Kapittel 4. Algebra

Mål for Kapittel 4, Algebra.

Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og uten digitale verktøy, presentere resultatene og vurdere hvor rimelige de er
- tolke, bearbeide, vurdere og diskutere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske fremstillinger
- forenkle flerleddet uttrykk og løse ligninger av første grad og enkle potensligninger

Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- ☐ hvordan jeg regner ut verdien av en formel
- ☐ hva et bokstavuttrykk er
- ☐ hvordan jeg forenkler et bokstavuttrykk
- ☐ hva en ligning er
- ☐ hvordan jeg kan løse en ligning

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- ☐ hvorfor jeg kan/bør forenkle et bokstavuttrykk
- ☐ hvordan jeg forenkler et bokstavuttrykk
- ☐ hvordan finne løsningen på en ligning

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- ☐ Gi praktiske eksempler på algebra i hverdagen
- ☐ Løse sammensatte oppgaver der en må lage en ligning og løse den
- ☐ Lage og løse en tekstoppgave der du må benytte algebra se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- ☐ vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

Utforskende oppgave – Bevegelse gjennom klasserommet

____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

= ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

= ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

= ____ ____

Mål lengden på et steg og et hopp:

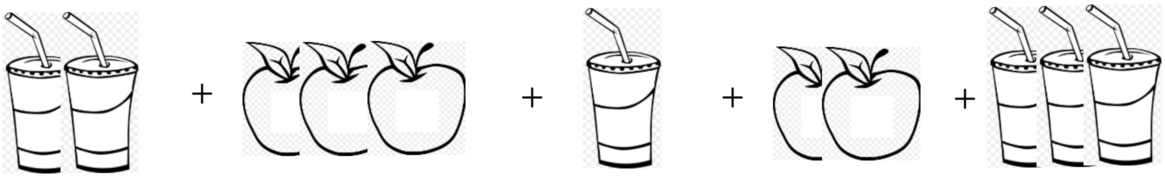
Steg:________ cm

Hopp:________ cm

Under finner du en liste med begreper som er viktige i dette kapittelet. Skriv en forklaring på hva begrepene betyr.

Begrep	Forklaring
Variabel	
Konstant	
Uttrykk	
Formel	
Mengde/størrelse	
Verdi	

1. Forenkling av bokstavuttrykk



En mor hadde med sine barn til byen. Ovenfor ser du bilder av hva de kjøpte i løpet av byturen.

a) Kan du rydde i regnestykket?

Det viste seg at 1 brus kostet 20 kr og 1 eple kostet 5 kr.

b) Hvor mye brukte moren på brus og epler på den byturen?

En annen familie kjøpte like mye brus og epler, men de brukte 200 kr.

c) Lag et forslag på hvor mye de betalte for 1 brus og 1 eple.

Oppgave 1

Gjør disse uttrykkene enklere.

a) $3a + 6a$ b) $2x + 5x$ c) $y + 3y$ d) $7b - 2b$ e) $2y + 5y - 3y$

Hva med $2a + 3b$? Fordi *a* og *b* ikke behøver å ha samme verdi, går det *ikke* an å forenkle dette uttrykket. Ikke prøv å være kreativ her!

Oppgave 2

Gjør disse uttrykkene enklere hvis det er mulig.

a) $3x + 4y$ b) $2a + 3b + 4a$ c) $3x + 4y + x - 2y$

$3(x + 2y)$ er et uttrykk som kan skrives om ved å bruke regelen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Her må vi bytte ut *a* med 3, *b* med *x* og *c* med 2*y*. Vi regner slik:

$$3(x + 2y) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2y = 3x + 6y$$

Oppgave 3

Skriv om uttrykkene ved å bruke regelen $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

a) $2(5+3)$ b) $2(a+3)$ c) $2(b+c)$ d) $3(2a+4b)$ e) $x(3+4y)$ f) $x(2x-4)$

Her er tre uttrykk hvor vi må bruke *flere* regler for å forenkle:

$$2x + 3(x+1) + 4 = 2x + 3x + 3 + 4 = 5x + 7$$

$$3a + 4(b-2) - b + 2a + 3 = 3a + 4b - 8 - b + 2a + 3 = 3a + 2a + 4b - b - 8 + 3 = 5a + 3b - 5$$

$$x^2 + xy + 3x(x+2y) = x^2 + xy + 3x \cdot x + 3x \cdot 2y = x^2 + xy + 3x^2 + 6xy = 4x^2 + 7xy$$

Oppgave 4

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $2 \cdot 3 + 2(3+4)$ b) $2b + 2(b+4)$ c) $5(b-1) + 8$ d) $a(2+4) + 4a$

Hvis det står minus foran en parentes betyr det at tallet *a* i regelen $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ er negativt, og vi må da *bytte fortegn når vi ganger ut parentesen*:

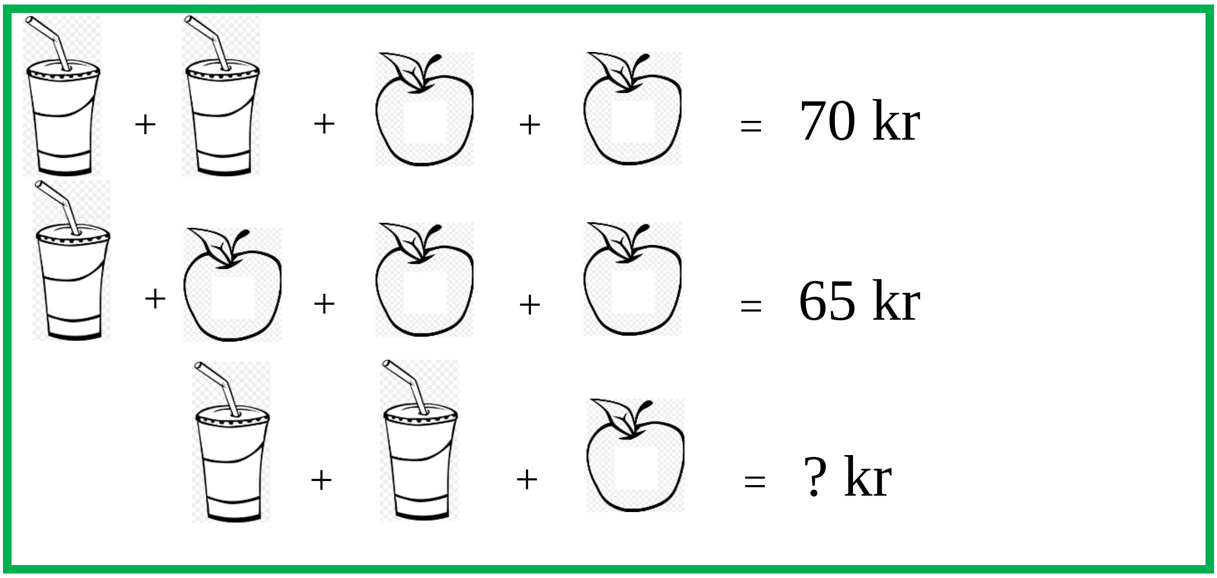
$$4x - 2(x-4) = 4x - 2x + 8 = 2x + 8$$

$$4a - (3a-1) = 4a - 3a + 1 = a + 1$$

Oppgave 5

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $6y - 3(y-2)$ b) $6x - (2x-3)$ c) $x^2 - 3x(x+y) - y(1-3x)$



2. Formelregning

Dersom du får vite hva bokstavuttrykket beskriver kalles dette en formel. En formel består av variabler, et likhetstegn og et bokstavuttrykk. For at man skal kunne bruke en formel til å løse praktiske problemer må det opplyses om hva variablene representerer.

Eksempler på formler:

Prisen *P* for en pose epler som veier *v* kilo når kiloprisen er 24 kr: $P = 24v$

Omkretsen til en sirkel med radius *r*: $o = 2\pi r$

Arealet *A* av en trekant med grunnlinje *g* og høyde *h*: $A = \frac{g \cdot h}{2}$

I oppgaver hvor du skal regne ut verdien av en variabel vil oppgaven opplyse om verdien til alle andre variabler enn den du skal regne ut. En god start er å erstatte variablene i uttrykket med verdien oppgitt i oppgaven, og regne ut det du klarer.

<u>Eksempel 1</u>

Regn ut verdien til a i formelen

a = b + 2c

når b = 7 og c = 12

Fremgangsmåte:

a = b + 2c
a = 7 + 2·12
a = 7 + 24
a = <u>31</u>

Oppgave 6

Regn ut lengden *L* du beveger deg når du bruker dine mål for *h* hopp og *s* steg.

Bruk formelen

L = 3h – s

Test om regningen stemmer og drøft resultatet.

Oppgave 7

Regn *a* i formelen

$$a = 2b + 3c$$

når

i) b = 4 og c = 7
ii) b = 7 og c = 14
iii) b = 2,5 og c = 8
iv) b = 0,78 og c = 3,4

Oppgave 8

Regn *a* i formelen

$$a = bc$$

når

i) b = 3 og c = 9
ii) b = 10 og c = 14
iii) b = 0,5 og c = 20
iv) b = 4,67 og c = 0,6

Oppgave 9

Regn *a* i formelen

$$a = \frac{2b}{c}$$

når

i) b = 6 og c = 4
ii) b = 14 og c = 7
iii) b = 4,5 og c = 3
iv) b = 6,81 og c = 2,7

Oppgave 10

Regn *a* i formelen

$$a = (b + c) \cdot 3$$

når

i) b = 6 og c = 4
ii) b = 12 og c = 13
iii) b = 2,5 og c = 7,5
iv) b = 3,9 og c = 8,3

Eks:

Regn ut verdien til b i formelen

a = 2b + 2c

når a = 14 og c = 3

Fremgangsmåte:

a = 2b + 2c
14 = 2b + 2·3
14 = 2b + 6
2b + 6 = 14

Dersom du har lært deg å løse likninger kan du bruke metode 1. Hvis ikke kan du prøve metode 2.

<table>
<tr><td rowspan="6">Metode 1, løse som likning:
2b + 6 = 14
2b = 14 – 6
2b = 8
b = 4</td><td colspan="3">Metode 2, prøve og feile (POF):
Metoden går ut på å sette inn ulike tall for b, og finne ut hva b må være for at svaret skal bli riktig. I denne oppgaven skal svaret bli 14. Det er viktig at du noterer hvilke tall du bruker og hva svaret blir.</td></tr>
<tr><td>Tipper at
b =</td><td>Svar skal bli 14
2b + 6 = 14</td><td>Vurdering av svaret
Høyt/lavt/riktig</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2·1 + 6 = 8</td><td>For lavt, må tippe høyere</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2·2 + 6 =10</td><td>For lavt, må tippe høyere</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2·6 + 6 = 18</td><td>For høyt, må tippe lavere</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2·4 + 6 =14</td><td>Riktig! b må være 4</td></tr>
</table>

Oppgave 11

a) En lærer beveget seg frem i klasserommet etter formelen

L = 3h – s

og endte på 2,4 m. Læreren avslører at hennes steg måler 0,3 m. Hvor lange er hvert av hoppene til læreren?

b) En annen lærer fulgte samme formel, og endte på 3,6 m. Hva kan denne lærerens hopp og steg ha målt?

Oppgave 12

Regn b i formelen

$$a = bc$$

når

v) a = 24 og c = 3
vi) a = 39 og c = 13
vii) a = 105 og c = 15
viii) a = 20 og c = 40

Oppgave 13

Regn c i formelen

$$a = \frac{2b}{c}$$

når

v) a = 4 og b = 12
vi) a = 9 og b = 13,5
vii) a = 2,8 og b = 7
viii) a = 20 og b = 5

Oppgave 14

Regn *b* i formelen

$$a = (b + c) \cdot 3$$

når

v) a = 27 og c = 4
vi) a = 48 og c = 7
vii) a = 75 og c = 12
viii) a = 186 og c = 24

Oppgave 15

Til et bursdagsselskap blir det kjøpt inn en flaske med 1,5 L brus. Bursdagsbarnet får en stor kopp med plass til 3 dL. De 6 andre gjestene får en liten kopp hver. Hvor mye brus får hver gjest?

Oppgave 16

Vi slipper to objekter med massene m_1 og m_2 ut fra et fly. Etter kort tid vil objektene ligge oppå hverandre i fritt fall. Vi kan kalkulere summen av krefter F, målt i N (Newton), som virker på objektene med formelen

$$F = (m_1 + m_2) \cdot g_{jorden} - L$$

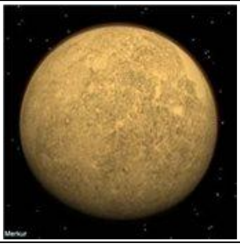
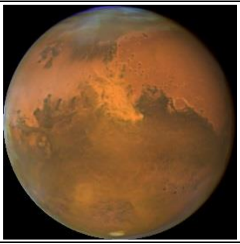
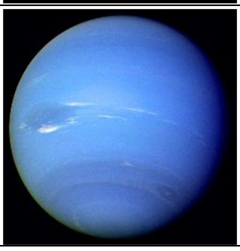
der g_{jorden} er gravitasjonskonstanten på jorden og L er kraften luftmotstanden utgjør. L er motsatt rettet av gravitasjonskraften og satt til 25N i denne oppgaven. Gravitasjonskonstanten g på jorden er $g_{jorden} \approx 10$ m/s^2.

a) Skriv av formelen, først slik det står. Deretter erstatter du konstantene med tallene som er oppgitt.
b) Finn F når massen av de to objektene m_1 og m_2 er
   i) 10 kg og 5kg
   ii) 13 kg og 17 kg
   iii) 25 kg og 45 kg
   iv) 13,4 kg og 6,28 kg
c) Finn summen av massene når
   i) F = 150N
   ii) F = 270N
   iii) F = 105N
   iv) F = 28,5N
d) Finn m_1 når
   i) F = 250N og m_2 = 15 kg
   ii) F = 300N og m_2 = 25 kg
   iii) F = 350N og m_2 = 20 kg
   iv) F = 278N og m_2 = 16,5 kg
e) Etter en tid har farten til objektene i oppgave b) i) økt, og luftmotstanden, L, har derfor blitt større. Nå måler vi summen av krefter til å være 50 N, hvor stor er L?

Oppgave 17

Konstantene (verdiene) for gravitasjon og luftmotstand som vi brukte i oppgave 16 gjelder kun for jorden. Andre planeter har ulik gravitasjonskraft og ulik luftmotstand. Noen planeter har faktisk ingen luftmotstand, mens andre planeter har en tykk atmosfære som vil bremse fallet (husk at luftmotstanden virker i motsatt retning av gravitasjonen).

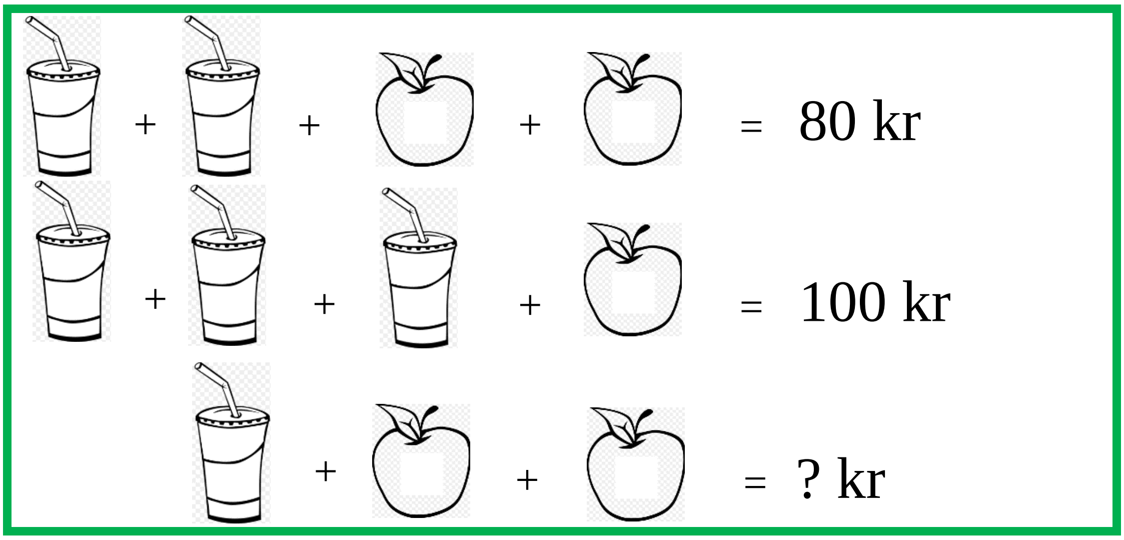
a) På neste side finner du en oversikt over alle planetene i solsystemet vårt. Regn ut gravitasjonskonstanten på alle planetene.

Planet	Bilde	Gravitasjon i forhold til jorden $g_{jorden} \approx 10\ m/s^2$	g_{planet}	L
Merkur		0,38		0
Venus		0,904		100
Mars		0,38		0,25
Jupiter		2,528		10
Saturn		1,065		10
Uranus		0,886		15
Neptun		1,14		15

b) Velg deg en planet du reiser til. Ikke si høyt hvilken du velger, da oppgaven for en annen elev er å regne seg frem til hvilken planet du har valgt.

Tenk deg at du slipper ut to objekter med massene $m_1 = 10$ kg og $m_2 = 5$ kg. Regn ut F på din planet når du bruker gravitasjonskonstanten og luftmotstanden for denne planeten.

c) Bytt svarene fra oppgave b) med andre elever. Klarer du å finne ut hvilken planet de har vært på?



2. Løse likninger

Et likhetstegn betyr ikke alltid helt det samme. $2x + 3x = 5x$ er riktig for *alle* verdier av x. Men $2x+3x=10$ er bare riktig hvis x er lik 2. Å finne den verdien av x som gjør at likhetstegnet er riktig, kaller vi å *løse* likningen.

Eksempel 3
Noen likninger kan vi løse med enkel hoderegning.

$3x = 6$ har løsningen $x = 2$ fordi $3\cdot 2=6$. Legg merke til at $x=\frac{6}{3}=2$.

Oppgave 18

Løs likningene.

a) $2x=8$ b) $6x=18$ c) $-3x=12$ d) $-3x=-12$ e) $4s=36$

Eksempel 4

I «praktiske» likninger er det ofte så «stygge» tall at vi må bruke kalkulator. Samme type likning som i eksempel 1 løses da slik:

$$6,28x = 20$$

$$x = \frac{20}{6,28} = 3,18$$

Oppgave 19

Løs likningene.

a) $0,25x = 10$ b) $4a = 22$ c) $2\pi r = 30$ (π er omtrent lik 3,14)

Eksempel 5

$x + 4 = 10$ er et eksempel på en annen type enkel likning. Du ser nok fort at løsningen er $x = 6$ fordi $6 + 4 = 10$. Hvis vi ikke ser løsningen med en gang, kan vi *trekke fra* 4 på begge sider av likningen. Løsningsmetoden blir da slik:

$$x + 4 = 10$$

$$x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$x = 6$$

Eksempel 6

Her er en liknende likning hvor vi *legger til* samme tall på begge sider av likhetstegnet:

$$x - 8 = 12$$

$$x - 8 + 8 = 12 + 8$$

$$x = 20$$

Eksempel 7

$2x - 3 = 5$ er en kombinasjon av de to likningstypene ovenfor. Vi løser den slik:

$$2x - 3 = 5$$

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Da $2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$ ser vi at vi har regnet riktig.

Oppgave 20

Løs likningene på samme måte som i eksempel 5.

a) $3x-4=11$ b) $-2x+6=12$

Du kan også få likninger med en brøk:

Eksempel 8

Mange vil se med en gang at likningen $\frac{x}{3}=2$ har løsningen x = 6. Hvis du ikke ser det, kan du løse den slik:

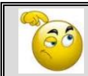
$$\frac{x}{3}=2$$
$$\frac{x}{3}\cdot 3=2\cdot 3$$
$$\frac{3x}{3}=6$$
$$x=6$$

Oppgave 21

Løs likningene slik som i eksempel 6.

a) $\frac{x}{4}=3$ b) $\frac{n}{6}=3$ c) $\frac{x}{100}=1{,}26$ d) $\frac{x}{1{,}14}=210$

Til slutt tar vi et eksempel hvor vi må bruke alle løsningsmetodene ovenfor.

 Eksempel 9

$$3x-1+\frac{x}{4}=x+8$$
$$3x-1+\frac{x}{4}+1=x+8+1$$
$$3x+\frac{x}{4}=x+9$$
$$3x+\frac{x}{4}-x=x+9-x$$
$$2x+\frac{x}{4}=9$$
$$2x\cdot 4+\frac{x}{4}\cdot 4=9\cdot 4$$
$$8x+x=36$$
$$9x=36$$
$$x=\frac{36}{9}$$
$$x=4$$

Hvis du ikke går i surr, kan du gjerne ta flere skritt på hver linje slik at ikke løsningen blir så lang. Du kan også bytte om på rekkefølgen av regneoperasjonene.

Oppgave 22

Løs likningene.

a) $x + \frac{2x}{3} = 10$ b) $\frac{x}{5} + 3 = 21 - x$

Potenslikning

x^2 og x^3 er eksempler på *potenser*..

Eksempel 10

Likningen under er en potenslikning. Den har *to* løsninger:

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16} = 4$ eller $x = -\sqrt{16} = -4$

Eksempel 11

$2x^2 = 40$

$x^2 = \frac{40}{2}$

$x^2 = 20$

$x = \sqrt{20} = 4{,}47$ eller $x = -\sqrt{20} = -4{,}47$

Eksempel 12

Likningen x^2 = -4 har *ingen* løsninger fordi det er umulig å få et negativt svar når vi multipliserer et tall med seg selv.

Eksempel 13

$x^3 = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{27}$ kaller vi “tredjeroten av 27” og er lik 3 fordi $3^3 = 27$. De fleste kalkulatorer har en egen tast for å regne ut tredjerot.

Oppgave 23

Løs likningene.

a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 50$ c) $4x^2 = 86$ d) $3{,}14x^2 = 40$ e) $x^2 = -9$ f) $x^3 = 8$

g) $5{,}67x^3 = 100$ h) $x^3 = -27$

Det kan hende at du får en potenslikning hvor eksponenten er større enn 3:

Eksempel 14

$$x^5 = 2$$

$$x = \sqrt[5]{2} = 1{,}149$$

Hvis kalkulatoren din ikke har en egen tast hvor du kan regne ut dette, kan du gjøre det slik: Å beregne 5. rot viser seg å være det samme som å opphøye i 1/5. Du kan altså bruke potenstasten og regne ut

$$2^{\frac{1}{5}} = 1{,}149$$

Oppgave 24

Løs likningene a) $x^4 = 3$ b) $500 \cdot x^{10} = 800$

Blandede oppgaver

B1

(Eksamen 1P vår 2014, Del 1)

Løs likningen $\dfrac{(x+4)\cdot 3}{2}=9$.

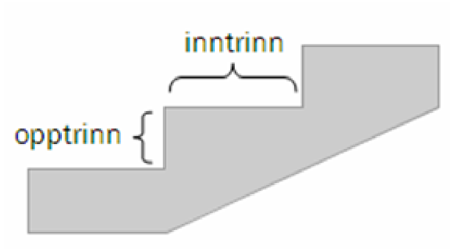
B2

(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

For at en trapp skal være behagelig å gå i, bør ett inntrinn pluss to opptrinn være omtrent 630 mm.

Hvor høyt bør opptrinnet i en trapp være dersom inntrinnet skal være 340 mm?

(Tips: Kan løses med likning. Kall opptrinnet for *x* og sett opp en likning.)



B3

Hvor stor må radien i en sirkel være for at arealet skal være 100 cm^2?

B4

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

En pose Maarud Proviant inneholder 150 g potetskiver.

Energiinnholdet i potetskivene er gitt på forsiden av posen som vist på bildet til høyre.

a) Torbjørn spiser hele posen. Hvor mange kcal får han i seg?

Formelen

$$E=(P+K)\cdot 4+F\cdot 9$$

viser energiinnholdet *E* kcal i mat som inneholder *P* gram proteiner, *K* gram karbohydrater og *F* gram fett.
Det er ca. 2 g proteiner og ca. 8 g fett i 30 g potetskiver.

b)  Bruk formelen ovenfor til å finne ut omtrent hvor mange gram karbohydrater det er i 30 g potetskiver.

B5

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2, litt endret)

Når babylonerne skulle finne kvadratroten av et tall T, fant de det kvadrattallet K som lå nærmest T, og brukte formelen:

$$\sqrt{T} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{K} + \frac{T}{\sqrt{K}}\right)$$

Eksempel

Vi skal finne $\sqrt{31}$.

36 er det kvadrattallet som er nærmest 31, og formelen gir oss:

$$\sqrt{31} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{36} + \frac{31}{\sqrt{36}}\right) = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{31}{6}\right) = \frac{67}{12} \approx \underline{\underline{5{,}58}}$$

Bruk denne formelen til å regne ut en tilnærmet verdi for $\sqrt{74}$.

B6

Den elektriske effekten P til en lyspære er den elektriske energien som omdannes til lys og varme på ett sekund. Den måles i W (watt). Hvis vi kjenner spenningen U over pæra, målt i V (volt), og strømmen I gjennom pæra, målt i A (ampere) kan vi regne ut effekten med formelen

$$P = UI$$

a) Regn ut effekten til pæra når $U = 230$ V og $I = 0{,}17$ A.

b) Hvor stor strøm går gjennom en 60 W pære når spenningen er 230 V?

B7

Kroppsmasseindeksen er gitt ved formelen $K = \dfrac{m}{h^2}$. Her er m kroppsmassen målt i kg, og h er høyden målt i m. Kroppsmasseindeksen bør helst ligge mellom 20 og 25. Regn ut største og minste gunstige kroppsvekt for en gutt som er 180 cm høy.

B8
(Eksamen 1P, høst 2015, del 1)

Formlene nedenfor kan brukes for å anslå hvor høyt et barn vil bli i voksen alder.

Gutt: (fars høyde + mors høyde) · 0,5 + 7 cm

Jente: (fars høyde + mors høyde) · 0,5 – 7 cm

Mors og fars høyde oppgis i centimeter.

En familie består av mor, far og barna Ola og Kari.

Mor er 160 cm høy, og far er 180 cm høy.

a) Hvor høye vil Ola og Kari bli i voksen alder ifølge formlene ovenfor?

En annen familie består av mor, far og sønnen Per, som nå er voksen. Far er 186 cm høy. Per er 189 cm høy.

b) Hvor høy er mor i denne familien ifølge den første formelen ovenfor?

B9
(Eksamen 1P, vår 2015, del 1)

En formel er gitt ved

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

a) Bestem s når $v_0 = 0$, $t = 8$ og $a = 10$

b) Bestem a når $v_0 = 20$, $t = 4$ og $s = 144$