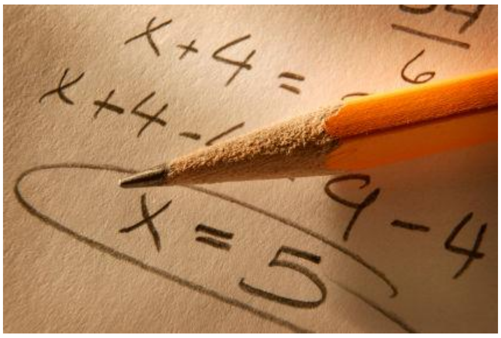
Kapittel 2. Algebra

Algebra kalles populært for “bokstavregning”.

Det er ikke mye algebra i Matematikk 2P-Y. Det viktigste er å kunne løse enkle *likninger* og regne med *formler*.



1. Forenkling av bokstavuttrykk

$2\cdot(3+4)$ er et *talluttrykk.* Vi kan regne ut *verdien* til uttrykket slik: $2\cdot(3+4)=2\cdot 7=14$. Men vi kan også regne det ut på en annen måte: $2\cdot(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4=6+8=14$. Den siste metoden kaller vi gjerne «å gange ut parentesen» .

Hvis vi bruker andre tall og regner ut lignende uttrykk på disse to måtene, ser vi at vi alltid får samme svar på begge måtene. Vi har oppdaget en *regneregel*. Det er tungvint å uttrykke denne regelen på vanlig norsk. Hvis vi bruker matematikkens bokstavspråk isteden, kan vi skrive regelen slik:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Her kan *a*, *b* og *c* bety hvilke som helst tall. Vi kaller dem for *variabler.* Høyre- og venstresiden kalles *bokstavuttrykk.* Hvis $a = 2$, $b = 3$ og $c = 4$ får vi samme regnestykket som i eksemplet ovenfor.

$2a$ er et eksempel på et svært enkelt bokstavuttrykk. Variabelen *a* kan også her bety et hvilket som helst tall. Vi sier ofte at *a* er et *symbol* for et tall. Uttrykket $2a$ betyr altså 2 multiplisert med et tall. Går det an å gjøre bokstavuttrykket $2a + 3a$ enklere? Da må vi først være klar over at i et bestemt uttrykk så må *samme bokstav ha samme verdi i hele uttrykket*. Vi regner ut uttrykket for to ulike verdier av *a* for å se om vi kan oppdage noe system:

$a = 2$: $\quad 2a+3a=2\cdot 2+3\cdot 2=4+6=10$

$a = 6$: $\quad 2a+3a=2\cdot 6+3\cdot 6=12+18=30$

Da $10=5\cdot 2$ og $30=5\cdot 6$, tyder dette på at vi kan forenkle bokstavuttrykket slik:

$$2a+3a=5a$$

Oppgave 1

Gjør disse uttrykkene enklere.

a) $3a+6a$ b) $2x+5x$ c) $y+3y$ d) $7b-2b$ e) $2y+5y-3y$

Hva med $2a+3b$? Fordi *a* og *b* ikke behøver å ha samme verdi, går det *ikke* an å forenkle dette uttrykket. Ikke prøv å være kreativ her!

Oppgave 2

Gjør disse uttrykkene enklere hvis det er mulig.

a) $3x+4y$ b) $2a+3b+4a$ c) $3x+4y+x-2y$

$3(x+2y)$ er et uttrykk som kan skrives om ved å bruke regelen $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$. Her må vi bytte ut *a* med 3, *b* med *x* og *c* med $2y$. Vi regner slik:

$$3(x+2y)=3\cdot x+3\cdot 2y=3x+6y$$

Oppgave 3

Skriv om uttrykkene ved å bruke regelen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

a) $2(5+3)$ b) $2(a+3)$ c) $2(b+c)$ d) $3(2a+4b)$ e) $x(3+4y)$ f) $x(2x-4)$

Her er tre uttrykk hvor vi må bruke *flere* regler for å forenkle:

$$2x + 3(x+1) + 4 = 2x + 3x + 3 + 4 = 5x + 7$$
$$3a + 4(b-2) - b + 2a + 3 = 3a + 4b - 8 - b + 2a + 3 = 3a + 2a + 4b - b - 8 + 3 = 5a + 3b - 5$$
$$x^2 + xy + 3x(x+2y) = x^2 + xy + 3x \cdot x + 3x \cdot 2y = x^2 + xy + 3x^2 + 6xy = 4x^2 + 7xy$$

Oppgave 4

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $2 \cdot 3 + 2(3+4)$ b) $2b + 2(b+4)$ c) $5(b-1) + 8$ d) $a(2+4) + 4a$

Hvis det står minus foran en parentes betyr det at tallet *a* i regelen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ er negativt, og vi må da *bytte fortegn når vi ganger ut parentesen*:

$$4x - 2(x-4) = 4x - 2x + 8 = 2x + 8$$
$$4a - (3a-1) = 4a - 3a + 1 = a + 1$$

Oppgave 5

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $6y - 3(y-2)$ b) $6x - (2x-3)$ c) $x^2 - 3x(x+y) - y(1-3x)$

2. Løse likninger

Et likhetstegn betyr ikke alltid helt det samme. $2x + 3x = 5x$ er riktig for *alle* verdier av *x*. Men $2x + 3x = 10$ er bare riktig hvis *x* er lik 2. Å finne den verdien av *x* som gjør at likhetstegnet er riktig, kaller vi å *løse* likningen.

<u>Eksempel 1</u>

Noen likninger kan vi løse med enkel hoderegning.

$3x = 6$ har løsningen $x = 2$ fordi $3 \cdot 2 = 6$. Legg merke til at $x = \frac{6}{3} = 2$.

Oppgave 6

Løs likningene.

a) $2x = 8$ b) $6x = 18$ c) $-3x = 12$ d) $-3x = -12$ e) $4s = 36$

Eksempel 2

I «praktiske» likninger er det ofte så «stygge» tall at vi må bruke kalkulator. Samme type likning som i eksempel 1 løses da slik:

$$6,28x = 20$$

$$x = \frac{20}{6,28} = 3,18$$

Oppgave 7

Løs likningene.

a) $0,25x = 10$ b) $4a = 22$ c) Finn r når: $2\pi r = 30$ (π er omtrent lik 3,14)

Eksempel 3

$x + 4 = 10$ er et eksempel på en annen type enkel likning. Du ser nok fort at løsningen er $x = 6$ fordi $6 + 4 = 10$. Hvis vi ikke ser løsningen med en gang, kan vi *trekke fra* 4 på begge sider av likningen. Løsningsmetoden blir da slik:

$$x + 4 = 10$$

$$x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$x = 6$$

Eksempel 4

Her er en liknende likning hvor vi *legger til* samme tall på begge sider av likhetstegnet:

$$x - 8 = 12$$

$$x - 8 + 8 = 12 + 8$$

$$x = 20$$

Oppgave 8

Løs likningene.

a) $x + 5 = 12$ b) $x - 3 = 4$ c) $x + 8 - 3 = 8$ d) $8 = x + 5$

Eksempel 5

$2x-3=5$ er en kombinasjon av de to likningstypene ovenfor. Vi løser den slik:

$$2x-3=5$$
$$2x-3+3=5+3$$
$$2x=8$$
$$x=\frac{8}{2}$$
$$x=4$$

Da $2\cdot 4-3=8-3=5$ ser vi at vi har regnet riktig.

Oppgave 9

Løs likningene på samme måte som i eksempel 5.

a) $3x-4=11$ b) $-2x+6=12$

Du kan også få likninger med en brøk:

Eksempel 6

Mange vil se med en gang at likningen $\frac{x}{3}=2$ har løsningen *x* = 6. Hvis du ikke ser det, kan du løse den slik:

$$\frac{x}{3}=2$$
$$\frac{x}{3}\cdot 3=2\cdot 3$$
$$\frac{3x}{3}=6$$
$$x=6$$

Oppgave 10

Løs likningene slik som i eksempel 6.

a) $\frac{x}{4}=3$ b) $\frac{n}{6}=3$ c) $\frac{x}{100}=1,26$ d) $\frac{x}{1,14}=210$

Til slutt tar vi et eksempel hvor vi må bruke alle løsningsmetodene ovenfor.

Eksempel 7

$$3x-1+\frac{x}{4}=x+8$$

$$3x-1+\frac{x}{4}+1=x+8+1$$

$$3x+\frac{x}{4}=x+9$$

$$3x+\frac{x}{4}-x=x+9-x$$

$$2x+\frac{x}{4}=9$$

$$2x\cdot 4+\frac{x}{4}\cdot 4=9\cdot 4$$

$$8x+x=36$$

$$9x=36$$

$$x=\frac{36}{9}$$

$$x=4$$

Hvis du ikke går i surr, kan du gjerne ta flere skritt på hver linje slik at ikke løsningen blir så lang. Du kan også bytte om på rekkefølgen av regneoperasjonene.

Oppgave 11

Løs likningene.

a) $x+\frac{2x}{3}=10$ b) $\frac{x}{5}+3=21-x$

Potenslikninger

^{2} og x^3 er eksempler på *potenser*. .

Eksempel 8

Likningen under er en potenslikning. Den har *to* løsninger:

$$x^2=16$$

$x=\sqrt{16}=4$ eller $x=-\sqrt{16}=-4$

Eksempel 9

$2x^2 = 40$

$x^2 = \frac{40}{2}$

$x^2 = 20$

$x = \sqrt{20} = 4,47$ eller $x = -\sqrt{20} = -4,47$

Eksempel 10

Likningen $x^2 = -4$ har *ingen* løsninger fordi det er umulig å få et negativt svar når vi multipliserer et tall med seg selv.

Eksempel 11

$x^3 = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{27}$ kaller vi "tredjeroten av 27" og er lik 3 fordi $3^3 = 27$. De fleste kalkulatorer har en egen tast for å regne ut tredjerot.

Oppgave 12

Løs likningene.

a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 50$ c) $4x^2 = 86$ d) $3,14x^2 = 40$ e) $x^2 = -9$ f) $x^3 = 8$
g) $5,67x^3 = 100$ h) $x^3 = -27$

Det kan hende at du får en potenslikning hvor eksponenten er større enn 3:

Eksempel 12

$x^5 = 2$

$x = \sqrt[5]{2} = 1,149$

Hvis kalkulatoren din ikke har en egen tast hvor du kan regne ut dette, kan du gjøre det slik: Å beregne 5. rot viser seg å være det samme som å opphøye i 1/5. Du kan altså bruke potenstasten og regne ut

$$2^{\frac{1}{5}} = 1,149$$

Oppgave 13

Løs likningene a) $x^4 = 3$ b) $500 \cdot x^{10} = 800$

Formelregning

3.1 Størrelser

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- radien til en sirkel (målenhet m)
- volumet av ei kule (målenhet m^3)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)
- energien i en matvare (målenhet joule)

3.2 Verdier

Det tallet som er knyttet til en størrelse, kaller vi *verdien* til størrelsen. For eksempel kan vekten av en eplepose ha verdien 1,45 kg, og temperaturen i kaffen ha verdien 65 grader.

3.3 Formler

Det går an å regne ut verdien til mange størrelser ved hjelp av en *regneoppskrift*. En slik oppskrift kaller vi en *formel*.
På venstre siden av formelen står navnet på den størrelsen vi vil regne ut, og på høyre siden står en eller flere andre størrelser, ofte sammen med faste tall.
Vi bruker nesten alltid bokstavsymboler på størrelsene slik at formelen blir kort og oversiktlig.

Eksempler på formler:

Prisen P for en pose epler som veier v kilo når kiloprisen er 24 kr: $P = 24v$

Arealet A av et rektangel med lengde l og bredde b: $A = l \cdot b$

Omkretsen o av en sirkel med radius r: $o = 2\pi r$

Kroppsmasseindeksen K til en person med høyde h (i meter) og masse m (i kilogram): $K = \dfrac{m}{h^2}$

3.4 Innsetting av tall i formler

Eksempel 13
Hva er arealet av et rektangel med lengde 4 cm og høyde 3 cm? Vi setter inn i formelen og regner ut verdien til arealet:

$$A = lb = 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 12\ \text{cm}^2$$

Eksempel 14
Hva er omkretsen av en sirkel med radius 0,7 m? Vi setter inn i formelen og regner ut:

$$o = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}7\ \text{m} = 4{,}20\ \text{m}$$

De fleste kalkulatorer har en egen tast for tallet pi (π). Bruk gjerne den. Det er raskere og mer nøyaktig enn å skrive 3,14.

Eksempel 15
Hva er volumet av ei kule med radius 10 cm? Vi setter inn i formelen:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10\ \text{cm})^3}{3} = 4190\ \text{cm}^3$$

Oppgave 14
Regn ut: a) omkretsen av en sirkel med radius 5,4 cm b) volumet av ei kule med radius 6 cm c) din egen kroppsmasseindeks

3.5 Omforming av formler

Eksempel 16

Et rektangel har lengde 6 cm og areal 24 cm^2. Hvor stor er da bredden?

Vi kan regne på to ganske like måter. Velg selv den du liker best.

Metode 1

Vi setter inn de oppgitte tallene i formelen for arealet og får da en likning med *b* som ukjent.

$$A = lb$$
$$24 = 6 \cdot b$$
$$b = \frac{24}{6}$$
$$b = 4 \text{ cm}$$

(I likninger pleier vi å sløyfe målenheter underveis.)

Metode 2

Her finner vi en *formel* for *b* og setter inn tallene i den.

$$A = l \cdot b$$
$$\frac{A}{l} = b$$
$$b = \frac{A}{l}$$
$$b = \frac{24 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 4 \text{ cm}$$

Oppgave 15

a) Omkretsen av en sirkel er 25 cm. Hvor stor er radien?

b) Volumet av en sylinder er gitt ved formelen $V = G \cdot h$. Hva er høyden *h* i en sylinder med grunnflate G = 50,27 cm^2 og volum V = 351,9 cm^3?

Blandede oppgaver

B1
(Eksamen 1P vår 2014, Del 1)

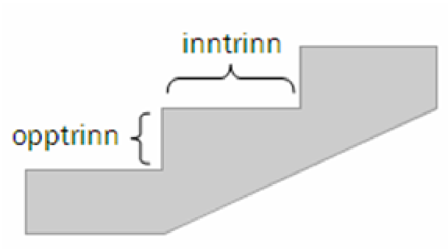
Løs likningen $\dfrac{(x+4)\cdot 3}{2}=9$.

B2
(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

For at en trapp skal være behagelig å gå i, bør ett inntrinn pluss to opptrinn være omtrent 630 mm.

Hvor høyt bør opptrinnet i en trapp være dersom inntrinnet skal være 340 mm?

(Tips: Kan løses med likning. Kall opptrinnet for *x* og sett opp en likning.)



B3
Hvor stor må radien i en sirkel være for at arealet skal være 100 cm^2?

B4
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

En pose Maarud Proviant inneholder 150 g potetskiver.

Energiinnholdet i potetskivene er gitt på forsiden av posen som vist på bildet til høyre.

a) Torbjørn spiser hele posen. Hvor mange kcal får han i seg?

Formelen

$$E=(P+K)\cdot 4+F\cdot 9$$

viser energiinnholdet *E* kcal i mat som inneholder *P* gram proteiner, *K* gram karbohydrater og *F* gram fett.
Det er ca. 2 g proteiner og ca. 8 g fett i 30 g potetskiver.

b)  Bruk formelen ovenfor til å finne ut omtrent hvor mange gram karbohydrater det er i 30 g potetskiver.

B5

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2, litt endret)

Når babylonerne skulle finne kvadratroten av et tall *T*, fant de det kvadrattallet *K* som lå nærmest *T*, og brukte formelen:

$$\sqrt{T} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{K} + \frac{T}{\sqrt{K}}\right)$$

Eksempel
Vi skal finne $\sqrt{31}$.
36 er det kvadrattallet som er nærmest 31, og formelen gir oss:

$$\sqrt{31} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{36} + \frac{31}{\sqrt{36}}\right) = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{31}{6}\right) = \frac{67}{12} \approx \underline{\underline{5,58}}$$

Bruk denne formelen til å regne ut en tilnærmet verdi for $\sqrt{74}$.

B6
Den elektriske effekten *P* til en lyspære er den elektriske energien som omdannes til lys og varme på ett sekund. Den måles i W (watt). Hvis vi kjenner spenningen *U* over pæra, målt i V (volt), og strømmen *I* gjennom pæra, målt i A (ampere) kan vi regne ut effekten med formelen

$$P = UI$$

a) Regn ut effekten til pæra når $U = 230$ V og $I = 0,17$ A.

b) Hvor stor strøm går gjennom en 60 W pære når spenningen er 230 V?

B7
Kroppsmasseindeksen er gitt ved formelen $K = \frac{m}{h^2}$. Her er *m* kroppsmassen målt i kg, og *h* er høyden målt i m. Kroppsmasseindeksen bør helst ligge mellom 20 og 25. Regn ut største og minste gunstige kroppsvekt for en gutt som er 180 cm høy.

Fasit

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1

a) $9a$ b) $7x$ c) $4y$ d) 5b e) 4y

Oppgave 2

a) kan ikke forenkles b) $6a + 3b$

$4x + 2y$

Oppgave 3

a) 16 b) 2a+6 c) $2b + 2c$

d) $6a + 12b$ e) $3x + 4xy$ f) $2x^2 - 4x$

Oppgave 4

a) 20 b) 4b+8 c) 5b+3 d) 10a

Oppgave 5

a) $3y + 6$ b) $4x + 3$ c) $-2x^2 - y$

Oppgave 6

a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = -4$ d) $x = 4$ e) $s = 9$

Oppgave 7

a) $x = 40$ b) $a = 5{,}5$ c) $r = 4{,}77$

Oppgave 8

a) $x = 7$ b) $x = 7$ c) $x = 3$

d) $x = 3$

Oppgave 9

a) $x = 5$ b) $x = -3$

Oppgave 10

a) $x = 12$ b) $n = 18$ c) $x = 126$

d) $x = 239{,}4$

Fasit blandede oppgaver

B1

$x = 2$

B2

145 mm

B3

5,64 cm

B4

a) 750 kcal b) 17,5 g

B5

8,61

B6

a) 39 W b) 3,83 A

B7

Mellom 65 og 81 kg

Oppgave 11

a) $x = 6$ b) $x = 15$

Oppgave 12

a) $x = 5$ eller $x = -5$

b) $x = 7{,}07$ eller $x = -7{,}07$

c) $x =4{,}64$ eller $x = -4{,}64$
d) $x = 3{,}57$ eller $x = -3{,}57$

e) ingen løsning f) $x = 2$ g) $x = 2{,}60$
h) $x = -3$

Oppgave 13

a) 1,316 b) 1,048

Oppgave 14

a) 33,9 cm b) 905 cm^3

Oppgave 15

a) 3,98 cm b) 7,0 cm