Alle nullpunkter vil ha y -koordinat 0. Det andre nullpunktet er $x = 88.73$, og har koordinatene $(88.73, 0)$.

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under x -aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer x -aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.

Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.

Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

Oppgave 14

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$, der x er prisen på en enhet av varen.

- Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 300.
- For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
- Når går bedriften med overskudd?

4.4. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.

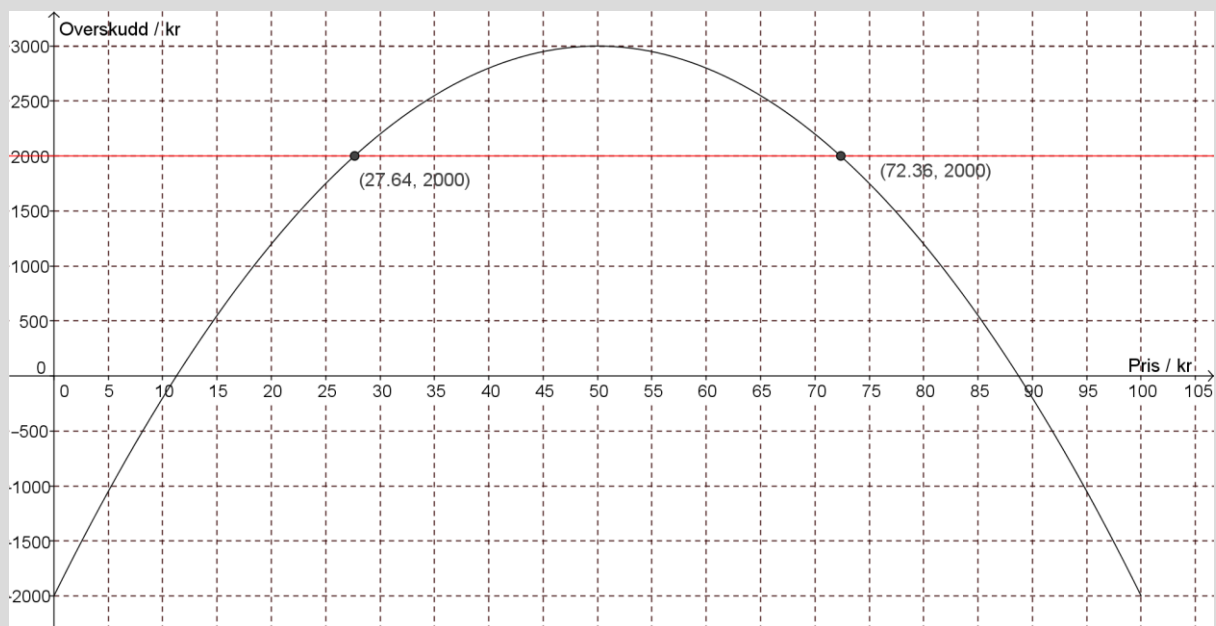
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

Eksempel 4

Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 16.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja $y = 2000$ og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er $(27.64, 2000)$ og $(72.36, 2000)$. Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja $y = 2000$ mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

Oppgave 15

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved $T(x) = -0,24x^2 + 1,2x + 16$, der $T(x)$ står for antall celsiusgrader, og x for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.

Her må du altså la x ligge mellom 0 og 8.

b) Når var temperaturen lik 16 °C?

c) Når var temperaturen høyere enn 16 °C?

Oppgave 16

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter x sekunder er ballen tilnærmet $h(x)$ meter over bakken, der

$$h(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

- a) Tegn grafen til h når x er mellom 0 og 3 sekunder
- b) Hvor høyt over bakken er ballen etter 2 sekunder?
- c) Når er ballen 18 meter over bakken?
- d) Når er ballen på sitt høyeste over bakken?
- e) Når treffer ballen bakken?

Oppgave 17

Firmaet FISKEMAT produserer og selger frossenfisk. Kostnaden K ved produksjonen er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 0,012x^2 + 14x + 7000$$

der x er antall produserte enheter per uke.

- a) Tegn grafen til K for x mellom 0 og 2500.
- b) Hva er kostnaden når firmaet produserer 750 enheter?
- c) En uke var kostnaden 40 105 kr. Hvor mange enheter ble produsert denne uka?

FISKEMAT kan selge produktene for 45 kr per enhet.

- d) Forklar at salgsinntekten er gitt ved $I(x) = 45x$
- e) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som K .
- f) Når er salgsinntekten lik kostnaden?
- g) Når er salgsinntektene større enn kostnadene? Hva betyr dette?

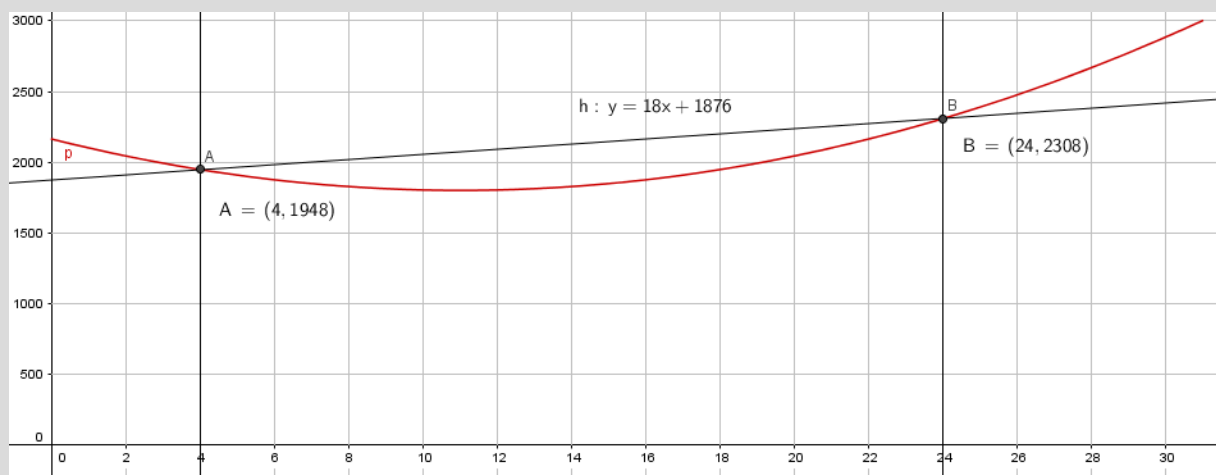
4.5 Gjennomsnittlig endring

Gjennomsnittlig endring forteller om den lineære utviklingen mellom to verdier, dvs hva verdien øker eller minker med i gjennomsnitt. Metoden vi bruker for å finne den lineære utviklingen er gitt under.

Eksempel 4

Vi ser på funksjonen fra eksempel 13. Vi vil finne den gjennomsnittlige endringen i antall besøkende fra 4. mars til 24. mars.

Vi tegner inn linjene $x = 4$ og $x = 24$ og finner skjæringspunktene mellom linjene og funksjonen for å finne antall besøkende i alpinanlegget den 4. mars og den 24. mars, henholdsvis.



Deretter trekker vi en linje som går gjennom de to punktene, ved å bruke «Linje».

Når vi har gjort dette vil vi i algebrafeltet få frem en funksjonsligning til den nye lineære linjen. Denne funksjonsligningen vil være på formen $ax + by = c$. Ved å høyreklikke og velge «Likning $y = ax + b$ », vil vi få frem funksjonsligningen der stigningstallet (a) og konstantleddet (b) lett kan leses. Vi ser da at gjennomsnittlig endring i besøkende fra 4. mars til 24. mars er en øke på 18 mennesker per dag, og vi gir svaret:

Mellom 4. mars og 24. mars vil antall besøkende øke med 18 personer per dag.

Oppgave 18

En hverdag mellom kl. 15 og kl. 22 var antall kunder i en butikk gitt ved $K(x) = -2,5x^2 + 10x + 150$, der $K(x)$ står for antall kunder, og x for antall timer etter kl. 12.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 22.
- Finn ut hvilket tidspunkt det var flest kunder og hvor mange kunder det var der da.
- Finn den gjennomsnittlige endringen i antall kunder mellom kl. 16 og kl. 20.

Utfyllingsoppgave

Funksjonen T gitt ved

$$T(x) = -0,08x^3 + 1,29x^2 - 3,9x + 1,2, \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser temperaturen i grader Celsius $T(x)$ på Hellerud 1. april et år x timer etter midnatt

- a) Bruk graftegner til å tegne grafen til T .

Fremgangsmåte:

- b) Når var temperaturen over $10\text{ }^\circ\text{C}$?

Svartekst:

Fremgangsmåte:

- c) Hva var temperaturen kl 01:00?

Svartekst:

Fremgangsmåte:

d) Når var temperaturen 0°C ?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

e) Hva var den laveste og den høyeste temperaturen disse timene?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

f) Hvor mange grader økte temperaturen med i gjennomsnitt per time fra den var på det laveste til den var på det høyeste?

Svartekst:
Fremgangsmåte:

Lim inn bilde fra GeoGebra her:

Viktige begreper

Konstantledd	
Stigningstall	
Variabel	
Funksjonsuttrykk	
Punkt	
Graf	
Tallintervall	
Tallområde	
Toppunkt	
Bunnpunkt	
Nullpunkt	

GeoGebra – fremgangsmåte

Lage graf for et bestemt tallområde	
Lage graf utfra punkter	
Skrive inn aksetitler	
Tilpasse x- og y-aksen	
Svare på oppgaver	
Finne en x- eller y-verdi når den andre er oppgitt	
Finne topp- og bunnpunkt	
Finne nullpunkt	
Finne gjennomsnittlig endring mellom to x-verdier	
Finne momentan endring/vekstfart	

Eksamensoppgaver funksjoner

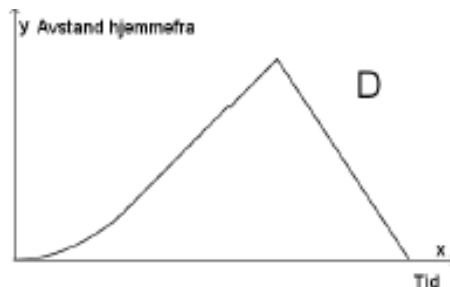
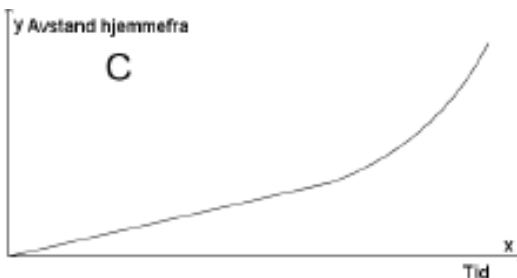
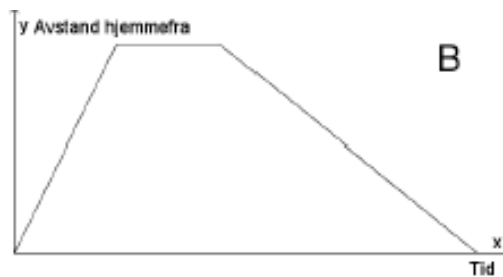
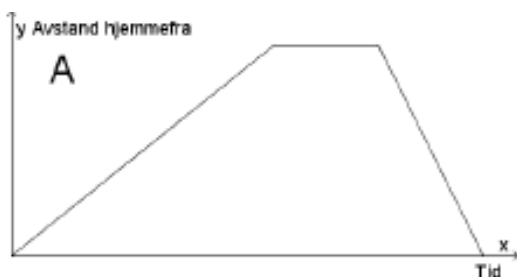
E1

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 4p)

Nedenfor har vi beskrevet fire ulike situasjoner.

Situasjon	Beskrivelse
1	Eline tar en løpetur. Hun starter hjemmefra i rolig tempo og øker så tempoet etter hvert. Etter en stund snur hun og løper raskt tilbake samme vei.
2	Eline løper hjemmefra for å rekke bussen. Etter å ha ventet noen minutter skjønner hun at hun ikke rakk bussen, og går tilbake samme vei.
3	Eline starter hjemmefra og går opp en bratt bakke. Hun tar en liten pause på toppen av bakken før hun løper tilbake samme vei.
4	Eline starter hjemmefra og padler over fjorden. I starten har hun motvind, men etter hvert avtar vinden, og farten øker.

Nedenfor ser du grafiske framstillinger som beskriver sammenhengen mellom tid og Elines avstand hjemmefra for hver av de fire situasjonene.



Hvilken graf passer til situasjon 1?

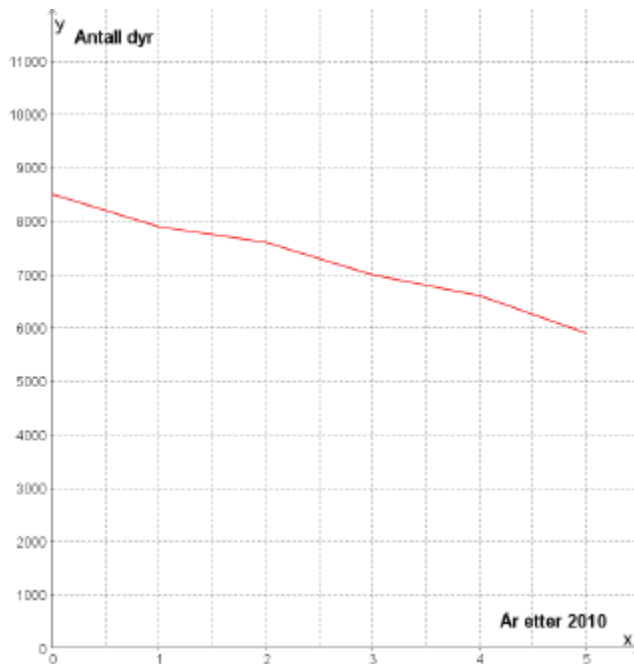
Hvilken graf passer til situasjon 2?

Hvilken graf passer til situasjon 3?

Hvilken graf passer til situasjon 4?

E2

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 4p)



Linjediagrammet ovenfor viser hvordan antall dyr av en art har avtatt innenfor et bestemt område i perioden 2010–2015.

- Bestem en lineær funksjon som tilnærmet beskriver utviklingen.
- Hvor mange dyr av arten vil det være i området i 2018 ifølge funksjonen fra oppgave a) ?
- Hvor mange år vil det gå før det ikke er flere dyr av arten igjen i området ifølge funksjonen fra oppgave a) ?

E3

(2P, 2PY høst 2016, Del 1, 2p)

Siri har kjøpt bil. Hun antar at verdien av bilen x år etter at hun kjøpte den, vil være gitt ved

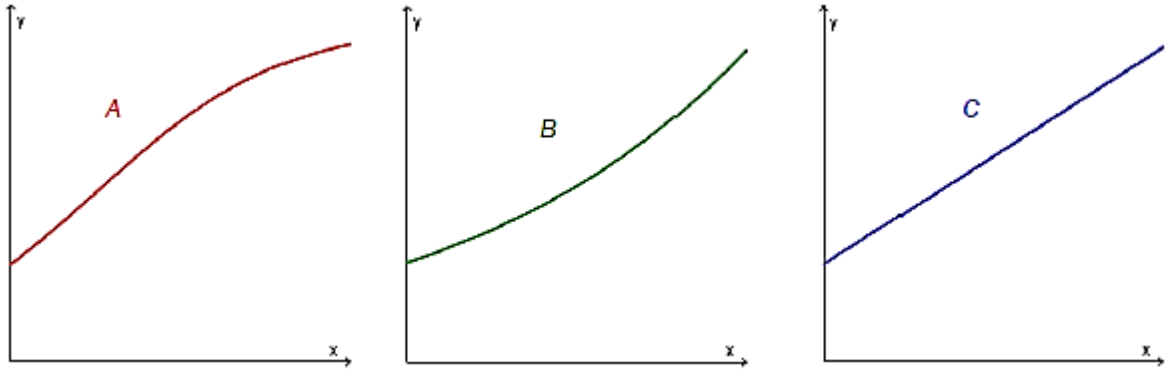
$$V(x) = 250\,000 \cdot 0,9^x$$

- Hva forteller tallene 250 000 og 0,9 i dette funksjonsuttrykket om verdien av Siris bil?
- Hva vil bilens verdi være ett år etter at Siri kjøpte den?

E4

(2P vår 2016, Del 1)

- Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt
- Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse viser eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt

**E5**

(2P vår 2016, Del 1)

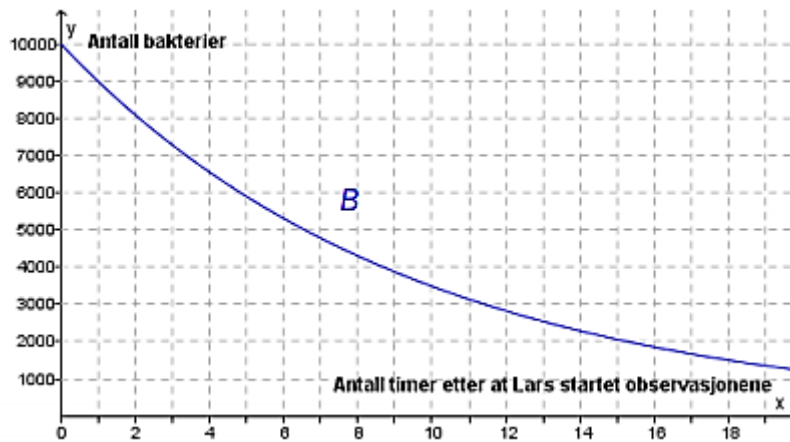
Marte er telefonselger. Hun har en fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner. Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

- Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.
- Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.
- Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

E6

(2P, høst 2015, del 1)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen B ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp uttrykket for $B(x)$

E7

(2P, vår 2015, del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

E8

(2P, vår 2015, del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet $h(t)$ meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$		18,75		18,75		8,75	

b) Tegn grafen til h

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h(0)$ og $h(3)$

E9

Funksjonene G og J gitt ved

$$G(x) = 0,0030x^3 - 0,088x^2 + 1,17x + 3,7 \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$J(x) = 0,0017x^3 - 0,057x^2 + 0,93x + 3,7 \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.
- Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?
- Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?
- Bestem $\frac{G(12)-G(0)}{12}$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2}$

Hva forteller disse svarene om vekta til Geir?

E10

(2P vår 2015, Del 2)

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \quad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f
- Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur
- Bestem $f(100)$ og den momentane vekstfarten til f når $x = 100$.
Hva forteller disse svarene?

E11

(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen h gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.

Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen t år etter 1. januar 1990.

- Tegn grafen til h for $0 \leq t \leq 10$.
- Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?
- Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
- Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 – 1. januar 1998?

E12

(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen f gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside x timer etter midnatt et gitt døgn.

- Tegn grafen til f for $0 \leq x \leq 24$.
- Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
- Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?
- Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f for $6 \leq x \leq 16$.
Hva forteller dette svaret?

E13

(Eksamen 2P(-Y), vår 2016, del 2)

Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0,006x^4 - 0,33x^3 + 5,7x^2 - 32,1x + 59,3 \quad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til B .
- Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?
- Når stod sola 20 grader over horisonten?
- Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 12.00?