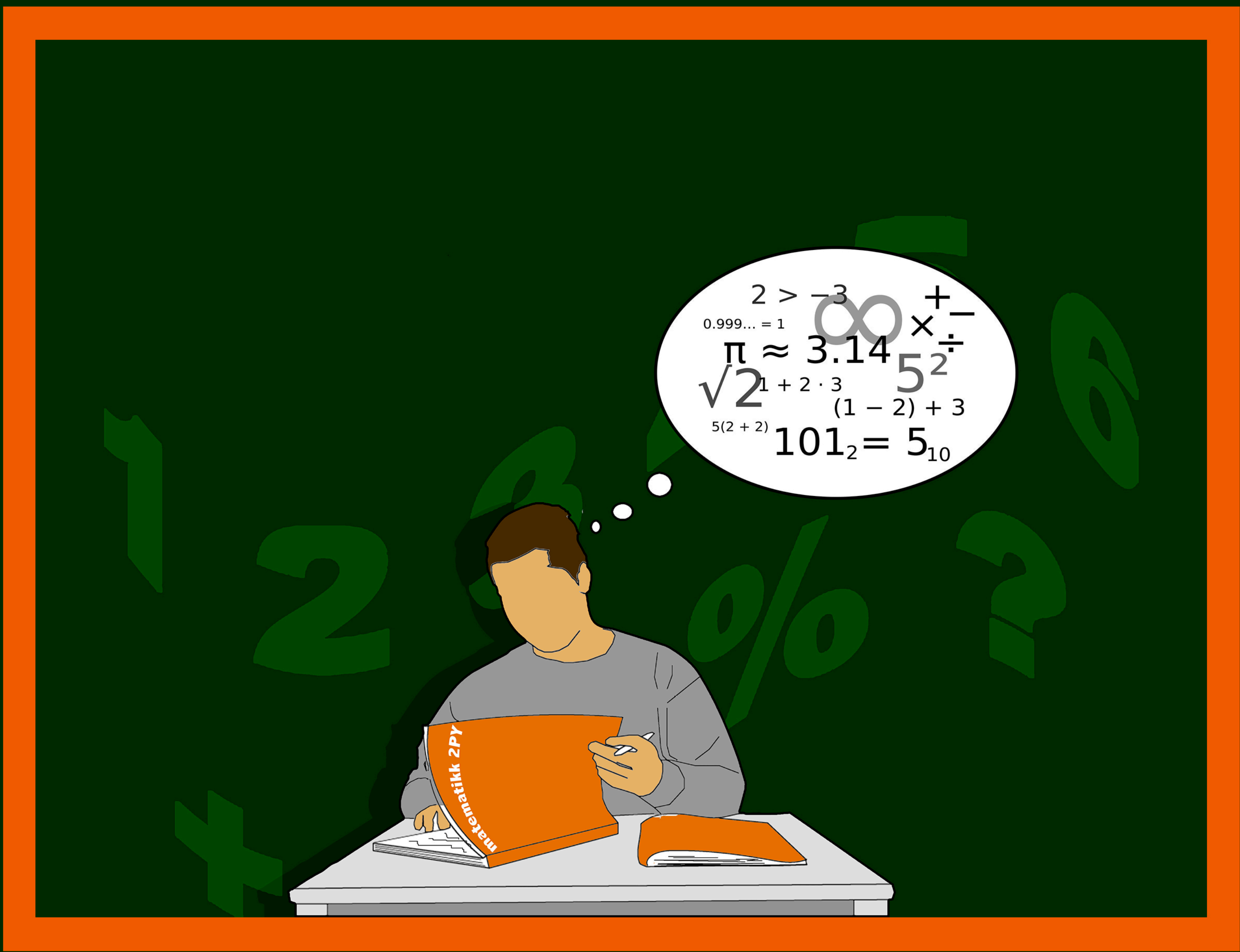
Matematikk 2P-Y



Hellerud videregående skole

Noen formler det er lurt å kunne...		
Standardform	$a = \pm k \cdot 10^n \quad 1 \leq k < 10$ og n er et helt tall	
Statistikk	Gjennomsnitt og median	
Lineære funksjoner	$y = ax + b$	
Eksponentielle funksjoner	$y = a \cdot b^x$	
Polynom funksjoner	$y = ax^2 + bx + c$ (andregradsfunksjon) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (tredjegradsfunksjon)	
Vekstfaktor	$1 + \frac{p}{100}$ $1 - \frac{p}{100}$	
Potenser	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ $a^0 = 1$ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

Forord

Denne boka dekker læreplanen i Matematikk 2P-Y. Stoffet og oppgavene er valgt ut med tanke på den type oppgaver som har vist seg å være ganske vanlige til eksamen i 2P-Y.

Teorien er ganske kortfattet og er avbrutt av mange eksempler. Disse bør du studere nøye. Like etter et eksempel kommer som regel en eller flere øvingsoppgaver hvor du trenger den teorien som er brukt i dette eksemplet.

Til slutt i de fleste kapitlene er det eksamensoppgaver som kan løses hvis du behersker stoffet i dette og tidligere kapitler. Det er fasit på oppgavene helt til slutt i kapitlet.

Noe av teoristoffet og noen av oppgavene er merket med en “tenke-smiley”:  .

Dette stoffet vil kanskje mange synes er spesielt vanskelig. Hvis du vil ha karakter 3 eller bedre, må du også kunne løse en del oppgaver av en slik vanskegrad.

Forord til 3. utgave:

I tillegg til normalt vedlikehold (oppdatering av teori og oppgaver) har vi satt inn et stikkordregister for de vanligste matematiske begrepene.

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole
Juni 2016

Forsidebildet er laget av Joseph Moyo Zozimo, elev ved 1MK, Hellerud vgs skoleåret 2015/16

Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?

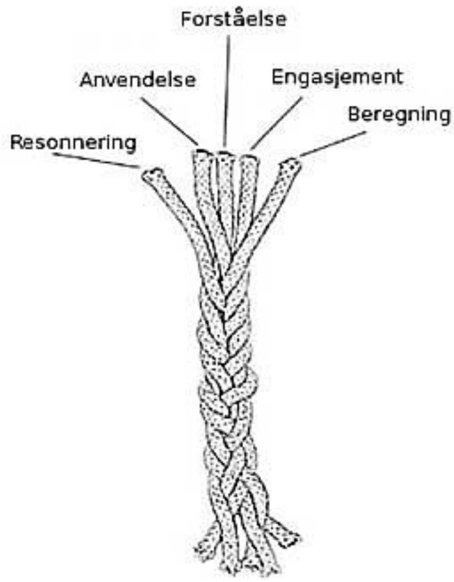
1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner

2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk



Figur 1: Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

(Kilde: http://www.matematikksenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk)

Jo Boaler's 7 bud

1. **Alle kan lære matematikk på høyeste nivå.**
   - Det er ikke sånn at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

2. **Å gjøre feil er verdifullt**
   - Feil gjør at hjernen din vokser.
     Det er bra å streve og gjøre feil

3. **Å stille spørsmål er viktig**
   - Spør om det du lurer på, og svar på andre sine spørsmål.
     Spør deg selv: Hvorfor er dette riktig?

4. **Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**
   - Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre

5. **Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**
   - I matematikk kan det samme sies på ulike måter, f.eks. ord, bilde, graf, funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

6. **Matematikktimene handler om å lære, ikke prestere**
   - Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats

7. **Det er viktigere å tenke grundig enn fort.**
   - Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

Innhold

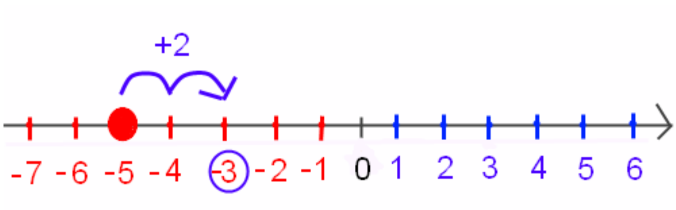
Kapittel 1. Tallregning

Regning med tall er grunnlaget for mer avansert matematikk.

I dette kapitlet repeteres følgende fra grunnskolen:

- Brøkregning
- Desimaltall
- Regning med positive og negative tall
- Potenser
- Kvadratrot
- Regning med positive og negative tall
- Praktiske eksempler på divisjon

Større prøver inneholder oppgaver hvor du *ikke* kan bruke kalkulator. Da er det viktig at du kan regne med enkle tall i hodet eller på papir.



1. Brøk

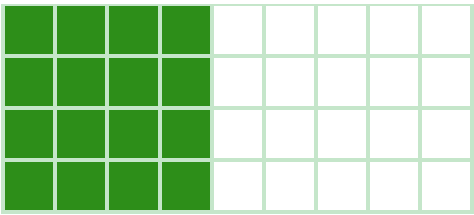
1.1 Hva *er* brøk?

En stor kake er delt i 36 like store biter. De hvite firkantene viser de bitene som er spist opp:

Hver bit kalles en 36-del av kaken. Du kan telle på tegningen at 12 av 36 slike biter er spist.

Hvor stor del av kaken som er spist skriver vi som *brøken* $\frac{12}{36}$.

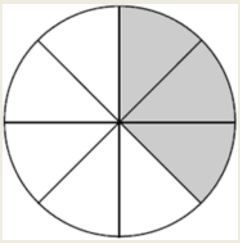
Tallet over brøkstreken kaller vi *telleren*, og tallet under brøkstreken kaller vi *nevneren* i brøken.



Senere er det spist 8 kakestykker til (de røde på den øverste figuren), til sammen 20 av 36 kakestykker. Dette kan vi skrive som regnestykket $\frac{12}{36}+\frac{8}{36}=\frac{20}{36}$.

Oppgave 1

En kake er delt i like store biter slik figuren viser. De hvite feltene markerer de bitene som er spist.



a) Hvor stor del av kaken er spist?

b) Hvor stor del av kaken er igjen?

Skriv begge svarene som brøker.

1.2 Forkorting av brøk

Mange brøker kan *forkortes*. Det gjør vi ved å dividere (dele) teller og nevner med *samme* tall.
Her er brøken fra kakeeksemplet på forrige side.

Eksempel 1

$$\frac{20:2}{36:2}=\frac{10}{18}$$
$$\frac{10:2}{18:2}=\frac{5}{9}$$

Nå er det ikke mulig å dele videre så brøken er forkortet så langt det går an. Vi har spist $\frac{5}{9}$ av kaken.

Oppgave 2

Forkort brøkene $\frac{6}{8}$ og $\frac{15}{25}$.

1.3 Utviding av brøk

Det motsatte av forkorting kalles *utviding*. Da *multipliserer* (ganger) vi teller og nevner med *samme* tall.

Eksempel 2

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}$$

Oppgave 3

Utvid brøken $\frac{3}{4}$ med 3.

Hvis vi skal *sammenligne* brøker, må vi sørge for at alle nevnerne er like:

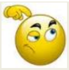
Eksempel 3

Ordne brøkene $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ og $\frac{3}{4}$ i stigende rekkefølge. Det betyr at den minste skal stå først.

Minste felles nevner blir her $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Vi utvider brøkene slik at nevneren i alle blir 60:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{40}{60}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{48}{60}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{45}{60}$$

Brøkene i stigende rekkefølge er $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

Oppgave 4 

Skriv disse brøkene i stigende rekkefølge ved å utvide dem til felles nevner: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}$

1.4 Addisjon av brøker

For å kunne legge sammen brøker, må brøkene bestå av like store "biter". De må altså ha *samme* nevner. Du så et eksempel på det i avsnitt 1.1 da vi la sammen kakestykker. Hvis nevnerne er like, legger vi sammen tellerne.

Eksempel 4

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$$

Hvis nevnerne *ikke* er like, må vi utvide den ene eller begge brøkene slik at de får samme nevner (felles nevner).

Eksempel 5

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

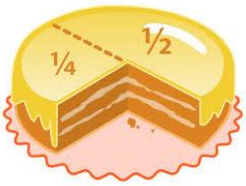
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Oppgave 5

a) Legg sammen $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$

b) Legg sammen $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

c) Legg sammen $\frac{5}{3}+\frac{3}{4}$



1.5 Brøkdel av et tall

Eksempel 6

Brødet til høyre er delt i 20 skiver.

$\frac{2}{5}$ av skivene har mugnet.

Hvor mange skiver har mugnet?

Vi regner slik:

$$20\cdot\frac{2}{5}=\frac{20\cdot 2}{5}=\frac{40}{5}=8$$

Vi kan sjekke svaret ved å finne ut om 8 av 20 skiver virkelig er 2/5 av skivene:

$$\frac{8}{20}=\frac{8:4}{20:4}=\frac{2}{5}$$

Det stemmer.

Oppgave 6

En klasse har 28 elever. $\frac{2}{7}$ av elevene fikk bedre enn 3 på en matematikkprøve. Hvor mange elever fikk bedre enn 3?

1.6 Multiplikasjon av brøk

Du kan forstå framgangsmåten ved å se på de to eksemplene under.

Eksempel 7

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{6}{28} = \frac{6:2}{28:2} = \frac{3}{14}$$

Oppgave 7

Regn ut $4 \cdot \frac{2}{3}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$.

2. Desimaltall

2.1 Hva *er* et desimaltall?

Desimaltall er tall som inneholder komma. Vi repeterer først hva et *heltall* med flere siffer *egentlig* betyr.

Tallet 463 betyr $4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$, altså summen av 4 hundreder, 6 tiere og 3 enere.

På liknende måte betyr 0,26 summen av 2 *tideler* og 6 *hundredeler*. Altså $0,26 = \frac{2}{10} + \frac{6}{100}$.

Vi kan gjøre om tidelene til hundredeler slik at $0,26 = \frac{2}{10} + \frac{6}{100} = \frac{20}{100} + \frac{6}{100} = \frac{26}{100}$.

<u>Eksempel 8</u>

Tallet 6805, 304 betyr egentlig $6 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$.

Oppgave 8

a) Hva betyr egentlig tallet 7068,057?

b) Skriv $3 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$ som desimaltall.

Hundredeler kalles også *prosent*. Prosenttegnet (%) betyr altså hundredeler. Da kan vi skrive samme tallet på tre måter, slik:

$$0,26 = \frac{26}{100} = 26\% .$$

Oppgave 9

Skriv tallene 0,75, 0, 60 og 0,05 på to andre måter.

Vær klar over at 0,6 og 0,60 er samme tallet!

2.2 Store tall

Disse tallene må du kjenne ved *navn*:

1 million: 1000 000 (6 nuller)
1 milliard: 1000 000 000 (9 nuller)

Amerikanerne kaller milliard for "billion". På norsk er 1 billion et ett-tall med *12* nuller bak.

3. Brøker som desimaltall

Det er ikke bare tideler, hundredeler, tusendeler osv. som kan skrives som desimaltall. *Alle* brøker kan skrives på denne måten. Noen brøker er ganske enkle å skrive om hvis vi kan litt hoderegning.

Eksempel 9

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Oppgave 10

Gjør om disse brøkene til desimaltall: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$.

Du bør lære deg disse sammenhengene:

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\%$$

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,667 = 66,7\%$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

Tegnet $\approx$ betyr “omtrent lik” eller “tilnærmet lik”.

4. Addisjon av hele tall

Å *addere* to tall betyr å legge dem sammen. Vi sier sa at vi finner summen av tallene. Vi forutsetter at du er sikker på å legge sammen ensifrede tall, slik at du for eksempel med en gang kan si at 7 + 8 = 15. Hvis du ikke er god på dette, bør du trene, ellers vil det være noen del 1-oppgaver (dvs. uten kalkulator) som du ikke vil få helt til. Det finnes mange apper til mobilen som lar deg trene på hoderegning.

Hvis du skal legge sammen *tosifrede* tall i hodet, adderer du først tierne, så enerne, og til slutt finner du summen av tierne og enerne.

Eksempel 10
Hvor mye er 34 + 25? Ikke bruk kalkulator.

30 + 20 = 50, 4 +5 = 9. Altså er 34 + 25 = 59.

Oppgave 11
Hvor mye er 45 + 32? 18 + 61? 34 + 58? 120 + 240? 1450 + 320? Sjekk hoderegningen din med kalkulator hvis du er usikker på om du har regnet riktig.

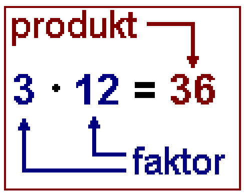
5. Subtraksjon av hele tall

Å *subtrahere* to tall betyr å trekke det andre tallet fra det første. Vi finner da *differensen* mellom tallene. Dette blir det samme som omvendt addisjon. For eksempel er 13 – 8 = 5 fordi 5 + 8 = 13. Subtraksjon av små eller "greie" tall bør du også kunne greie uten kalkulator.

Oppgave 12
Regn ut uten kalkulator. 9 – 5, 16 – 7, 23 – 8, 45 – 15, 45 – 17, 100 – 4, 100 – 16, 1200 – 350.

6. Multiplikasjon av hele tall

Multiplikasjon kaller vi også ganging. Tallene som multipliseres med hverandre, kalles *faktorer* i regnestykket. Resultatet av en multiplikasjon kalles et *produkt*.



Multiplikasjon av hele tall er det samme som gjentatte addisjoner. $4\cdot 3$ betyr 4 + 4 + 4, som blir 12. $3\cdot 4$ betyr 3 + 3 + 3 +3, som også blir 12. Når vi multipliserer to tall, spiller det altså ingen rolle hvilket tall vi skriver først.

Nedenfor ser du "den lille multiplikasjonstabellen". Den gir svaret på alle multiplikasjoner fra $1 \cdot 1$ opp til $10 \cdot 10$. Denne bør du absolutt kunne! Fordi $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$ osv. trenger du egentlig ikke å kunne hele tabellen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Den lille multiplikasjonstabellen

Ofte har du bruk for å multiplisere med 10, 100 eller 1000 uten kalkulator. Her er eksempler som viser hvordan du gjør det.

$18 \cdot 10 = 180$

$24,6 \cdot 10 = 246$

$32 \cdot 100 = 3200$

$6,7 \cdot 100 = 670$

$57 \cdot 1000 = 57000$

$74,5 \cdot 1000 = 74500$

Oppgave 13

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$36 \cdot 10, \quad 8,4 \cdot 10, \quad 60 \cdot 100, \quad 63,4 \cdot 100, \quad 25 \cdot 1000, \quad 84,6 \cdot 1000$

Hvis du kan multiplikasjonstabellen, bør du også kunne utføre multiplikasjoner som ligner på disse:

$30 \cdot 4 = 120$

$50 \cdot 30 = 1500$

$70 \cdot 80 = 5600$

$600 \cdot 3 = 1800$

$400 \cdot 50 = 20000$

$200 \cdot 800 = 160000$

Oppgave 14

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$20 \cdot 7$

$60 \cdot 60$

$90 \cdot 80$

$300 \cdot 8$

$500 \cdot 60$

$300 \cdot 700$

Her er et eksempel på hvordan du kan utføre mer kompliserte multiplikasjoner uten kalkulator.

Vi skal ta $45 \cdot 6$. Vi må huske at 45 = 40 +5. Da kan vi gange på følgende måte:

	40	5	SUM
6	240	30	240 + 30 = 270

Vi skal ta $15 \cdot 23$. $15 = 10 + 5$ og $23 = 20 + 3$

	10	5	SUM
20	200	100	200+100=300
3	30	15	30 + 15 = 45

Totalt får vi da 300 + 45 = 345

Oppgave 15

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$12 \cdot 2$, $5 \cdot 31$, $6 \cdot 43$, $8 \cdot 55$, $12 \cdot 12$, $15 \cdot 38$

7. Divisjon av hele tall

Divisjon, også kalt deling, er den motsatte operasjonen av multiplikasjon. For å kunne dividere små hele tall i hodet, må vi kunne multiplikasjonstabellen.
Divisjon skriver vi for eksempel slik, 27 : 9, og vi leser det som “27 delt med 9” eller “27 dividert med 9”.

Hvis det er hele tall som skal divideres, kan vi også skrive divisjonsstykket som en brøk: $\frac{27}{9}$.

Eksempel 11

63 : 7 = 9 fordi $9 \cdot 7 = 63$

1200 : 10 = 120 fordi $120 \cdot 10 = 1200$

Oppgave 16

Utfør disse divisjonene uten kalkulator:
12 : 2, 18 : 3, 25 : 5, 36 : 9, 49 : 7, 56 : 8, 63 : 9, 72 : 9, 81 : 9

I praksis er en brøk et divisjonsstykke hvor vi ikke utfører divisjonen. Det betyr at $\frac{3}{5}$ og 3 : 5 er samme tallet (0,6). Brøker med litt “stygge” tall kan vi regne om til desimaltall ved å dividere teller med nevner på kalkulatoren.

Eksempel 12

$\frac{9}{17} = 9 : 17 \approx 0,529$

Ofte har du bruk for å dividere med 10, 100 eller 1000 uten kalkulator. Her er noen eksempler som viser hvordan det gjøres.

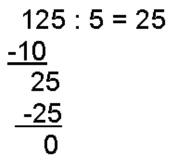
$$
\begin{aligned}
&60 : 10 = 6 \\
&60 : 100 = 0,6 \\
&60 : 1000 = 0,06 \\
&76 : 10 = 7,6 \\
&76 : 100 = 0,76 \\
&120 : 100 = 1,20 \\
&104,5 : 100 = 1,045 \\
&6500 : 10 = 650 \\
&75000 : 1000 = 75 \\
&4 : 10 = 0,4 \\
&6,5 : 100 = 0,065
\end{aligned}
$$

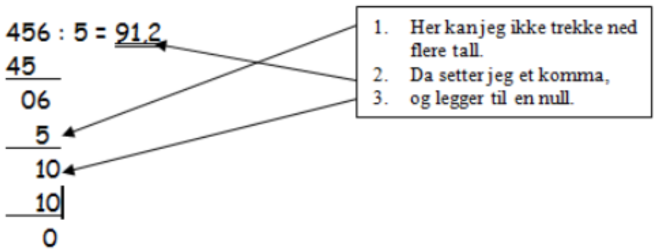
Oppgave 17

Utfør divisjonene uten kalkulator. Er du usikker kan du sjekke svarene dine på kalkulator.

30:10, 30:100, 46:10, 46:100, 115:10, 115:100, 250:1000, 7:10, 7:100, 12,5:10, 8,5:100

Her er tre eksempler som viser hvordan du kan utføre mer kompliserte divisjoner uten kalkulator.





8. Praktisk tolkning av divisjon

Med ordet *størrelse* mener vi i matematikk noe som kan telles eller måles. De fleste størrelser har en *målenhet*. Enkle eksempler på størrelser er antall elever i en klasse, vekten av en pose epler, lengden av en kjøretur og temperaturen i en kaffekopp.

Svært ofte dividerer vi to størrelser med hverandre. Da får vi en ny størrelse, og det er viktig å forstå den praktiske tolkningen av denne størrelsen. *I regningen tar vi med målenheter både i regnestykket og svaret.* Ofte skriver vi regnestykket som en brøk fordi det ser mer oversiktlig ut enn å bruke divisjonstegn.

Eksempel 13

En pose med 1,5 kg epler koster 34,50 kr. Hva er prisen for *en* kg epler ("kiloprisen")?

Kiloprisen blir $\dfrac{34,50 \text{ kr}}{1,5 \text{ kg}} = 23,00 \text{ kr/kg}$. Legg merke til at vi ofte skriver kr/kg istedenfor $\dfrac{\text{kr}}{\text{kg}}$.

Vi leser det "kroner per kilogram".

Eksempel 14

En pose med 1,5 kg epler koster 34,50 kr. Divider antall kg med prisen og tolk svaret.

$\dfrac{1,5 \text{ kg}}{34,50 \text{ kr}} = 0,043 \text{ kg/kr}.$ Dette viser at du får kjøpt 0,043 kg epler for *en* krone.

Eksempel 15

Du har malt et rom hvor veggene har et samlet areal på 40 m^2. Det gikk med 5 liter (L) maling. Divider malingsforbruket med arealet og tolk svaret.

$\dfrac{5 \text{ L}}{40 \text{ m}^2} = 0,125 \text{ L/m}^2$. Dette viser at det gikk med 0,125 L maling for å male *en* kvadratmeter.

Eksempel 16

Du har malt et rom hvor veggene har et samlet areal på 40 m^2. Det gikk med 5 liter (L) maling. Divider arealet med malingsforbruket og tolk svaret.

$\dfrac{40 \text{ m}^2}{5 \text{ L}} = 8 \text{ m}^2 / \text{L}$. Dette viser at med *en* liter maling kunne du ha malt 8 m^2 vegg.

Oppgave 18

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Regn ut hvor mye 1 L jord veier. Husk å ta med målenhetene i regnestykket.

Oppgave 19

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Divider volumet med vekten og tolk svaret.

Oppgave 20

Du har kjøpt 7,4 hg (hektogram = 100 g) smågodt for 51,06 kr. Regn ut hektoprisen for smågodt.

Oppgave 21

Du har kjøpt 7,4 hg smågodt for 51,06 kr. Divider mengden smågodt med prisen og tolk svaret.

Oppgave 22

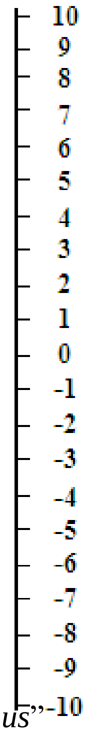
Temperaturen i en kopp med kaffe synker fra 90 grader til 70 grader på 10 min. Regn ut hvor mye temperaturen synker på ett minutt.

Oppgave 23

Temperaturen i en kopp med kaffe synker fra 90 grader til 70 grader på 10 min. Divider tiden med temperaturforandringen og tolk svaret.

9. Negative tall

Når vi adderer (+) tall eller subtraherer (-) tall, beveger vi oss opp og ned på tallinja. Vi beveger oss oppover på tallinja ved addisjon (+) og nedover ved subtraksjon (-). Ofte kan det være lurt å tenke på tallinja som gradestokken i et termometer.



Eksempel 17

(-3) + 6 = 3

Vi starter på -3 på tallinja og beveger oss 6 plasser oppover, fordi det er addisjon. Legg merke til at vi ofte skriver parenteser rundt negative tall som står først i et regnestykke.

Eksempel 18

$4 - 6 = -2$
Vi starter på 4 på tallinja og beveger oss 6 nedover, fordi det er subtraksjon

Noen kalkulatorer skiller mellom *fortegnsminus* (her skrevet som -) og "*trekke-fra minus*" (her skrevet som $-$). Da må du passe på å bruke riktig tegn!

Av og til skal vi trekke fra et *negativ* tall. Da må vi passe ekstra godt på! Å trekke fra et negativt tall blir nemlig det samme som å legge til et positivt tall. Dette får du bruk for i potensregningen i 2P.

Eksempel 19

4 – (-3) = 4 + 3 = 7

-2 – (-5) = -2 + 5 = 3

Oppgave 24

a) 7 – 4 =
b) (-5) + 4 =
c) 6 – 9 =
d) (-4) + 6 =
e) (-2) – 7 =
f) (-5) + 3 =
g) 6 – (-2) =
h) -4 – (-3) =

Ved multiplikasjon ($\cdot$) eller divisjon (:) av to tall gir like fortegn positivt svar og ulike fortegn gir negativt svar.

Eksempel 20

$(-4)\cdot 3 = -12$

$\frac{-4}{-2} = 2$

$(-4)\cdot(-2)\cdot(-1) = 8\cdot(-1) = -8$

Legg merke til at vi skriver parenteser rundt et negativt tall i et regnestykke for å unngå at to regnetegn eller fortegn blir stående like etter hverandre.

Oppgave 25

$\frac{27}{-9} =$

$(-7)\cdot(-3) =$

$\frac{-9}{-3} =$

$4\cdot(-8) =$

$(-4)\cdot(-2)\cdot(-6) =$

$(-3)\cdot 8\cdot(-1)\cdot 2 =$

10. Potenser

Ofte har vi bruk for å multiplisere samme tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik eksemplene under viser.

Eksempel 21

$3\cdot 3 = 3^2$

$x\cdot x = x^2$

$4\cdot 4\cdot 4 = 4^3$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*. I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten.*

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2, som betyr $3\cdot 3$ og er lik 9, med $3\cdot 2$, som er lik 6!!

Oppgave 26

Regn ut potensene uten kalkulator:

3^2, 2^3, 5^2, $(-4)^2$

Oppgave 27

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$2{,}5^2$, 12^3

11. Kvadratrot

Kvadratroten av et tall skriver vi med symbolet $\sqrt{\ }$.

Eksempel 22

$\sqrt{9} = 3$ fordi $3^2 = 9$

$\sqrt{100} = 10$ fordi $10^2 = 100$

$\sqrt{50} \approx 7{,}071$ fordi $7{,}071^2 \approx 50$

Oppgave 28

Regn ut uten å bruke kalkulator:

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{10000}$,

Oppgave 29

Finn ut hvordan du beregner kvadratrot på kalkulatoren og regn ut:

$\sqrt{30}$, $\sqrt{600}$, $\sqrt{1000}$

12. Regnerekkefølgen

I regnestykker hvor vi skal utføre flere forskjellige typer regneoperasjoner, må vi utføre regneoperasjonene i en *bestemt rekkefølge*.

Regneoperasjonenes rekkefølge

1. Parenteser (hvis det er noen)
2. Potenser
3. Multiplikasjon ($\cdot$) og divisjon (:)
4. Addisjon (+) og subtraksjon (-)

Eksempel 23

$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$ (nei, det blir *ikke* 20!)

Eksempel 24

$3\cdot(4-2)+3\cdot 3=3\cdot 2+3\cdot 3=6+9=15$

Eksempel 25

$2\cdot 3^2=2\cdot 9=18$

Oppgave 30

Regn ut

$3+5\cdot 4$

$3\cdot 2^2$

$4\cdot(2+6)-2\cdot 3$

Blandede oppgaver

B1

Regn ut og skriv svaret som en brøk. Forkort svaret hvis det er mulig.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{9}-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$

g) $3\cdot\frac{4}{7}$ h) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$ i) $\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}$ j) $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$

B2

Skriv disse brøkene som desimaltall:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{45}{100}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{5}{11}$

B3

Regn ut uten kalkulator.

a) $7\cdot 3$ b) $8\cdot 7$ c) $50\cdot 6$ d) $35\cdot 4$ e) $250\cdot 8$ f) $56\cdot 10$ g) $0,58\cdot 10$ h) $0,24\cdot 100$

B4

Regn ut uten kalkulator.

a) 24 : 6 b) 28 : 2 c) 64 : 8 d) 50 : 2 e) 60 : 10 f) 75 : 10 g) 115 : 100
h) 4 : 8 i) 3 : 5 j) 3,6 : 4 k) 3 : 0,5

B5

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

a) $63\cdot 5$ b) $274\cdot 6$ c) $2543\cdot 8$

B6

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

a) $71\cdot 23$ b) $548\cdot 63$ c) $474\cdot 557$

B7

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

a) $12,3\cdot 0,3$
b) $2,5\cdot 0,35$
c) 1 kg druer koster 23,90 kr. Hvor mye koster 2,5 kg?

B8

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

a) $855:5$
b) $1536:16$
c) $14388:22$

B9

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren. **(**Husk å sette komma i svaret når du begynner å flytte ned tall bak kommaet.)

a) $63:5$
b) $79:8$
c) $175:4$

B10

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren. (Multipliser begge tallene med 10 eller 100 for å få bort kommaet i tallet vi deler med.)

a) $15:2{,}5$
b) $90:3{,}6$
c) $448{,}9:3{,}35$

B11

a) En bil brukte 40 L bensin på å kjøre 620 km (som er lik 62 mil). Hvor mye bensin brukte bilen per mil? Husk å ta med målenheter i regnestykket og svaret.
b) Divider kjørelengden i mil med bensinforbruket og gi en praktisk tolkning av svaret.

B12

Regn ut.

a) $5 - 3$ b) $5 - 5$ c) $5 - 7$ d) $-4 + 6$ e) $-4 + 2$ f) $-4 - 3$ g) $4 - (-3)$ h) $-2 - (-5)$

B13

Regn ut.

$(-3)\cdot 4$ b) $(-3)\cdot(-4)$ c) $3\cdot(-4)$ d) $\frac{-8}{2}$ e) $\frac{10}{-5}$ f) $\frac{-12}{-4}$

B14

Regn ut uten kalkulator.

a) 1^2 b) 7^2 c) 9^2 d) 100^2 e) $(-4)^2$ f) -4^2

B15
(Eksamen høsten 2010, Del 2)

Byens beste bilpakke – Pakkepris: 16 900 kroner

Pakken består av:

- 13 kjøretimer
- sikkerhetskurs på bane
- sikkerhetskurs på vei
- 2 veiledningstimer
- leie av bil på 1 førerprøve

Kjøretimer utover pakken koster 550 kroner per time.

På nettsidene til en trafikkskole fant Anne og Jon tilbudet ovenfor. Begge benyttet seg av tilbudet.

a) Anne hadde til sammen 21 kjøretimer. Hvor mye betalte hun for kjøreopplæringen?

b) Jon betalte 29 000 kroner for kjøreopplæringen. Hvor mange kjøretimer hadde han?

B16
Regn ut med kalkulator.

a) $1{,}5^2$ b) $2{,}5^2$ c) $(-6{,}5)^2$

B17
Regn ut uten kalkulator.

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt{900}$ d) $\sqrt{1000\,000}$ e) $\sqrt{5{,}6^2}$ f) $\left(\sqrt{8}\right)^2$

B18
Regn ut med kalkulator.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt{45{,}6}$

B19
Regn ut uten å bruke kalkulator.

a) $4+3\cdot 2$ b) $2\cdot 3^2$ c) $2\cdot(15-3\cdot 2^2)+6$

Fasit

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{8}$

Oppgave 2Oppgave

$\frac{3}{4}, \quad \frac{3}{5}$

Oppgave 3

$\frac{9}{12} \left(=\frac{3}{4}\right)$

Oppgave 4

$\frac{3}{4}=\frac{30}{70}, \quad \frac{1}{2}=\frac{35}{70}, \quad \frac{3}{5}=\frac{42}{70}$

Oppgave 5

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{29}{12}$

Oppgave 6

8

Oppgave 7

$\frac{8}{3}, \ \frac{6}{35}, \ \frac{30}{15}=2$

Oppgave 8

a)

$$7\cdot 1000+0\cdot 100+6\cdot 10+8+\frac{0}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}$$

3,531

Oppgave 9

$0,75=\frac{75}{100}=75\%, \quad 0,60=\frac{60}{100}=60\%, \quad 0,05=\frac{5}{100}=5\%$

Oppgave 10

$\frac{3}{4}=0,75, \quad \frac{1}{5}=0,2$

Oppgave 11

77 99 92 360 1770

Oppgave 12

2 9 15 30 28 96 84 850

Oppgave 13

360 84 6000 6340 25000 84600

Oppgave 14

140 360 720 2400 3000 210000

Oppgave 15

24 155 258 440 144 570

Oppgave 16

6 6 5 4 7 7 7 8 9

Oppgave 17

3 0,3 4,6 0,46 11,5 1,15 0,250
0,7 0,07 1,25 0,085

Oppgave 18

0,72 kg/L

Oppgave 19

1,39 L/kg. Volumet til en liter jord.

Oppgave 20

6,90 kr/kg

Oppgave 21

0,145 hg/kr. Hvor mange hg smågodt du får for 1 kr.

Oppgave 22

2 grader/min

Oppgave 23

0,5 min/grad. Tiden det tar for temperaturen å synke 1 grad.

Oppgave 24

a) 3 b) -1 c) -3 d) 2 e) -9 f) -2 g) 8 h) -1

Oppgave 25

-3 21 3 -32 -48 48

Oppgave 26

9 8 25 16

Oppgave 27

6,25 1728

Oppgave 28

1 2 4 5 6 7 8 9 20 100

Oppgave 29

5,48 24,49 31,62

Oppgave 30

23 12 26

Fasit blandede oppgaver

B1

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{17}{21}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{12}$ e) $\frac{1}{18}$

f) $\frac{19}{20}$ g) $\frac{12}{7}$ h) $\frac{1}{6}$ i) $\frac{3}{2}$ j) $\frac{1}{10}$

B2

a) 0,75 b) 0,8 c) 0,3 d) 0,45 e) 0,666.... $\approx 0,67$ f) 0,4545... $\approx 0,45$

B3

a) 21 b) 56 c) 300 d) 140 e) 2000

f) 560 g) 5,8 h) 24

B4

a) 4 b) 14 c) 8 d) 25 e) 6 f) 7,5

g) 11,5 h) 0,5 i) 0,6 j) 0,9 k) 6

B5

a) 315 b) 1644 c) 20344

B6

a) 1633 b) 34524 c) 264018

B7

a) 3,69 b) 0,875 c) 59,75

B8

a) 171 b) 96 c) 654

B9

a) 12,6 b) 9,875 c) 43,75

B10

a) 6 b) 25 c) 134

B11

a) 0,645 L/mil b) 1,55 mil/L. Hvor langt bilen kan kjøre på 1 L bensin.

B12

a) 2 b) 0 c) -2 d) 2 e) -2

f) -7 g) 7 h) 3

B13

a) -12 b) 12 c) -12 d) -4 e) -2

f) 3

B14

a) 1 b) 49 c) 81 d) 10000

e) 16 f) -16

B15

a) 21300 kr b) 22 timer

B16

a) 2,25 b) 6,25 c) 42,25

B17

a) 1 b) 4 c) 300 d) 1000

e) 5,6 f) 8

B18

a) 3,16 b) 31,6 c) 6,75

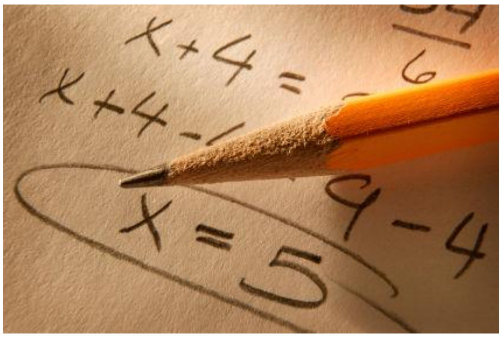
B19

a) 10 b) 18 c) 12

Kapittel 2. Algebra

Algebra kalles populært for “bokstavregning”.

Det er ikke mye algebra i Matematikk 2P-Y. Det viktigste er å kunne løse enkle *likninger* og regne med *formler*.



1. Forenkling av bokstavuttrykk

$2 \cdot (3+4)$ er et *talluttrykk*. Vi kan regne ut *verdien* til uttrykket slik: $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 7 = 14$. Men vi kan også regne det ut på en annen måte: $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$. Den siste metoden kaller vi gjerne «å gange ut parentesen» .

Hvis vi bruker andre tall og regner ut lignende uttrykk på disse to måtene, ser vi at vi alltid får samme svar på begge måtene. Vi har oppdaget en *regneregel*. Det er tungvint å uttrykke denne regelen på vanlig norsk. Hvis vi bruker matematikkens bokstavspråk isteden, kan vi skrive regelen slik:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Her kan *a*, *b* og *c* bety hvilke som helst tall. Vi kaller dem for *variabler*. Høyre- og venstresiden kalles *bokstavuttrykk*. Hvis *a* = 2, *b* = 3 og *c* = 4 får vi samme regnestykket som i eksemplet ovenfor.

2*a* er et eksempel på et svært enkelt bokstavuttrykk. Variabelen *a* kan også her bety et hvilket som helst tall. Vi sier ofte at *a* er et *symbol* for et tall. Uttrykket 2*a* betyr altså 2 multiplisert med et tall.

Går det an å gjøre bokstavuttrykket 2*a* + 3*a* enklere? Da må vi først være klar over at i et bestemt uttrykk så må *samme bokstav ha samme verdi i hele uttrykket*. Vi regner ut uttrykket for to ulike verdier av *a* for å se om vi kan oppdage noe system:

$a = 2$: $\quad 2a + 3a = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$

$a = 6$: $\quad 2a + 3a = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 12 + 18 = 30$

Da $10 = 5 \cdot 2$ og $30 = 5 \cdot 6$, tyder dette på at vi kan forenkle bokstavuttrykket slik:

$$2a + 3a = 5a$$

Oppgave 1

Gjør disse uttrykkene enklere.

a) $3a + 6a$ b) $2x + 5x$ c) $y + 3y$ d) $7b - 2b$ e) $2y + 5y - 3y$

Hva med $2a + 3b$? Fordi *a* og *b* ikke behøver å ha samme verdi, går det *ikke* an å forenkle dette uttrykket. Ikke prøv å være kreativ her!

Oppgave 2

Gjør disse uttrykkene enklere hvis det er mulig.

a) $3x + 4y$ b) $2a + 3b + 4a$ c) $3x + 4y + x - 2y$

$3(x + 2y)$ er et uttrykk som kan skrives om ved å bruke regelen $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Her må vi bytte ut *a* med 3, *b* med *x* og *c* med 2*y*. Vi regner slik:

$3(x+2y)=3\cdot x+3\cdot 2y=3x+6y$

Oppgave 3

Skriv om uttrykkene ved å bruke regelen $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

a) $2(5+3)$ b) $2(a+3)$ c) $2(b+c)$ d) $3(2a+4b)$ e) $x(3+4y)$ f) $x(2x-4)$

Her er tre uttrykk hvor vi må bruke *flere* regler for å forenkle:

$$2x+3(x+1)+4=2x+3x+3+4=5x+7$$

$$3a+4(b-2)-b+2a+3=3a+4b-8-b+2a+3=3a+2a+4b-b-8+3=5a+3b-5$$

$$x^2+xy+3x(x+2y)=x^2+xy+3x\cdot x+3x\cdot 2y=x^2+xy+3x^2+6xy=4x^2+7xy$$

Oppgave 4

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $2\cdot 3+2(3+4)$ b) $2b+2(b+4)$ c) $5(b-1)+8$ d) $a(2+4)+4a$

Hvis det står minus foran en parentes betyr det at tallet a i regelen $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ er negativt, og vi må da *bytte fortegn når vi ganger ut parentesen*:

$$4x-2(x-4)=4x-2x+8=2x+8$$

$$4a-(3a-1)=4a-3a+1=a+1$$

Oppgave 5

Gjør disse uttrykkene enklere:

a) $6y-3(y-2)$ b) $6x-(2x-3)$ c) $x^2-3x(x+y)-y(1-3x)$

2. Løse likninger

Et likhetstegn betyr ikke alltid helt det samme. $2x + 3x = 5x$ er riktig for *alle* verdier av x. Men $2x + 3x = 10$ er bare riktig hvis x er lik 2. Å finne den verdien av x som gjør at likhetstegnet er riktig, kaller vi å *løse* likningen.

<u>Eksempel 1</u>
Noen likninger kan vi løse med enkel hoderegning.

$3x = 6$ har løsningen $x = 2$ fordi $3 \cdot 2 = 6$. Legg merke til at $x = \frac{6}{3} = 2$.

Oppgave 6
Løs likningene.
a) $2x = 8$ b) $6x = 18$ c) $-3x = 12$ d) $-3x = -12$ e) $4s = 36$

<u>Eksempel 2</u>
I «praktiske» likninger er det ofte så «stygge» tall at vi må bruke kalkulator. Samme type likning som i eksempel 1 løses da slik:

$$6,28x = 20$$

$$x = \frac{20}{6,28} = 3,18$$

Oppgave 7
Løs likningene.
a) $0,25x = 10$ b) $4a = 22$ c) Finn r når: $2\pi r = 30$ (π er omtrent lik 3,14)

<u>Eksempel 3</u>
$x + 4 = 10$ er et eksempel på en annen type enkel likning. Du ser nok fort at løsningen er $x = 6$ fordi $6 + 4 = 10$. Hvis vi ikke ser løsningen med en gang, kan vi *trekke fra* 4 på begge sider av likningen. Løsningsmetoden blir da slik:

$$x + 4 = 10$$

$$x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$x = 6$$

Eksempel 4

Her er en liknende likning hvor vi *legger til* samme tall på begge sider av likhetstegnet:

$$x-8=12$$
$$x-8+8=12+8$$
$$x=20$$

Oppgave 8

Løs likningene.

a) $x+5=12$ b) $x-3=4$ c) $x+8-3=8$ d) $8=x+5$

Eksempel 5

$2x-3=5$ er en kombinasjon av de to likningstypene ovenfor. Vi løser den slik:

$$2x-3=5$$
$$2x-3+3=5+3$$
$$2x=8$$
$$x=\frac{8}{2}$$
$$x=4$$

Da $2\cdot 4-3=8-3=5$ ser vi at vi har regnet riktig.

Oppgave 9

Løs likningene på samme måte som i eksempel 5.

a) $3x-4=11$ b) $-2x+6=12$

Du kan også få likninger med en brøk:

Eksempel 6

Mange vil se med en gang at likningen $\frac{x}{3}=2$ har løsningen x = 6. Hvis du ikke ser det, kan du løse den slik:

$$\frac{x}{3}=2$$
$$\frac{x}{3}\cdot 3=2\cdot 3$$
$$\frac{3x}{3}=6$$
$$x=6$$

Oppgave 10

Løs likningene slik som i eksempel 6.

a) $\frac{x}{4}=3$ b) $\frac{n}{6}=3$ c) $\frac{x}{100}=1,26$ d) $\frac{x}{1,14}=210$

Til slutt tar vi et eksempel hvor vi må bruke alle løsningsmetodene ovenfor.

Eksempel 7

$$3x-1+\frac{x}{4}=x+8$$

$$3x-1+\frac{x}{4}+1=x+8+1$$

$$3x+\frac{x}{4}=x+9$$

$$3x+\frac{x}{4}-x=x+9-x$$

$$2x+\frac{x}{4}=9$$

$$2x\cdot 4+\frac{x}{4}\cdot 4=9\cdot 4$$

$$8x+x=36$$

$$9x=36$$

$$x=\frac{36}{9}$$

$$x=4$$

Hvis du ikke går i surr, kan du gjerne ta flere skritt på hver linje slik at ikke løsningen blir så lang. Du kan også bytte om på rekkefølgen av regneoperasjonene.

Oppgave 11

Løs likningene.

a) $x+\frac{2x}{3}=10$ b) $\frac{x}{5}+3=21-x$

Potenslikninger

x^2 og x^3 er eksempler på *potenser*.

Eksempel 8
Likningen under er en potenslikning. Den har *to* løsninger:

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16} = 4$ eller $x = -\sqrt{16} = -4$

Eksempel 9

$2x^2 = 40$

$x^2 = \frac{40}{2}$

$x^2 = 20$

$x = \sqrt{20} = 4,47$ eller $x = -\sqrt{20} = -4,47$

Eksempel 10
Likningen $x^2 = -4$ har *ingen* løsninger fordi det er umulig å få et negativt svar når vi multipliserer et tall med seg selv.

Eksempel 11

$x^3 = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{27}$ kaller vi "tredjeroten av 27" og er lik 3 fordi $3^3 = 27$. De fleste kalkulatorer har en egen tast for å regne ut tredjerot.

Oppgave 12

Løs likningene.
a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 50$ c) $4x^2 = 86$ d) $3,14x^2 = 40$ e) $x^2 = -9$ f) $x^3 = 8$
g) $5,67x^3 = 100$ h) $x^3 = -27$

Det kan hende at du får en potenslikning hvor eksponenten er større enn 3:

<u>Eksempel 12</u>

$x^5 = 2$

$x = \sqrt[5]{2} = 1{,}149$

Hvis kalkulatoren din ikke har en egen tast hvor du kan regne ut dette, kan du gjøre det slik: Å beregne 5. rot viser seg å være det samme som å opphøye i 1/5. Du kan altså bruke potenstasten og regne ut

$$2^{\frac{1}{5}} = 1{,}149$$

Oppgave 13

Løs likningene a) $x^4 = 3$ b) $500 \cdot x^{10} = 800$

Formelregning

3.1 Størrelser

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- radien til en sirkel (målenhet m)
- volumet av ei kule (målenhet m^3)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)
- energien i en matvare (målenhet joule)

3.2 Verdier

Det tallet som er knyttet til en størrelse, kaller vi *verdien* til størrelsen. For eksempel kan vekten av en eplepose ha verdien 1,45 kg, og temperaturen i kaffen ha verdien 65 grader.

3.3 Formler

Det går an å regne ut verdien til mange størrelser ved hjelp av en *regneoppskrift*. En slik oppskrift kaller vi en *formel*.
På venstre siden av formelen står navnet på den størrelsen vi vil regne ut, og på høyre siden står en eller flere andre størrelser, ofte sammen med faste tall.
Vi bruker nesten alltid bokstavsymboler på størrelsene slik at formelen blir kort og oversiktlig.

Eksempler på formler:

Prisen P for en pose epler som veier v kilo når kiloprisen er 24 kr: $P = 24v$

Arealet A av et rektangel med lengde l og bredde b: $A = l \cdot b$

Omkretsen o av en sirkel med radius r: $o = 2\pi r$

Kroppsmasseindeksen K til en person med høyde h (i meter) og masse m (i kilogram): $K = \dfrac{m}{h^2}$

3.4 Innsetting av tall i formler

Eksempel 13
Hva er arealet av et rektangel med lengde 4 cm og høyde 3 cm? Vi setter inn i formelen og regner ut verdien til arealet:

$$A = lb = 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 12\ \text{cm}^2$$

Eksempel 14
Hva er omkretsen av en sirkel med radius 0,7 m? Vi setter inn i formelen og regner ut:

$$o = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}7\ \text{m} = 4{,}20\ \text{m}$$

De fleste kalkulatorer har en egen tast for tallet pi (π). Bruk gjerne den. Det er raskere og mer nøyaktig enn å skrive 3,14.

Eksempel 15
Hva er volumet av ei kule med radius 10 cm? Vi setter inn i formelen:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10\ \text{cm})^3}{3} = 4190\ \text{cm}^3$$

Oppgave 14
Regn ut: a) omkretsen av en sirkel med radius 5,4 cm b) volumet av ei kule med radius 6 cm c) din egen kroppsmasseindeks

3.5 Omforming av formler

Eksempel 16
Et rektangel har lengde 6 cm og areal 24 cm^2. Hvor stor er da bredden?

Vi kan regne på to ganske like måter. Velg selv den du liker best.

Metode 1
Vi setter inn de oppgitte tallene i formelen for arealet og får da en likning med *b* som ukjent.

$$A = lb$$
$$24 = 6 \cdot b$$
$$b = \frac{24}{6}$$
$$b = 4 \text{ cm}$$

(I likninger pleier vi å sløyfe målenheter underveis.)

Metode 2
Her finner vi en *formel* for *b* og setter inn tallene i den.

$$A = l \cdot b$$
$$\frac{A}{l} = b$$
$$b = \frac{A}{l}$$
$$b = \frac{24 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 4 \text{ cm}$$

Oppgave 15

a) Omkretsen av en sirkel er 25 cm. Hvor stor er radien?

b) Volumet av en sylinder er gitt ved formelen $V = G \cdot h$. Hva er høyden *h* i en sylinder med grunnflate G = 50,27 cm^2 og volum V = 351,9 cm^3?

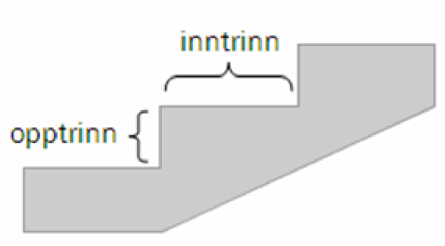
Blandede oppgaver

B1
(Eksamen 1P vår 2014, Del 1)

Løs likningen $\dfrac{(x+4)\cdot 3}{2}=9$.

B2
(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

For at en trapp skal være behagelig å gå i, bør ett inntrinn pluss to opptrinn være omtrent 630 mm.



Hvor høyt bør opptrinnet i en trapp være dersom inntrinnet skal være

340 mm?

(Tips: Kan løses med likning. Kall opptrinnet for *x* og sett opp en likning.)

B3
Hvor stor må radien i en sirkel være for at arealet skal være 100 cm^2?

B4
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

En pose Maarud Proviant inneholder 150 g potetskiver.

Energiinnholdet i potetskivene er gitt på forsiden av posen som vist på bildet til høyre.

a) Torbjørn spiser hele posen. Hvor mange kcal får han i seg?

Formelen

$$E = (P + K) \cdot 4 + F \cdot 9$$

viser energiinnholdet E kcal i mat som inneholder P gram proteiner, K gram karbohydrater og F gram fett.
Det er ca. 2 g proteiner og ca. 8 g fett i 30 g potetskiver.

b) Bruk formelen ovenfor til å finne ut omtrent hvor mange gram karbohydrater det er i 30 g potetskiver.

B5

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2, litt endret)

Når babylonerne skulle finne kvadratroten av et tall T, fant de det kvadrattallet K som lå nærmest T, og brukte formelen:

$$\sqrt{T} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{K} + \frac{T}{\sqrt{K}}\right)$$

Eksempel
Vi skal finne $\sqrt{31}$.
36 er det kvadrattallet som er nærmest 31, og formelen gir oss:

$$\sqrt{31} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{36} + \frac{31}{\sqrt{36}}\right) = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{31}{6}\right) = \frac{67}{12} \approx \underline{\underline{5{,}58}}$$

Bruk denne formelen til å regne ut en tilnærmet verdi for $\sqrt{74}$.

B6
Den elektriske effekten P til en lyspære er den elektriske energien som omdannes til lys og varme på ett sekund. Den måles i W (watt). Hvis vi kjenner spenningen U over pæra, målt i V (volt), og strømmen I gjennom pæra, målt i A (ampere) kan vi regne ut effekten med formelen

$$P = UI$$

a) Regn ut effekten til pæra når U = 230 V og I = 0,17 A.

b) Hvor stor strøm går gjennom en 60 W pære når spenningen er 230 V?

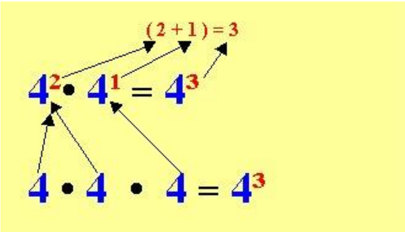
B7

Kroppsmasseindeksen er gitt ved formelen $K = \frac{m}{h^2}$. Her er *m* kroppsmassen målt i kg, og *h* er høyden målt i m. Kroppsmasseindeksen bør helst ligge mellom 20 og 25. Regn ut største og minste gunstige kroppsvekt for en gutt som er 180 cm høy.

Fasit

Fasit øvingsoppgaver	**Fasit blandede oppgaver**
Oppgave 1 a) $9a$ b) $7x$ c) $4y$ d) 5b e) 4y Oppgave 2 a) kan ikke forenkles b) $6a + 3b$ $4x + 2y$ Oppgave 3 a) 16 b) 2a+6 c) $2b + 2c$ d) $6a + 12b$ e) $3x + 4xy$ f) $2x^2 - 4x$ **Oppgave** 4 a) 20 b) 4b+8 c) 5b+3 d) 10a **Oppgave** 5 a) $3y + 6$ b) $4x + 3$ c) $-2x^2 - y$ Oppgave 6 a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = -4$ d) $x = 4$ e) $s = 9$ Oppgave 7 a) $x = 40$ b) $a = 5{,}5$ c) $r = 4{,}77$ Oppgave 8 a) $x = 7$ b) $x = 7$ c) $x = 3$ d) $x = 3$ Oppgave 9 a) $x = 5$ b) $x = -3$ Oppgave 10 a) $x = 12$ b) $n = 18$ c) $x = 126$ d) $x = 239{,}4$ Oppgave 11 a) $x = 6$ b) $x = 15$ Oppgave 12 a) $x = 5$ eller $x = -5$ b) $x = 7{,}07$ eller $x = -7{,}07$ c) $x = 4{,}64$ eller $x = -4{,}64$ d) $x = 3{,}57$ eller $x = -3{,}57$ e) ingen løsning f) $x = 2$ g) $x = 2{,}60$ h) $x = -3$ Oppgave 13 a) 1,316 b) 1,048 Oppgave 14 a) 33,9 cm b) 905 cm^3 Oppgave 15 a) 3,98 cm b) 7,0 cm	**B1** $x = 2$ **B2** 145 mm B3 5,64 cm **B4** a) 750 kcal b) 17,5 g **B5** 8,61 B6 a) 39 W b) 3,83 A B7 Mellom 65 og 81 kg

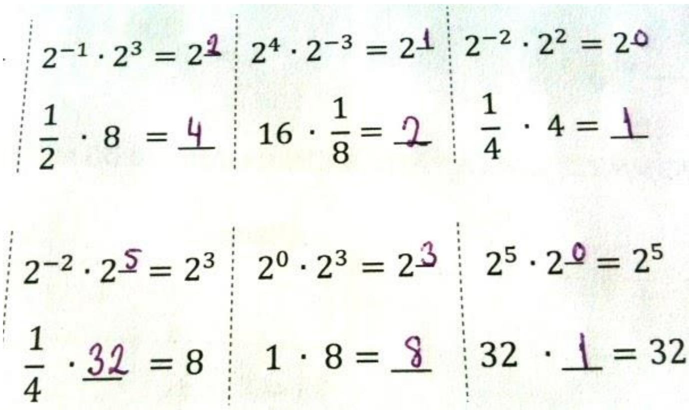
Kapittel 3. Potensregning



I potensregning skriver vi tall som potenser og forenkler uttrykk som inneholder potenser.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Betydningen av potenser som har negativ eksponent eller eksponent lik null.
- Hvordan vi raskt kan multiplisere og dividere potenser med samme grunntall.
- Hvordan vi beregner en potens med en annen potens som grunntall.



$2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$	$2^4 \cdot 2^{-3} = 2^1$	$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^0$
$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$	$16 \cdot \frac{1}{8} = 2$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
$2^{-2} \cdot 2^5 = 2^3$	$2^0 \cdot 2^3 = 2^3$	$2^5 \cdot 2^0 = 2^5$
$\frac{1}{4} \cdot 32 = 8$	$1 \cdot 8 = 8$	$32 \cdot 1 = 32$

1. Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

Eksempel 1

$3 \cdot 3 = 3^2$

$x \cdot x = x^2$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*.
I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.
Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på 3^2 og 32!

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2, som betyr $3 \cdot 3$ og er lik 9, med $3 \cdot 2$, som er lik 6!

Oppgave 1

Regn ut potensene uten kalkulator:

4^2, 2^3, 5^2, $(-3)^2$, 5^1

Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$2{,}5^2$, 12^3

2. Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks. $3^2 \cdot 3^4$?
Det er ikke meningen at du skal regne ut hvilket tall dette blir, men skrive svaret som en ny potens.

Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli 2 + 4 = 6 tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.

Eksempel 2

$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$

$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$

$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$

$x^3 \cdot x^2 = x^5$

Oppgave 3

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $6^2 \cdot 6^3$ b) $2^6 \cdot 2^4$ c) $10 \cdot 10^3$ d) $a^4 \cdot a^2$

3. Dividere potenser med samme grunntall

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4 \cdot 4}}{\cancel{4 \cdot 4}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen 5 – 2 = 3 firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Oppgave 4

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $\frac{8^5}{8^3}$ b) $\frac{6^5}{6}$ c) $\frac{5^4}{5^3}$ d) $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

Eksempel 5

$$\frac{4^2 \cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

Oppgave 5

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^4}$ b) $\frac{3^6}{3^4 \cdot 3}$ c) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^2}$

4. Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$\left(10^2\right)^3$ er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva $\left(10^2\right)^3$ egentlig betyr, ser vi at

$$\left(10^2\right)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3\cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ og $\left(10^2\right)^3 = 10^6$!

Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a) $\left(6^3\right)^4$ b) $\left(8^5\right)^2$ c) $\left(x^3\right)^2$ d) $\left(a^2\right)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

Eksempel 6

$$\left(3^4\right)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{\left(2^3\right)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a) $\left(4^2\right)^3 \cdot 4$ b) $\dfrac{\left(5^2\right)^3}{5^2}$ c) $\dfrac{\left(a^2\right)^3 \cdot a^2}{a^5}$

5. Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken $\frac{5^4}{5^4}$ er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar 5^0 *bety* 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

$a^0 = 1$ for alle tall a.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 2^0 er lik 0!! $2^0 = 1$! Derimot er $2 \cdot 0$ lik 0.

Oppgave 8

Hvor mye er a) 10^0 b) 6^0 c) $(-1)^0$?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken $\frac{5^4}{5^6}$? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} \quad \text{(du er vel klar over at 4 - 6 = -2 og ikke 2?)}$$

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken $\frac{5^4}{5^6}$ kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at 5^{-2} skal *bety* $\frac{1}{5^2}$. På samme måte har vi også:

Eksempel 7

$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a^{-n} betyr $\frac{1}{a^n}$ for alle verdier av *a* (unntatt 0) og *n*.

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 10^{-2} = -20 eller at 2^{-3} = -6 eller -8!!

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.

Eksempel 8

$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$

$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$

$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$

$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.

a) $\frac{1}{10^{-2}}$ b) $\frac{2^6}{5^{-3}}$ c) $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$ d) $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$

$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$

$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$

$$\left(10^{-2}\right)^3 = 10^{-2\cdot 3} = 10^{-6}$$

$$\left(x^3\right)^{-4} = x^{3\cdot(-4)} = x^{-12}$$

Oppgave 10

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{3^6}{3^0}$ b) $5^{-1} \cdot 5^4$ c) $\frac{10^{-4}}{10^3}$ d) $\frac{10^4}{10^{-3}}$ e) $(2^{-4})^3$

6. Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$

$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$ b) $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

Eksempel 11

Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket $4 \cdot 2^3$ kan skrives som én potens.
Men fordi $4 = 2^2$ går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $9 = 3^2$ og $27 = 3^3$.

Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.

a) $2^4 \cdot 4$ b) $8 \cdot 2^{-2}$ c) $\frac{4}{2^{-3}}$ d) $9 \cdot 3^2$ e) $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivinger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

7. Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

Eksempel 12

I potensen $(2x)^3$ er grunntallet et produkt av faktorene 2 og x. Dette kan vi skrive uten parenteser slik:

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3 x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a) $(3a)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\left(a^2 b^{-1}\right)^3$ d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Blandede oppgaver

B1

(Eksamen 2P høst 2008, Del 1)

Skriv uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $3 \cdot (31 - 29)^2 - (5 - 3^2)$

b) $(2^3)^3 \cdot (2^{-1})^3$

B2

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{2^8 \cdot 2^{-4}}{2^5}$.

B3

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut $5 - 2^4 \cdot (4 - 3)^3 \cdot 2^{-3}$

B4

(Eksamen 2P vår 2011, Del 1)

Regn ut

a) $a^4 \cdot \left(a^2\right)^{-3} \cdot a^0$

b)  $\dfrac{2^{-3} \cdot 4^3}{8^2}$

B5

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Regn ut

a) $8 \cdot 2^{-2}$

b) $2^3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

B6

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{\left(a^3\right)^{-2} \cdot a^5}{a^{-3} \cdot a^0}$$

B7
(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret som et helt tall

a) $\left(2^3\right)^2 \cdot 2^0$

b) $\left(\dfrac{1}{3^{-2}}\right)^2$

B8

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1)

Hvilken av de to brøkene A og B nedenfor har størst verdi?

A: $\dfrac{15 \cdot 5^{-1}}{2^2}$

B: $\dfrac{1}{6^{-2} \cdot 3 \cdot 15}$

B9

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1)

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 3}{2 \cdot 3^{-1}}$

b) $a^3 + \dfrac{a^2 \cdot a^{-1}}{a^{-2}}$

B10

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1)

Ordne disse brøkene i stigende rekkefølge (slik at den minste står først osv.).

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2, \quad \dfrac{3^2}{2}, \quad \dfrac{2}{3^{-2}}, \quad \dfrac{2}{\sqrt{25}}$

B11

(Eksamen 2P vår 2013, Del 2)

Petter vil sende en epost med en matematikkoppgave til to personer 1. januar. Anta at hver av personene sender e-posten videre til to nye personer dagen etter, at hver av de fire som da får den, også sender den videre til to nye personer dagen etter at de mottok den, og at eposten fortsetter å spres på samme måte i dagene framover.

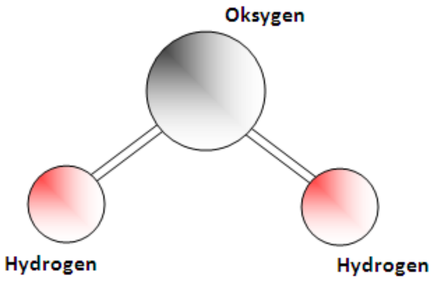
a) Hvor mange personer vil motta e-posten 6. januar?
b) På hvilken dato vil antall mottatte eposter på én dag for første gang bli større enn en milliard?

Fasit

Fasit øvingsoppgaver	**Fasit blandede oppgaver**
Oppgave 1 16, 8, 25, 9, 5 Oppgave 2 6,25 1728 Oppgave 3 a) 6^5 b) 2^{10} c) 10^4 d) a^6 Oppgave 4 a) 8^2 b) 6^4 c) 5 d) z^3 Oppgave 5 a) 2^7 b) 3 c) a^5 Oppgave 6 a) 6^{12} b) 8^{10} c) x^6 d) a^8 Oppgave 7 a) 4^7 b) 5^4 c) a^3 Oppgave 8 a) 1 b) 1 c) 1 Oppgave 9 a) 10^2 b) $2^6 \cdot 5^3$ c) $\frac{5 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{6}$ d) 4^{15} Oppgave 10 a) 3^6 b) 5^3 c) 10^{-7} d) 10^7 e) 2^{-12} Oppgave 11 a) $4 \cdot 5^{-2}$ b) $6^4 \cdot 10^{-5}$ Oppgave 12 a) 2^6 b) 2 c) 2^5 d) 3^4 e) 2^7 Oppgave 13 a) $3^4 a^4$ b) $\frac{3^2}{2^2}$ c) $a^6 b^{-3}$ d) 16	B1 a) 16 b) $2^6 = 64$ B2 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ B3 3 B4 a) a^{-2} b) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ B5 a) 2 b) 18 B6 a^2 B7 a) 64 b) 81 B8 B ($A = \frac{3}{4}$ $B = \frac{4}{5}$) B9 a) 1 b) $2a^3$ B10 $\frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ $\frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$ $\frac{2}{3^{-2}} = 18$ B11 a) 64 b) 30. januar

Kapittel 4. Tall på standardform

Vannmolekyl H_2O



Massen til et vannmolekyl:
0,000 000 000 000 000 000 000 000 03 kg

Standardform er en metode som er nyttig for raskt å kunne skrive tall som er mye større enn 1 eller mye mindre enn 1. Du må kunne potensregning for å forstå regning med standardform.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hva er standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra vanlig form til standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra standardform til vanlig form.
- Eksempler på praktisk regning med tall på standardform.

$$0,\overbrace{006}^{\text{Tre plasser}}4 = 6,4 \cdot 0,001 =$$

$$\frac{6,4}{10^3} = 6,4 \cdot 10^{-3}$$ Tre plasser 10 i - tredje potens

1. En smart måte å skrive store og små tall på

I blant annet naturvitenskap og økonomi dukker det ofte opp svært store eller svært små tall. For eksempel er avstanden fra jorda til sola 150 000 000 000 meter og massen til et elektron er 0,00000000000000000000000000000091 kg. Ved å bruke potenser av 10 kan vi skrive slike tall mye raskere og mer oversiktlig.

1.1 Tall som er større enn 1

Eksempel 1

$100\ 000 = 1 \cdot 10^5$

$300\ 000 = 3 \cdot 10^5$

$340\,000 = 3,4 \cdot 10^5$

$368\ 200 = 3,682 \cdot 10^5$

Hvis du ikke med en gang ser at det blir slik, kan du tenke deg et komma bak første siffer i tallet du skal skrive om, og så telle antall siffer bak dette kommaet for å finne eksponenten i tierpotensen. Prøv!

Vi har her skrevet tallene på *standardform*. I praksis skriver vi sjelden tall som er mindre enn 1 million på standardform.

Et tall på standardform er et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en potens av 10.

Oppgave 1

Skriv tallene på standardform.

a) 100 b) 10 000 c) 20 000 d) 21 000 e) 21 640 f) 820 000 000 g) fire millioner h) 75 milliarder i) 12 j) 1 k) 6,4

Tallet $24 \cdot 10^4$ er ikke skrevet på standardform fordi 24 er større enn 10 (se definisjonen av standardform ovenfor). Skal det være på standardform, må det stå *2,4* foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$24 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10^5$$

Her er et annet eksempel på omskriving til standardform hvor vi bruker at $0,45 = 4,5 \cdot \frac{1}{10} = 4,5 \cdot 10^{-1}$:

$$0,45 \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 = 4,5 \cdot 10^5$$

Oppgave 2

Skriv om tallene slik at de er på standardform.

a) $60 \cdot 10^5$ b) $46 \cdot 10^3$ c) $450 \cdot 10^6$ d) $0,6 \cdot 10^5$ e) $0,055 \cdot 10^7$

Du må også kunne skrive tall som er på standardform om til vanlig form.

Eksempel 2

$6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 1000 = 6000$

$6,7 \cdot 10^3 = 6,7 \cdot 1000 = 6700$

$8,01 \cdot 10^5 = 8,01 \cdot 100000 = 801000$

Oppgave 3

Skriv disse tallene på vanlig form.

a) $2 \cdot 10^4$ b) $2,5 \cdot 10^4$ c) $6,8 \cdot 10^6$

1.2 Tall som er mindre enn 1

Du husker vel fra potensregningen at 10^{-2} betyr $\frac{1}{10^2}$?

Men $\frac{1}{10^2}$ kan vi også skrive som desimaltall:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

På samme måte har vi

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad (\textit{en} \text{ null i desimaltallet})$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \quad (\textit{tre} \text{ nuller i desimaltallet})$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001 \quad (\textit{seks} \text{ nuller i desimaltallet})$$

Derfor kan vi også skrive tall som er *mindre* enn 1 på standardform ved å bruke tierpotenser med *negativ* eksponent:

Eksempel 3

$0,004 = 4 \cdot 10^{-3}$

$0,0046 = 4,6 \cdot 10^{-3}$

$0,00000582 = 5,82 \cdot 10^{-6}$

$0,5 = 5 \cdot 10^{-1}$

Hvis du teller nullene i massen til vannmolekylet i starten av kapittelet vil du finne 1 null foran komma og 25 bak. Da kan vi skrive dette *veldig* lite tallet mye mer oversiktlig:

$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,03 = 3 \cdot 10^{-26}$

Oppgave 4

Skriv disse tallene på standardform.

a) $0{,}06$ b) $0{,}067$ c) $0{,}00005$ d) $0{,}0000563$ e) $0{,}25$

Tallet $35 \cdot 10^{-4}$ er ikke skrevet på standardform fordi 35 er større enn 10. Skal det være på standardform, må det stå *3,5* foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$35 \cdot 10^{-4} = 3{,}5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 3{,}5 \cdot 10^{1+(-4)} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Her er et annet eksempel:

$$0{,}4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1+(-5)} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Oppgave 5

Skriv disse tallene på standardform.

a) $64 \cdot 10^{-3}$ b) $250 \cdot 10^{-8}$ c) $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ d) $0{,}07 \cdot 10^{-10}$

2. Multiplikasjon og divisjon av tall på standardform

2.1 Multiplikasjon

Eksempel 4

Hvis vi skal regne ut $4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7}$ kan vi multiplisere 4 med 3 og 10^4 med 10^{-7}, slik:

$$4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} = 12 \cdot 10^{-3} = 1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$$

Legg merke til at vi til slutt skrev svaret på standardform.

Oppgave 6

Regn ut og skriv svaret på standardform.

a) $2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ b) $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$ c) $2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ d) $0{,}00008 \cdot 5000000$

2.2 Divisjon

Eksempel 5

Hvis vi skal regne ut $\frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}}$ må vi dividere 8 med 2 og 10^4 med 10^{-3}, slik:

$$\frac{8\cdot10^4}{2\cdot10^{-3}}=4\cdot10^{4-(-3)}=4\cdot10^{4+3}=4\cdot10^7$$

To eksempler til:

$$\frac{2{,}4\cdot10^8}{3{,}0\cdot10^6}=0{,}8\cdot10^{8-6}=0{,}8\cdot10^8=800$$

(2,4 : 3,0 er 0,8 fordi 24 : 3 = 8.)

$$\frac{1{,}8\cdot10^{-3}}{2{,}0\cdot10^{-4}}=0{,}9\cdot10^{-3-(-4)}=9\cdot10^{-1}\cdot10^{-3+4}=9\cdot10^{-1}\cdot10^1=9\cdot10^{-1+1}=9\cdot10^0=9$$

3. Praktisk regning med tall på standardform

Her er noen eksempler på praktisk regning hvor det er lurt å regne med tallene på standard-form.

<u>Eksempel 6</u>

Det årlige forbruket av vann på jorda er ca. $4{,}2\cdot\ 10^{15}$ liter. Det er ca. $7\cdot10^9$ mennesker på jorda. Hvor mange liter vann blir dette per menneske? Skriv svaret på standardform.

$$\frac{4{,}2\cdot10^{15}\text{ L}}{7\cdot10^9\text{ mennesker}}=0{,}6\cdot10^{15-9}\text{ L/menneske}=6\cdot10^{-1}\cdot10^6\text{ L/menneske}=6\cdot10^5\text{ L/menneske}$$

<u>Eksempel 7</u>

Et atom har en diameter på ca. 10^{-7} mm. Hvor mange atomer kan ligge etter hverandre på 1 mm?

Svar: $\frac{1\text{ mm}}{10^{-7}\text{ mm}}=10^7$ (ti millioner)

<u>Eksempel 8</u>

Massen til et vannmolekyl er ca. $3\cdot10^{-26}$ kg.1 liter vann har en masse på omtrent 1 kg. Hvor mange vannmolekyler er det i 1 liter vann?

$$\frac{1\text{ kg}}{3\cdot 10^{-26}\text{ kg}} \approx 0{,}3\cdot 10^{26} = 3\cdot 10^{25}$$

Oppgave 7

De største harddiskene til en vanlig PC var i 2014 på 4 TB. 1TB = 1 Terabyte = 10^{12} byte. En lang bok uten bilder krever ca. 2 MB når den lagres som tekst. 1MB = 1 Megabyte = 10^{6} byte. Hvor mange bøker er det plass til på den store harddisken?

Oppgave 8

a) DNA-molekylene i en menneskecelle har en samlet lengde på ca. 0,05 m hvis de tenkes strukket helt ut. I et menneske er det ca. 10 000 milliarder celler. Hva blir den samlede lengden av alle DNA-molekylene i et menneske?

b) Sammenlign svaret med avstanden fra jorda til sola, som er 150 millioner km.

Blandede oppgaver

B1
(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1)
Skriv disse tallene på standardform: 1) 27 000 000 2) 0,000290

B2
(Eksamen 2P vår 2008, Del 1)
Skriv tallet $2{,}46 \cdot 10^{-4}$ som desimaltall.

B3
(Eksamen 2P vår 2009, Del 1)
Skriv så enkelt som mulig: $2{,}0 \cdot 10^{6} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{4}$

B4
(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)
Skriv tallene 32 000 000 og 0,000 678 på standardform.

B5
(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)
Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{2{,}7 \cdot 10^{8}}{3{,}0 \cdot 10^{4}}$$

B6
(Eksamen 2P høst 2010, Del 1)
Regn ut og skriv svaret på standardform: $6{,}0 \cdot 10^{7} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}$

B7
(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)
Skriv på standardform
1) 533 milliarder
2) 0,000 533

B8
(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)
Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{5{,}0 \cdot 10^{5} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{6}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}}$$

B9
(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform: $0{,}0003 \cdot 0{,}00000015$

B10
(Eksamen 2P vår 2013, Del 1)
Regn ut og skriv svaret på standardform: $0{,}075 \cdot 2000000$

B11

Regn ut $\left(4 \cdot 10^{-3}\right)^2$ og skriv svaret på standardform.

B12
(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)
I Norge er det ca 5 millioner innbyggere. Det norske oljefondet er på ca 3000 milliarder kroner.
Tenk deg at oljefondet blir delt likt mellom innbyggerne i Norge.
Omtrent hvor mye ville hver innbygger fått?
Skriv svaret på standardform.

B13

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1) 

En fotball har en diameter på ca. 20 cm. Omkretsen til jorda ved ekvator er ca. 40 000 km.
Vi tenker oss at vi legger fotballer langs ekvator rundt hele jorda.
Omtrent hvor mange fotballer er det plass til?
Skriv svaret på standardform.

B14
(Eksamen 2P(-Y) vår 2016, del 1)

Det er ca. 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 liter drikkevann hver dag.

Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret i standardform.

Fasit

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1
a) $1\cdot10^2$ b) $1\cdot10^4$ c) $2\cdot10^4$ d) $2{,}1\cdot10^4$ e) $2{,}164\cdot10^4$ f) $8{,}2\cdot10^8$
g) $4\cdot10^6$ h) $7{,}5\cdot10^{10}$ i) $1{,}2\cdot10^1$ j) $1\cdot10^0$ k) $6{,}4\cdot10^0$
Oppgave 2
a) $6\cdot10^6$ b) $4{,}6\cdot10^4$ c)$4{,}5\cdot10^8$ d) $6\cdot10^4$ e) $5{,}5\cdot10^5$
Oppgave 3
a) 20 000 b) 25 000 c) 6 800 000
Oppgave 4
a) $6\cdot10^{-2}$ b) $6{,}7\cdot10^{-2}$ c) $5\cdot10^{-5}$ d) $5{,}63\cdot10^{-5}$ e) $2{,}5\cdot10^{-1}$
Oppgave 5
a) $6{,}4\cdot10^{-2}$ b) $2{,}5\cdot10^{-6}$ c) $6\cdot10^{-5}$ d) $7\cdot10^{-12}$
Oppgave 6
a) $5\cdot10^3$ b) $1\cdot10^4$ c) $1{,}5\cdot10^{-6}$ d) $4\cdot10^2$
Oppgave 7
$2\cdot10^6$ bøker
Oppgave 8
a) $5\cdot10^{11}$m b) 3,3 ganger avstanden til sola!

Fasit Blandede oppgaver

B1 1) $2{,}7\cdot10^7$ 2) $2{,}90\cdot10^{-4}$
B2 0,000246
B3 $1{,}68\cdot10^{11}$ = 168 milliarder = 168 000 000 000
B4 1) $3{,}2\cdot10^7$ 2) $6{,}78\cdot10^{-4}$
B5 $9\cdot10^3$
B6 $1{,}5\cdot10^5$
B7 1) $5{,}33\cdot10^{11}$ 2) $5{,}33\cdot10^{-4}$
B8 $1{,}2\cdot10^{16}$
B9 $4{,}5\cdot10^{-11}$
B10 $1{,}5\cdot10^5$
B11 $1{,}6\cdot10^{-5}$
B12 $6\cdot10^5$
B13 $2\cdot10^8$
B14 $4{,}5\cdot 10^{11}$

Kapittel 5. Prosentregning

I dette kapitlet skal vi repetere og utvide prosentregningen fra grunnskolen.

Hovedemnene er:

- Forstå hva prosent er.
- Regne ut hvor mange prosent noe er av noe annet (finne prosenttallet).
- Regne ut hvor mye en bestemt prosent av noe er (prosenttallet er oppgitt).
- Regne ut hvilket tall en startet med hvis prosenttallet og prosenten er oppgitt.
- Bruke vekstfaktor for å finne ny verdi hvis noe øker eller minker med et bestemt prosenttall.
- Prosentpoeng.

Du får også bruk for prosentregning i de fleste av de andre kapitlene i boka.

1. Å regne ut en prosent

Alle har hørt om prosent, men ikke alle har forstått hva det egentlig er.
Her er et eksempel hvor det er naturlig å bruke prosentregning. Figuren under skal forestille en liten klasse på 10 elever. 4 av disse elevene fikk karakteren 5 i matematikk.

5	**5**	**5**	**5**						

Dette er en annen klasse på 30 elever. Her fikk 6 elever karakteren 5.

5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**				

Den største klassen har flest femmere, men alle vil vel likevel si at den minste klassen har best resultater i toppen fordi den største klassen har 3 ganger så mange elever, men bare 1,5 ganger så mange femmer-elever (6 : 4 = 1,5).

I slike situasjoner er det naturlig å regne ut *brøkdelen* av femmer-elever i hver klasse og sammenligne størrelsen av brøkene .

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen: $\frac{4}{10}$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen: $\frac{6}{30}$

Det er vanlig å gjøre om brøkene til *hundredeler* for å sammenligne dem. Dette gjør vi lettest ved å dividere teller med nevner i hodet eller på kalkulator. Så kan vi skrive svaret som desimaltall, hundredeler eller *prosenttall*:

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen: $\frac{4}{10} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\,\%$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen: $\frac{6}{30} = 0,2 = \frac{20}{100} = 20\,\%$

Vi sier at 40 % av elevene i den minste klassen fikk 5, og 20 % av elevene i den største klassen fikk 5.

Prosent er bare en kortere måte å skrive *hundredeler* på.

25 % betyr $\frac{25}{100}$, som er lik 0,25 med desimaltall. 0,25 kaller vi *prosentfaktor*, og25 kaller vi *prosenttallet*.

Eksempel 1
En sofa koster 6000 kr. Selgeren gir 600 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt gir han?

Vi finner ut hvor stor del 600 er av 6000 ved å regne ut brøken $\frac{600}{6000}$

$$\frac{600}{6000} = 0{,}1 = 10\ \%$$

Han gir 10 % rabatt.

Oppgave 1

Jonas skal kjøpe en bukse til 500 kroner. Han oppdager en liten flekk på buksen og blir derfor tilbudt 100 kr i avslag. Hvor mange prosent avslag blir han tilbudt? **Uten kalkulator!**

Oppgave 2

Aisha hadde en timelønn på 150 kr. Hun fikk en lønnsøkning på 30 kr timen. Hvor mange prosent utgjorde dette? **Uten kalkulator!**

Eksempel 2
I en klasse på 25 elever kom 8 elever for sent til 1. time.

a) Hvor mange prosent kom for sent?
b) Hvor mange prosent kom tidsnok?

Vi regner ut forholdet 8/25. Disse tallene kan vi regne uten kalkulator:

$$\frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32\ \%$$

a) 32 % kom for sent.
b) Resten kom tidsnok: $100\ \% - 32\ \% = 68\ \%$

Oppgave 3

I en klasse på 20 elever var det 14 jenter. Hvor mange prosent av elevene var jenter? Hvor mange var gutter? **Uten kalkulator**

Eksempel 3
2817 av 11 200 velgere stemte på AP i et kommunevalg. Hvor mange prosent stemte AP?

Vi gjør om til desimaltall: $\frac{2817}{11200} = 0{,}252 = 25{,}2\ \%$

25,2 % av velgerne stemte AP.

Oppgave 4

I 2010 var det ca. 4 860 000 innbyggere i Norge. Av disse var 637 356 mellom 10 og 19 år. Hvor stor prosent av befolkningen var mellom 10 og 19 år?

Ofte skal vi finne hvor mange prosent noe *forandrer* seg. Det gir samme type regning som i eksemplene ovenfor

Eksempel 4

Ei bukse kostet 600 kr og ble satt ned 200 kr. Hvor mange prosent ble buksa satt ned?

Her skal vi finne ut hvor mye 200 kr er av 600 kr.

Vi gjør om til desimaltall: Prosentforandring = $\frac{200}{600} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

Buksa ble satt ned med 33,3 %.

Fordi $\frac{200}{600} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ vil også mange si at den ble satt ned med 1/3 av opprinnelig pris.

Oppgave 5

Ei skjorte koster 300 kr. Tre skjorter koster da egentlig 900 kr, men du betaler bare for to, og får derfor 300 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du kjøper tre skjorter?
Uten kalkulator!

Eksempel 5

Jonas veide 80 kg. Etter en periode med mye usunn mat hadde vekten økt til 88 kg. Hvor mange prosent hadde vekten økt?

Vi finner først økningen i kg. Den er 88 kg – 80 kg = 8 kg. Førverdien var 80 kg.

Vi regner ut: $\frac{8}{80} = 0{,}1 = 10\ \%$

Vekten har økt 10 %. Denne utregningen gjør vi uten kalkulator!

Oppgave 6

Timelønnen til Tahir økte fra 160 kr til 176 kr. Hvor mange prosent økte lønnen?
Uten kalkulator!

Eksempel 6

Etter en mageinfeksjon sank vekten til Emma fra 64 kg til 60 kg. Hvor mange prosent minket vekten hennes?

Hun mistet 64 kg – 60 kg = 4 kg

Vi finner forandringen i prosent ved å gjøre om til desimaltall

$$\frac{4}{64} = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%$$

Vekten minket 6, 25 %.

Oppgave 7

I 1960 var verdensrekorden på 500 m skøyter for menn 40,20 s. I 2013 var den 34,03 s. Hvor mange prosent sank rekorden fra 1960 til 2013? **Bruk kalkulator**

2. Prosentregning når prosenttallet er oppgitt

I oppgavene over har vi brukt desimaltall i utregningen. Det kan vi fortsatt gjøre når prosenttallet er oppgitt.
En annen metode som kanskje er lettere å forstå, er først å finne ut hvor mye 1 % tilsvarer. Deretter kan vi finne ut hvor mye prosenttallet som er oppgitt tilsvarer.
Denne metoden kalles ofte "Veien om 1" og kan også brukes til å løse andre problemer som omhandler forhold mellom to tall.

I eksemplene under viser vi begge metodene. Du velger selv hvilken du vil bruke.

Eksempel 7
På en skole er det 600 elever. 20 % av elevene går på yrkesfag. Hvor mange elever går på yrkesfag?

Metode 1:
Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$1\ \%: \frac{600}{100} = 6$ elever

$20\ \%: 20 \cdot 6 = 120$

Metode 2:
Vi gjør om til desimaltall:

$20\ \% = \frac{20}{100} = 0{,}20$

$600 \cdot 0{,}20 = 120$

120 elever går på yrkesfag.

Oppgave 8
I en klasse på 30 elever hadde 60 % valgt 1P. Hvor mange elever hadde valgt 1P? Ikke bruk kalkulator!

Eksempel 8
I en klasse på 25 elever kom 32 % av elevene for sent. Hvor mange elever kom for sent?

Metode 1:
Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$1\ \%: \frac{25}{100} = 0{,}25$ elever
$32\ \%: 32 \cdot 0{,}25 = 8$

Metode 2:
Vi gjør om til desimaltall:

$32\ \% = \frac{32}{100} = 0{,}32$
$0{,}32 \cdot 25 = 8$

8 elever kom for sent. Sammenlign med eksempel 2.

Oppgave 9

På en skole med 548 elever gikk 31 % av elevene på Vg1. Hvor mange elever gikk på Vg1?
Fordi prosenttallet ikke er helt nøyaktig, vil svaret ikke bli et helt tall.
Da må du her runde det av til nærmeste heltall!

Eksempel 9

Under et salg er det 40 % rabatt på en bluse. Vanlig pris er 400 kr. Hvor mange kroner blir det gitt i rabatt?

Metode 1:

Vi finner ut hvor mange kroner 1 prosent utgjør:

1 %: $\frac{400}{100} = 4$ kr

40 %: 40 · 4 kr = 160 kr

Metode 2:

Vi gjør om til desimaltall:

$40\ \% = \frac{40}{100} = 0{,}40$

0,40 · 400 kr = 160 kr

Rabatten er 160 kr.

Oppgave 10

I en klasse på 30 elever sluttet 13,3 % i løpet av skoleåret. Hvor mange av elevene i klassen sluttet?

Oppgave 11

I en bestemt type kunstgjødsel er det 17 % nitrogen, 13 % kalium og 5 % fosfor. Hvor mange kilogram nitrogen, kalium og fosfor er det i en sekk med 40 kg gjødsel?

Oppgave 12

På de fleste matvarer unntatt mat betales en merverdiavgift (mva) på 25 %. Hvor stor er merverdiavgiften på en vare som koster 90 kr uten mva?

3. Finne "førverdien" i prosentregning

Eksempel 10

Hvis prisen øker 10 % på en vare som koster 500 kr, regner vi ut prisøkningen i kroner slik:

$500 \cdot 0{,}10 = 50$

Hva om vi isteden får vite at 10 % økning tilsvarer 50 kr, og ut fra dette skal beregne prisen *før* økningen?

Her viser vi bare metode 1, vi finner først hvor mange kroner 1 % utgjør, så 100 %:

1%: $\frac{50}{10} = 5 \text{ kr}$

100%: $100 \cdot 5 \text{ kr} = 500 \text{ kr}$

Prisen før økningen var 500 kr

Oppgave 13

En TV ble satt ned med 20 %. Da ble den 1000 kr billigere. Hvor mye kostet den før den ble satt ned? Ikke bruk kalkulator!

Eksempel 11

15 % av elevene på en skole er dagligrøykere. Dette utgjør 60 elever. Hvor mange elever er det på skolen?

Vi finner først ut hvor mange elever 1 % utgjør, så 100 %:

1 %: $\frac{60}{15} = 4$ elever

100 %: 100 · 4 elever = 400 elever.

Det er 400 elever på skolen. Sjekk gjerne at 15 % av 400 virkelig er lik 60!

Oppgave 14

Marius jobbet 4 timer overtid en bestemt uke. Dette utgjorde 12,5 % av arbeidstimene hans. Hvor mange timer jobbet han denne uka?

4. Vekstfaktor: Finne ny verdi.

Mye prosentregning handler om å finne en ny verdi når vi kjenner førverdien og vet hvor mange prosent førverdien øker eller minker. Da er begrepet **vekstfaktor** svært nyttig.

Vekstfaktoren er **desimaltallet** som forteller oss hvor mange prosent den nye verdien er av den gamle verdien etter en endring.

Hvis verdien *øker* er vekstfaktoren større enn 1

Eksempel 12

a) Prisen på en bukse stiger med 13 %.

1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?
   Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er 100 % + 13 % = 113 % av den gamle prisen.
2) Hva er vekstfaktoren?
   Siden 113 % $=\frac{113}{100} = 1{,}13$, er vekstfaktoren 1,13

b) Årslønna til Tina økte med 4 %

1) Hvor mange prosent er den nye lønna av den gamle lønna?
   Den gamle lønna er 100 %. Den nye lønna er 100 % + 4 % = 104 % av den gamle lønna.
2) Hva er vekstfaktoren?
   Siden 104% $= \frac{104}{100} = 1{,}04$, er vekstfaktoren 1,04.

Eksempel 13

Hva er vekstfaktorene som svarer til en økning på 16 %? På 30 %? På 3 %? På 2,5 %? På 100 % ?

16 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 16 % = 116 % = 1,16.
30 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 30 % = 130 % = 1,30 (eller 1,3).
3 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 3 % = 103 % = 1,03.
2,5 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 2,5 % = 102,5 % = 1,025.
100 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 100 % = 200 % = 2,00 (eller 2).
100 % økning er altså en *fordobling*.

Oppgave 15

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en økning på 17 %, 60 %, 6 %, 7,5 %, 0,5 % og 200 %.

Ny verdi = førverdi $\cdot$ vekstfaktor

Eksempel 14
På de fleste varer vi kjøper, er noe av prisen vi betaler en såkalt merverdiavgift (mva) til staten. På mange varer er mva 25 % av prisen uten mva, som er den prisen butikken egentlig tar for varen.
Prisen *uten* mva på en mobiltelefon er 3040 kr. Hva er prisen *med* mva?

Vekstfaktoren som svarer til 25 % økning er 100 % + 25 % = 125 % = 1,25.

Prisen med mva = $3040 \text{ kr} \cdot 1,25 = 3800 \text{ kr}$.
(Det er altså denne prisen vi må betale i butikken.)

Oppgave **16**

På mat er merverdiavgiften (mva) 15 %. Et brød koster 23,13 kr *uten* mva. Hva er prisen *med* mva?

Hvis verdien *synker* er vekstfaktoren mindre enn 1

Eksempel 15
a) En T-skjorte blir satt ned 30 %.
1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?
Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er 100 % – 30 % = 70 % av den gamle prisen
2) Hva er vekstfaktoren?
Siden 70 % $= \frac{70}{100} = 0{,}70$, er vekstfaktoren 0,70.

b) Verdien av en bil sank med 6 % i løpet av et halvt år.
1) Hvor mange prosent er den nye verdien av den gamle verdien?
Den gamle verdien er 100 %. Den nye verdien er 100 % - 6 % = 94 % av den gamle .
2) Hva er vekstfaktoren?
Siden 94 % $= \frac{94}{100} = 0{,}94$, er vekstfaktoren 0,94

Oppgave 17

Ei bukse koster 500 kr i butikk A. I butikk B koster den 20 % *mindre*. Regn med vekstfaktor på samme måte som tidligere og finn hvor mye buksa koster i butikk B

Verdt å merke seg: Når noe blir mindre, kan det i oppgaver stå at det *minker*, *minsker*, *blir lavere*, *avtar*, *settes ned* eller *reduseres*.

Eksempel 16
Hva er vekstfaktorene som svarer til en minking på 38 %? På 5 %? På 1,5 %? På 95 %?

38 % minking gir vekstfaktoren 100 % – 38 % = 62 % = 0,62.
5 % minking gir vekstfaktoren 100 % – 5 % = 95 % = 0,95.
1,5 % minking gir vekstfaktoren 100 % – 1,5 % = 98,5 % = 0,985.
95 % minking gir vekstfaktoren 100 % – 95 % = 5 % = 0,05.

Oppgave 18

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en minking på 17 %, 50 %, 6 %, 7,5 % og 0,5 %.

Oppgave 19

Hvor stor blir den nye verdien i forhold til den gamle hvis noe minker med 50 %?

Med 100 %? 

Oppgave 20

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Bruk vekstfaktor og regn ut verdien til bilen etter ett år

5. Flere prosentvise forandringer etter hverandre

Eksempel 17

I en frisørsalong kostet en hårklipp 400 kr. Ett år senere hadde prisen økt med 5 %, og etter enda ett år hadde den økt med 10 % til. Hva var prisen til slutt? Hvor mange prosent hadde prisen økt i løpet av disse to årene?

Vi bruker vekstfaktor og finner:

Pris etter ett år: $400 \text{ kr} \cdot 1{,}05 = 420 \text{ kr}$

Pris etter to år: $420 \text{ kr} \cdot 1{,}10 = 462 \text{ kr}$

$$\frac{462 \text{ kr}}{400 \text{ kr}} = 1{,}155 = 115{,}5\%$$

Prisen har økt med 115,5 % – 100 % = 15,5 %.

Legg merke til at den samlede prisøkningen er *mer* enn 5 % + 10 % = 15 %!

Det er ikke nødvendig å regne ut prisen etter ett år. Vi kan heller regne slik:

Pris etter to år: $400 \text{ kr} \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}10 = 462 \text{ kr}$

Oppgave 21

I 2010 var timeprisen på et bilverksted 900 kr. Den økte med 6 % i 2011 og 8 % i 2012. Hva var timeprisen i 2012? Hvor mange prosent steg timeprisen fra 2010 til 2012?

Løs helst oppgaven uten å regne ut timeprisen i 2011 (se eksempel 18).

Eksempel 18

Prisen på et klesplagg er 500 kr. Prisen minker først med 30 % og etter en stund øker den igjen med 30 %. Hva er prisen til slutt?

Prisen til slutt: $500 \text{ kr} \cdot 0{,}70 \cdot 1{,}30 = 455 \text{ kr}$

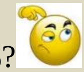
Hvorfor kommer ikke prisen tilbake til 500 kr i **eksempel 19**?

1. 30 % avslag på 500 kr blir 150 kr, slik at ny pris blir 350 kr.
2. Økningen på 30 % skal regnes av 350 kr, ikke 500 kr, slik at økningen blir bare 105 kr.
3. Sluttprisen blir da 455 kr.

Oppgave 22

Prisen på en vare var 200 kr. Den ble satt opp med 20 %. Salget gikk dårlig, så etter en stund ble prisen satt ned med 20 %. Hva ble da prisen til slutt? Hvorfor ble ikke denne prisen 200 kr?

Oppgave 23

Spiller det noen rolle for sluttprisen på en vare om den først stiger 30 % og så synker 20 %, eller om den først synker 20 % og så stiger 30 %? 

<u>Eksempel 19</u>

Sparing av penger på en bankkonto er en vanlig anvendelse av flere prosentvise tillegg. Hvis vi setter for eksempel 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en viss prosent av det beløpet vi har på kontoen. Renteprosenten forandrer seg ofte, men her antar vi at prosenten holder seg fast på 3 % gjennom mange år. Da regner vi slik:

Etter ett år har vi i banken: $10000 \text{ kr} \cdot 1{,}03 = 10300 \text{ kr}$.

Etter to år har vi i banken: $10300 \text{ kr} \cdot 1{,}03 = 10609 \text{ kr}$.

Etter tre år har vi i banken: $10609 \text{ kr} \cdot 1{,}03 = 10927{,}27 \text{ kr}$.

Vi ser at beløpet øker mer og mer for hvert år, fordi vi får rente også av de forrige års rente.

Hvis vi vil regne ut hvor mye vi har etter 10 år, kan vi regne ut det direkte ved å legge merke til at vi ganger med 1,03 for hvert år som går. 1,03 multiplisert med seg selv ti ganger kan vi skrive som potensen $1{,}03^{10}$, som er lik 1,343916.

Etter ti år har vi i banken: $10000 \text{ kr} \cdot 1{,}03^{10} = 13439{,}16 \text{ kr}$.

Legg merke til at penger i banken alltid regnes nøyaktig på øret, altså med to desimaler, selv om minste mynten som brukes nå er 1 krone.

Oppgave 24

Finn først ut hvordan du regner ut en potens på kalkulatoren din, for eksempel $1{,}035^{10}$.

Du setter 5000 kr i banken til 3,5 % årlig fast rente. Hvor mye har du i banken etter 5 år? Etter 10 år? Etter 20 år?

Eksempel 20

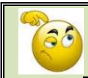
Det er vanlig å anta at verdien av en bil avtar med en fast prosent hvert år, inntil den blir vraket. En bil koster 380 000 kr som ny. Verdien minker 15 % i året i 10 år. Hvor mye er bilen verdt etter 10 år?

15 % minking svarer til vekstfaktoren 100 % –15 % = 85 % = 0,85. For hvert år som går, finner vi verdien ved å multiplisere forrige års verdi med 0,85. Etter 10 år har vi multiplisert nybilverdien med 0,85 10 ganger. Da får vi:

Verdien etter 10 år: $380000 \text{ kr} \cdot 0{,}85^{10} = 74800 \text{ kr}$ (litt avrundet).

Oppgave 25

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året, inntil ingen vil ha den lenger når den blir mer enn fem år. Hvor mye er PCen verdt etter 5 år?

 Eksempel 21

Årslønna til Mona var 389 500 kr i 2012. Den hadde økt med 2,5 % siden 2011. Hva var årslønna hennes i 2011?

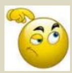
Husk at 2,5 % økning gir vekstfaktoren 100 % + 2,5 % = 102,5 % = 1,025.

$$x \cdot 1{,}025 = 389500$$

$$x = \frac{389500}{1{,}025} = 380000$$

Årslønna til Mona var 380 000 kr i 2011.

Oppgave 26

Tina veide 5150 g da hun var 7 uker gammel. Da hadde hun lagt på seg 12 % siden hun var 5 uker. Hvor mye veide hun da hun var 5 uker gammel? 

Eksempel 22

Prisen på en mobiltelefon er 3990 kr medregnet 25 % merverdiavgift (mva). Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften?

$$x \cdot 1{,}25 = 3990$$

$$x = \frac{3990}{1{,}25} = 3192$$

Prisen uten mva er 3192 kr.
Merverdiavgiften er 3990 kr – 3192 kr = 798 kr.

Oppgave 27

Prisen på et brød er 26,60 kr, medregnet 15 % mva. Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften på brødet?

Eksempel 23

Elevtallet i en klasse ved skoleslutt var 27. Det var 10 % *lavere* enn ved skolestart. Hvor mange elever var det ved skolestart?

Her er det så enkle tall at mange sikkert vil se svaret med en gang, men regnemåten er slik:

Her har elevtallet *minket* så vekstfaktoren må være mindre enn 1.
Vekstfaktoren er 100 % – 10 % = 90 % = 0,90.

$$x \cdot 0{,}90 = 27$$

$$x = \frac{27}{0{,}90} = 30$$

Det var 30 elever ved skolestart.

Oppgave 28

Etter at Jostein hadde vært på en ukes fottur, veide han 76 kg. Dette var 5 % mindre enn han veide like før turen. Hvor mye veide han før turen?

Oppgave 29

Hassan tjener 138 kr timen. Dette er 8 % mindre enn Saras timelønn. Hva er Saras timelønn?

Oppgave 30

I juni og juli 2013 ble det i Oslo anmeldt 88 innbrudd i villaer. Dette var en nedgang på 42,5 % fra året før. Hvor mange innbrudd ble anmeldt i 2012?

Eksempel 24

Prisen på en vare er satt opp med 5 % fire ganger. Nå koster den 243 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

Vekstfaktoren er 100 % + 5 % = 105 % = 1,05. Vi kaller den opprinnelige verdien for *x*. Da kan vi sette opp likningen

$$x \cdot 1{,}05^4 = 243$$
$$x \cdot 1{,}2155 = 243$$
$$x = \frac{243}{1{,}2155} = 200$$

Varen kostet opprinnelig 200 kr.

Oppgave 31

Verdien til en aksje har sunket 3 % fem ganger på rad. Nå er den verdt 89 kr. Hva var den verdt opprinnelig?

Blandede oppgaver

B1
(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)

Tidligere kostet en vare 50 kroner. Nå koster varen 90 kroner.
Hvor mange prosent har prisen økt med?

B2
Tidligere kostet en vare 90 kroner. Nå koster varen 50 kroner.
Hvor mange prosent har prisen minket med?

B3
(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)

I løpet av noen år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time.
Hvor mange prosent steg timelønnen?

B4
(Eksamen 1P våren 2015, Del 1)

Skriv som prosent

a) 0,451
b) $\frac{5}{25}$

B5
(Eksamen 2P våren 2015, Del 1)

En vare koster i dag 240 kr. Prisen er da satt ned med 20 %.

Hvor mye kostet varen **før** prisen ble satt ned?

B6
(Eksamen 2P våren 2016, del 1

I butikk A koster en vare 150 kroner. I butikk B koster den samme varen 120 kroner.

a) Hvor mange prosent høyere er prisen i butikken A sammenlignet med prisen i butikk B?

b) Hvor mange prosent lavere er prisen i butikk B sammenlignet med prisen i butikk A?

B7

a) I et borettslag ble det stemt over et forslag som krevde 2/3 flertall for å bli vedtatt. 46 av 74 stemte for forslaget. Ble forslaget vedtatt?

b) I et annet borettslag stemte 81 for og 39 mot et forslag som også krevde 2/3 flertall. Ble dette forslaget vedtatt?

B8

(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

Det bor ca. 7,2 milliarder mennesker på jorda. 15 % har ikke tilgang til rent vann.
Omtrent hvor mange mennesker har ikke tilgang på rent vann?

B9

(Eksamen 2P våren 2008, Del 2)

I butikker ser en ofte tilbud av typen ”Ta tre, betal for to”.
Du får altså tre varer til prisen for to.

a) En klesbutikk hadde et slikt tilbud på T-skjorter. Der kostet én T-skjorte 129 kroner. Hvor mange prosent avslag vil du få ved å benytte deg av tilbudet ”Ta tre, betal for to”?

b) I tegneseriestripen nedenfor har Pondus tolket tilbudet annerledes. Hvor mange prosent avslag fikk han?

B10

Hos en frisør betaler du full pris for de fire første klippene, men får 50 % rabatt på det femte. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du ser på disse fem klippene samlet?

B11
(Eksamen 2P våren 2011, Del 1)

Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din og fyll inn det som mangler.

Prosentvis endring	Vekstfaktor
+ 2 %	
- 68 %	
	0,25
	2

B12

a) I følge Aftenposten 20. juni 2013 har antall leverte brev per postkasse gått ned fra 750 i år 2000 til 450 i 2012. Hvor mange prosent har antall brev per postkasse minket?

b) Posten antar at i 2020 vil antall brev ha falt til 230 per postkasse i året. De sier at da har to tredjedeler av posten forsvunnet på 20 år. Undersøk om denne påstanden er riktig.

B13

(Eksamen våren 2013, Del 1)

En vare koster nå 210 kr. Prisen er da satt ned med 30 %.
Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

B14

I mai 2013 eksporterte norske bedrifter varer og tjenester for 72,9 milliarder kroner. Dette var 11,2 % mindre enn i mai 2012. Hvor stor var eksporten i mai 2012?

B15
(Eksamen 1P høsten 2012, Del 2)

Siri setter inn 12 000 kroner på en ny bankkonto. Hun lar pengene stå urørt og får 4,5 % rente per år.
Hvor mye vil hun ha på kontoen etter 15 år?

B16
(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Stian har en bil som i dag er verdt 270 000 kroner. Verdien til bilen har avtatt med 10 % det siste året. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 10 % hvert år i årene framover.

1) Hvor mye vil bilen være verdt om ett år?
2) Hvor mye var bilen verdt for ett år siden?

B17

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)

En vare selges i to forskjellige butikker. Prisen er den samme i begge butikkene. I butikk A settes prisen opp med 20 %. I butikk B settes prisen først opp med 10 % og så etter noen dager med 10 % til. Marit påstår at prisen da fremdeles er den samme i begge butikkene.

Forklar Marit hvorfor dette ikke er riktig. Bruk gjerne et eksempel når du forklarer.

B18
(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)

En bil koster 250 000 kroner. Bilens verdi avtar med 15 % per år.

Forklar hvilket av regnestykkene nedenfor som kan brukes for å finne hvor mye bilen er verd etter 10 år.

1) $250\ 000 - 10 \cdot \dfrac{250000 \cdot 15}{100}$

2) $250\ 000 \cdot 0{,}15^{10}$

3) $250\ 000 \cdot 0{,}85^{10}$

B19

Fra 2009 til 2012 steg norske boligpriser i gjennomsnitt med 8,3 % hvert år. Hvor mange prosent steg boligprisene totalt fra 2009 til 2012? (Nei, svaret er ikke 24,9 %!)

B20

(Eksamen 1P våren 2010, Del 2)

Ola skal bygge hus. Huset vil koste 2 300 000 kroner. Han har 150 000 kroner i banken. Resten må han låne. I Husbanken får han låne 80 % av det huset vil koste. Renten i Husbanken er 4 % per år. Resten av pengene må han låne i en privat bank til 6 % rente per år.

a) Hvor mye penger får Ola låne i Husbanken, og hvor mye må han låne i den private banken?
b) Hvor mange kroner må han til sammen betale i renter i Husbanken og den private banken det første året?

Ola kan trekke fra 28 % av rentekostnadene på skatten. Dette kalles et skattefradrag.

c) Hvor store blir renteutgiftene til Ola det første året, dersom vi tar hensyn til skattefradraget?

B21

En bensinstasjon reklamerer for bilvask: “Kjøp kupongkort med 5 vask, betal for 3. Spar 40 %.” Stemmer dette?

B22

(Eksamen 1P våren 2014, Del 2)

Prisen på en vare er satt opp 10 % fem ganger. Opprinnelig kostet varen 246 kroner.

a) Hvor mye koster varen nå?

b) Hvor mange prosent er prisen totalt satt opp?

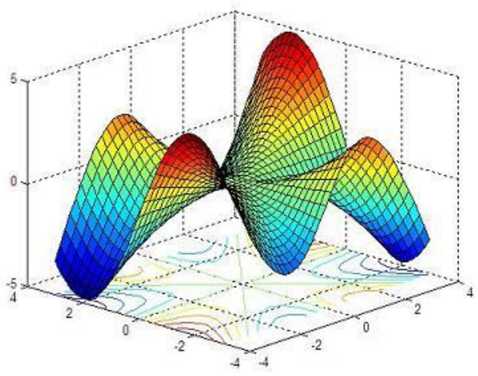
Prisen på en annen vare også satt opp 10 % fem ganger. Nå koster varen 550 kroner.

c) Hva kostet denne varen opprinnelig?

Fasit

Fasit øvingsoppgaver	**Fasit blandede oppgaver**
Oppgave 1 20 % Oppgave 2 20 % Oppgave 3 70 % , 30 % Oppgave 4 13,1 % Oppgave 5 33,3 % Oppgave 6 10 % Oppgave 7 15,3 % Oppgave 8 18 Oppgave 9 170 Oppgave 10 4 Oppgave 11 6,8 kg 5,2 kg 2,0 kg Oppgave 12 22,50 kr Oppgave 13 5000 kr Oppgave 14 32 timer Oppgave 15 1,17 1,60 1,06 1,075 1,005, 3 **Oppgave** 16 26,60 kr Oppgave 17 400 kr Oppgave 18 0,83 0,50 0,94 0,925 0,995 Oppgave 19 Halvparten, null Oppgave 20 357 000 kr Oppgave 21 1030 kr 14,48 % Oppgave 22 192 kr. Fordi grunnlaget før nedgangen er større enn før økningen. Oppgave 23 Nei Oppgave 24 5938,43 kr, 7052,99 kr, 9948,94 kr Oppgave 25 2326 kr Oppgave 26 4105 g Oppgave 27 23,13 kr, MVA er 3,47 kr. Oppgave 28 80 kg Oppgave 29 150 kr Oppgave 30 153 Oppgave 31 104 kr	B1 80 % B2 44,4% B3 15 % B4a) 45,1 % b) 20 B5 300 kr B6 a) 25 % b) 20 % B7 a) Nei b) Ja B8 1,08 milliarder B9 a) 33,3 % b) 60 % B10 10 % B11 1,02 0,32 -75% +100% B12 a) 40 % b) Ja, omtrent B13 300 kr B14 82,1 milliarder B15 23223,39 kr B16 1) 243 000 kr 2) 300 000 kr B18Alternativ 3 B19 27,0 % B20 a) 1 840 000 kr, 310 000 kr b) 92 200 kr c) 66384 kr B21 Ja B22a) 396 kr b) 61 % c) 341 kr

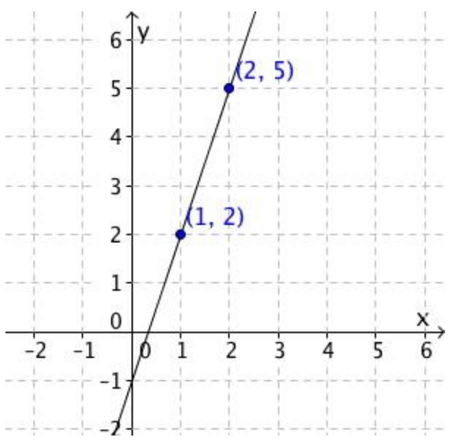
Kapittel 6. Funksjoner



Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hva en funksjon er.
- Lineære funksjoner.
- Framstille funksjoner som formel, verditabell og graf.
- Tegne grafer til funksjoner, både med blyant og dataprogrammet Geogebra.
- Proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser.
- Polynomfunksjoner.
- Finne skjæringspunkter mellom to grafer.
- Finne topp- og bunnpunkter på grafer.



Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

1. Noen begreper

1.1 Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

1.2 Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*. Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

1.3 Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

1.4. Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

2. Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

1) en *tabell*
2) en *graf*
3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.

Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for x.
Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for y.

2. 1 Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr
Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr
Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3{,}5 = 70$ kr

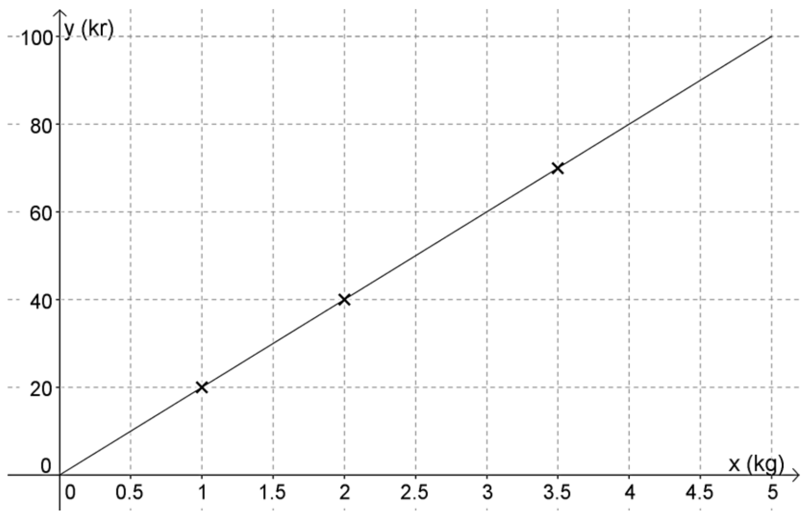
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (x) og prisen av posen (y) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenheten*e i tabellen.

2. 2 Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *grafen* til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

2.2.1 Å tegne en graf for hånd

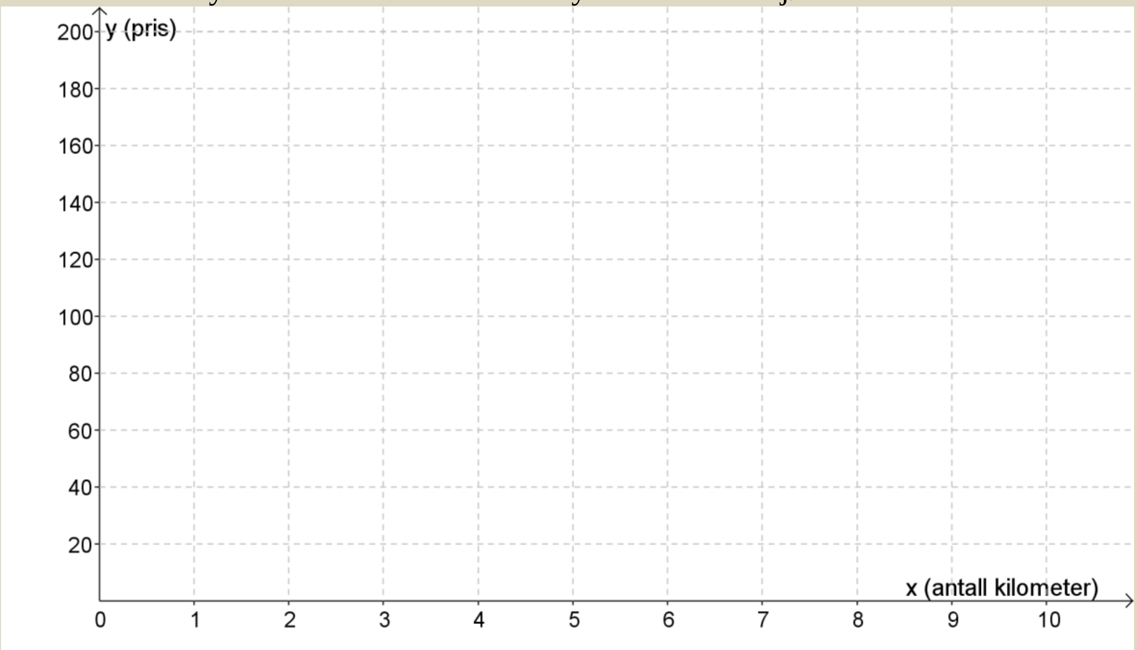
Oppgaven under kan du skrive rett inn i denne boka

Oppgave 1

Bergen taxi har en startpris på 60 kr. Det koster i tillegg 10 kr for hver kilometer. Da er prisen for noen utvalgte lengder gitt i tabellen:

x (antall km)	0	2	4	10
y (pris)	60	80	100	160

a) Tegn inn punktene i koordinatsystemet under, og trekk en rett linje mellom alle punktene med linjal.
b) Bruk koordinatsystemet til å finne ut hvor mye det koster å kjøre 6 km.



Trondheim Taxi tar 20kr i startpris, og 20 kr i tillegg for hver ekstra kilometer.
c) Hvor mye det vil koste å kjøre 0 km?______________________________
d) Hvor mye det vil koste å kjøre 1 km?______________________________
e) Hvor mye det vil koste å kjøre 2 km?______________________________
f) Hvor mye det vil koste å kjøre 8 km?______________________________
g) Fyll punktene inn i tabellen under.

x (antall km)	0	1	2	8
y (pris)				

h) Tegn punktene inn i koordinatsystemet over, og trekk en rett linje mellom punktene.
i) Hvor langt kan du kjøre for 100 kr med dette selskapet?_____________________
j) Hvor mange kilometer må du kjøre for at disse taxiselskapene skal være like dyre?________________________________

Oppgave 2

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

a) Hvor mye koster det å kjøre 0 km?
b) Hvor mye koster det å kjøre 1 km?
c) Hvor mye koster det å kjøre 5 km?
d) Fyll ut tabellen under

x (antall km)	0	5	10
y (pris)			

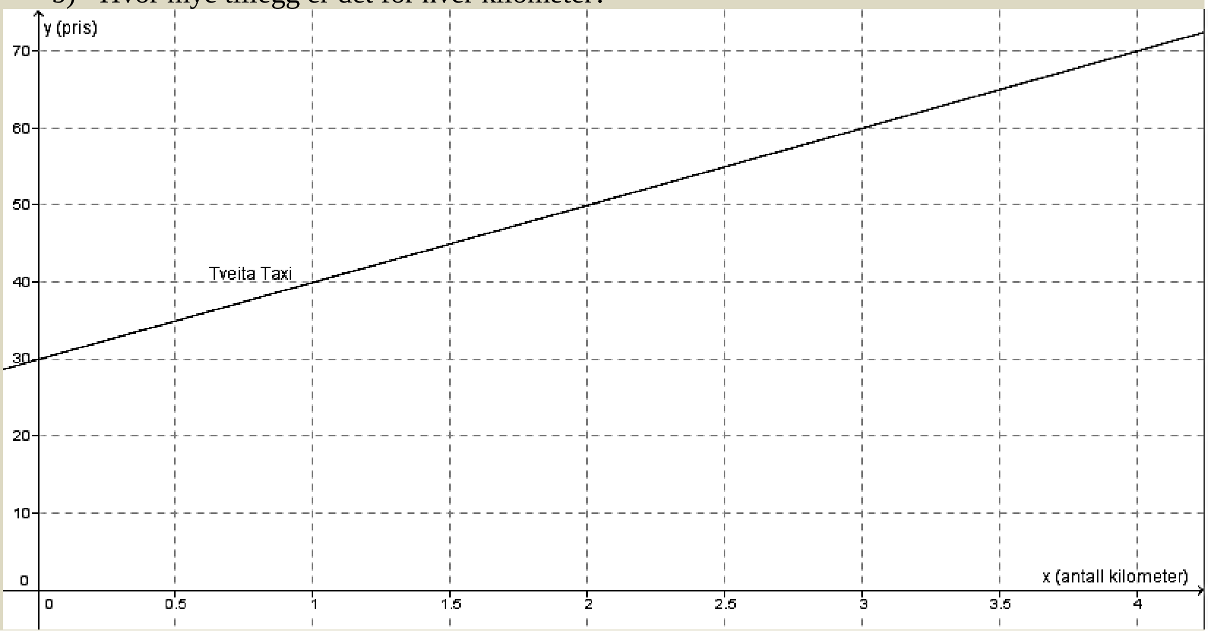
e) Tegn koordinatsystemet som viser sammenhengen mellom pris og antall kilometer for hånd. La x være mellom 0 og 10 km.

Huskeregler når du tegner koordinatsystem for hånd:
- Koordinatsystemet skal begynne fra null
- Det skal være like lang avstand mellom tallene på aksene
- Skriv navn på aksene
- Regn ut noen verdier for x og y, og plasser dette i koordinatsystemet.
- Trekk en rett linje mellom alle punktene, bruk linjal

Oppgave 3

Grafen under viser prisen for en tur med Tveita taxi.

a) Hva er startprisen hos Tveita taxi?
b) Hvor mye tillegg er det for hver kilometer?



2.3 Funksjonsuttrykk

For mange funksjoner kan vi lage en *formel* for å regne ut verdien til y når vi kjenner verdien til x. Denne formelen kaller vi *funksjonsuttrykket*.

I eksemplet med eplene ovenfor, ser vi at prisen for en kilo epler er 20 kr. Derfor kan regne ut prisen for en pose epler med denne oppskriften:

Prisen for en pose epler = 20 kr/kg · Antall kilo epler i posen

Dersom vi kjøper et visst antall kilo epler, som vi gjerne kaller x antall kilo epler, kan vi skrive det kortere slik:

$$y = 20 \cdot x$$

Ofte dropper vi gangetegnet mellom tallet og x, da blir uttrykket $20x$.

Oppgave 4

Lag en tabell som viser hvor mye det koster å kjøpe 1, 3 og 5 flasker brus hvis en flaske koster 15 kr.

a) Framstill disse tallene som tre punkter i et passende koordinatsystem og tegn grafen til funksjonen som viser sammenhengen mellom pris og antall flasker. Skriv passende enheter på aksene.
b) Les av på grafen hvor mye brus vi kan kjøpe for 60 kr.
c) Lag et funksjonsuttrykk for denne funksjonen.

Kommentar: Denne grafen og dette funksjonsuttrykket har egentlig bare mening når x er et helt positivt tall. Vi kan ikke kjøpe 1,4 flasker eller -2 flasker brus!

3. Skrivemåten *f*(*x*)

For å vise tydelig at y er en funksjon av x, skriver vi ofte $y = f(x)$. Vi leser det som "f av x".

Epleprisfunksjonen ovenfor kan vi da skrive $f(x) = 20x$.

Hvis vi skal regne ut hvor mye 1,8 kg epler koster, sier vi at vi regner ut funksjonsverdien for $x = 1{,}8$ og vi kan skrive dette slik:

$$f(1{,}8) = 20 \cdot 1{,}8 = 36$$

I praktiske oppgaver bruker vi av og til bokstaver som er litt mer selvforklarende. Eksempler:

- *Høyden* av et tre er en funksjon $h(t)$ av *tiden* som har gått etter planting.
- *Massen* til en aluminiumblokk er en funksjon $m(V)$ av *volumet*.

Vi kommer heretter til å bruke skrivemåtene "y =" og "$f(x)$ =" om hverandre.

Hvis funksjonsuttrykket viser en sammenheng mellom to størrelser fra "det praktiske liv", kaller vi det gjerne for en *matematisk modell* for denne sammenhengen. Hvis funksjonen er lineær, sier vi at det er en *lineær* modell.

4. Lineære funksjoner

De enkleste funksjonene er de hvor grafen er en *rett linje*. Slike funksjoner sier vi er *lineære*.

4.1 Grafen til en lineær funksjon

I del 1 til eksamen bør du kunne tegne grafen til en lineær funksjon som har "pene" verdier for stigningstall og konstantledd på papir og uten kalkulator.

Eksempel 4

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

a) 1) Hvor mye koster det å sette seg inn i taxien (kjøre 0 km)?
   2) Hvor mye koster det å kjøre 10 km?
   3) Hvor mye koster det å kjøre 20 km?
b) Sett inn hver av disse "turene" som punkter i et koordinatsystem der lengden på turen er langs x-aksen og prisen på turen langs y-aksen
c) Tegn grafen til denne funksjonen hvis vi ikke skal kjøre mer enn 20 km.
d) Les av på grafen hvor langt vi kan kjøre for 350 kr
e) Lag et funksjonsuttrykk for prisen y hvis vi kjører x km.

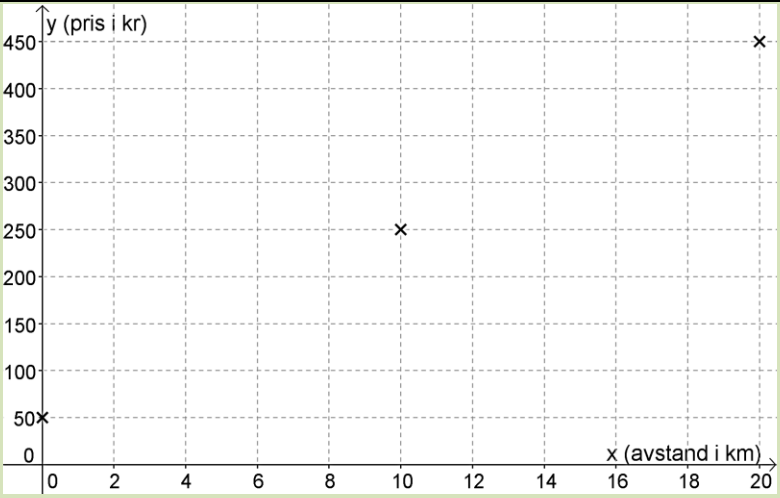
LØSNING

a) 1) Startprisen er 50 kr. Det koster 50 kr å sette seg inn i taxien.

2) $50 + 20 \cdot 10 = 50 + 200 = 250$ kr

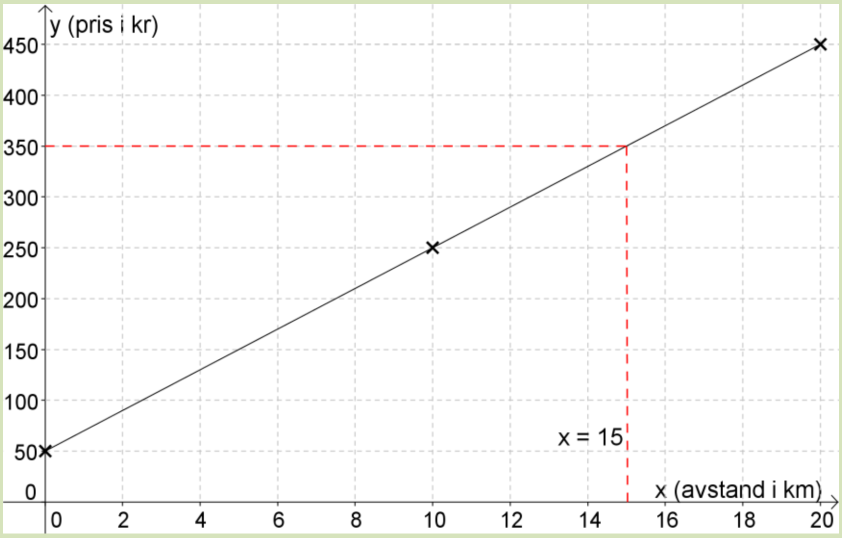
3) $50 + 20 \cdot 20 = 50 + 400 = 450$ kr

b) Vi lager nå et koordinatsystem hvor x-aksen går fra 0 til ca. 21 km, og y-aksen fra 0 til ca. 500 kr. Vi velger enhetene på aksene slik at grafen ikke blir svært liten, men likevel får plass på arket. Bruk blyant, ikke penn, til grafer!
Deretter merker vi av punktene. Hvis alt er gjort riktig, ligger de tre punktene på en rett linje



Denne linjen er grafen til taxiprisfunksjonen vår.

c) Vi trekker en vannrett linje gjennom y = 350 og finner skjæringspunktet:



Vi kan kjøre 15 km for 350 kr. Avlesninger skal merkes av slik vi har gjort over!

Oppgave 5

Jonas går på treningsstudio. Han betaler en fast månedsavgift på 150 kr. I tillegg betaler han 30 kr for hver treningstime. Han trener aldri mer enn 10 ganger på en måned.

a) Hvor mye betaler Jonas en måned han trener 5 ganger (medregnet den faste avgiften)?
b) Sett opp et funksjonsuttrykk som gir månedsprisen hvis han trener x ganger per måned.
c) Tegn grafen til denne funksjonen med papir og blyant, uten kalkulator.
d) Les av på grafen hvor mange ganger han kan trene for 330 kr. Merk av avlesningen og skriv et tekstsvar slik som i eksemplet ovenfor!

4.2 Stigningstall og konstantledd

Eksempel 5

Dette er eksempler på lineære funksjoner:

1) $y = 12x$
2) $f(x) = 12x + 20$
3) $f(x) = -16x + 90$
4) $y = 100 + 40x$
5) $f(x) = 200 - 25x$
6) $h(t) = 0,6t + 1,2$
7) $y = 60$

Alle disse eksemplene har formen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor a og b er konstanter (faste tall). Nedenfor finner du verdiene for a og b for sju funksjonene i eksempel 4. Sjekk at det stemmer og at du forstår:

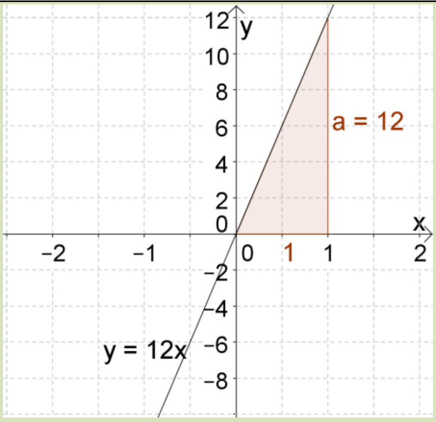
1) a = 12, b = 0 2) a = 12, b = 20 3) a = -16, b = 90 4) a = 40, b = 100
5) a = -25, b = 200 6) a = 0,6, b = 1,2 7) a = 0, b = 60

a kalles *stigningstallet* fordi verdien til a bestemmer hvor bratt grafen er.

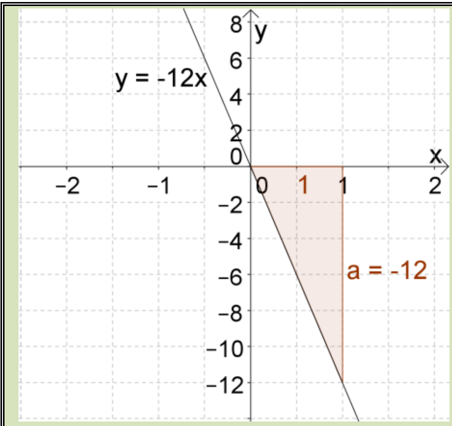
Hvordan bestemmer vi stigningstallet?
Stigningen (brattheten) er bestemt ved hvor mye linja stiger eller synker i y-retning (oppover), dersom vi øker med 1 i x-retning.

Eksempel 6

Linja $y = 12x$ har stigningstall 12.
Det betyr at linja stiger med 12 i y-retningen, hvis vi øker x-verdien med 1, se figuren under.



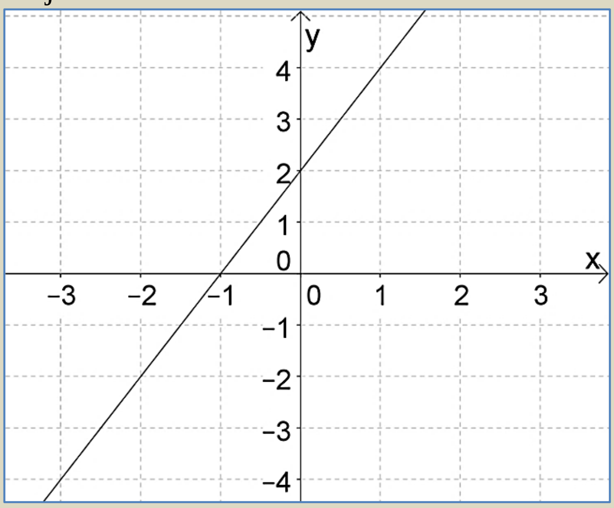
Linja $y = -12x$ har stigningstall -12.
Det betyr at linja synker med 12 i y-retningen, hvis vi øker x-verdien med 1, se figuren under.



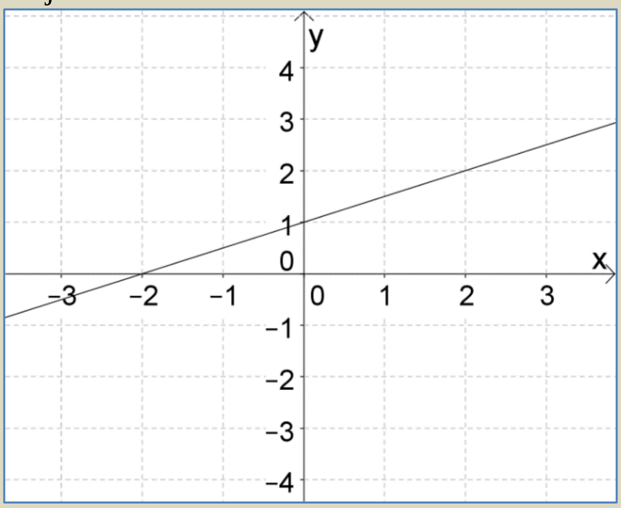
Oppgave 6

Nedenfor ser du to koordinatsystem med en linje i hver, linje A og linje B

Linje A:



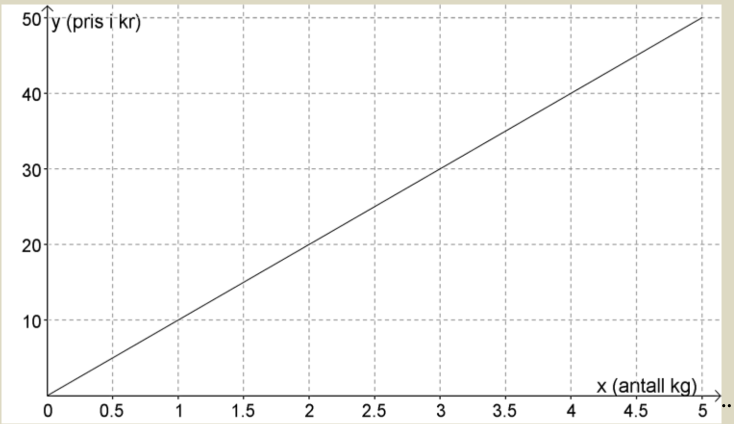
Linje B:



a) Hvilken linje er brattest?
b) Finn stigningstallet til linje A og stigningstallet til linje B

Oppgave 7

Grafen under viser sammenhengen mellom hvor mange kg epler vi kjøper og pris vi betaler



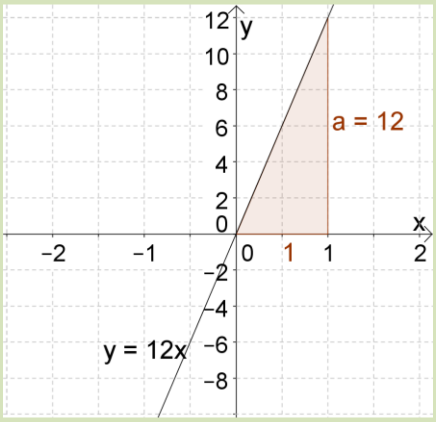
a) Hva er stigningstallet til denne grafen?
b) Hvor mye er prisen per kg epler?

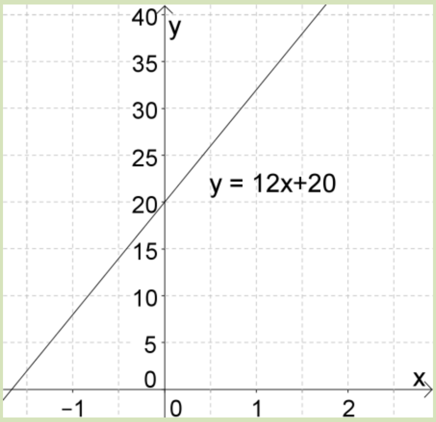
b kalles *konstantleddet* fordi dette leddet er et fast tall (en konstant) uansett hvilken verdi den variable størrelsen har.**Hvordan bestemmer vi konstantleddet?**

Konstantleddet er der grafen treffer y-aksen.

Eksempel 7:

Linja $y = 12x$ har konstantledd lik 0, det betyr at den går gjennom origo
Linja $12x + 20$ har konstantledd 20. Det betyr at den treffer y-aksen der $y = 20$





Oppgave 8

Finn konstantleddet til linje A og konstantleddet til linje B i oppgave 6

Oppgave 9

Finn konstantleddet til grafen i oppgave 7.

5. Bruk av Geogebra til å løse funksjonsoppgaver

5.1 Tegning av grafer i GeoGebra

Geogebra kan lastes ned gratis fra internett. Skjembildene nedenfor er fra Windows-versjonen. Kommandoene i Mac-versjonen kan være litt annerledes.

<u>Eksempel 8:</u>
Vi skal skrive inn funksjonen for et taxiselskap som koster 50 kr som startavgift, og deretter 20 kr per km. Da blir uttrykket $f(x) = 20x + 50$, der x er avstanden i km. Vi tenker oss at taxiene kjører mellom 0 km og 20 km.

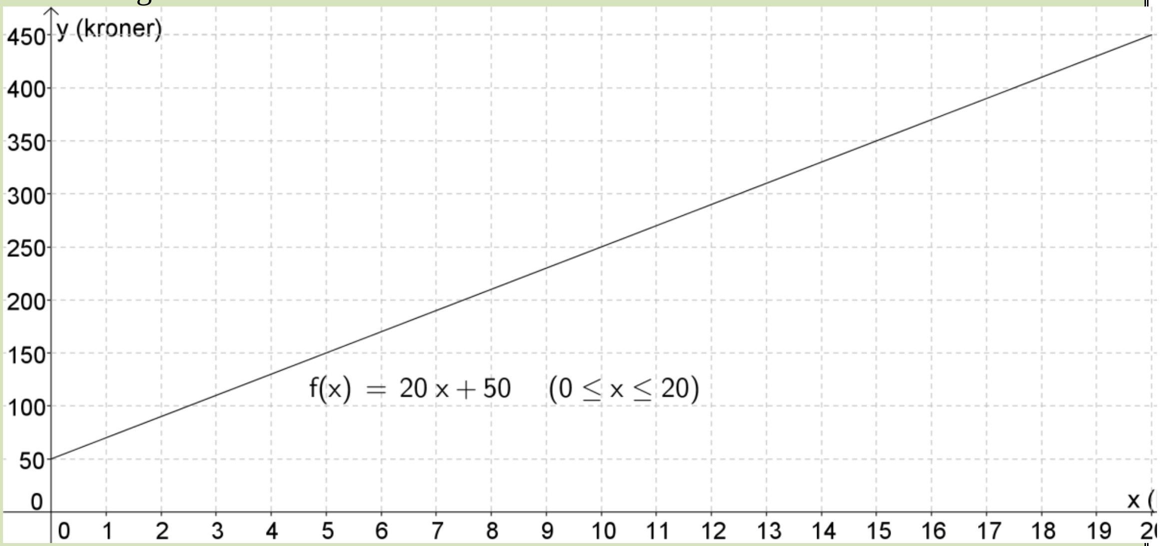
1. Begynn å skrive ordet Funksjon i inntastingsfeltet og velg kommandoen:
   Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]
   Skriv det inn slik i inntastingsfeltet:

2. For å få grafen innenfor vinduet må vi justere på aksene, da velger vi dette pil-symbolet på verktøylinjen: 
   Da kan vi etter tur plassere markøren over *x*- og *y*-aksen slik at den blir en dobbeltpil. Da kan vi "dra" i aksene slik at vi ser hele grafen. Grafen skal dekke hele vinduet:

3. Alle grafer skal ha en passende tekst på aksene. Vi klikker på pilikonet øverst til venstre, og høyreklikker i grafikkfeltet. Da får vi opp denne menyen, hvor vi velger **Grafikkfelt** nederst:

Det kommer opp et vindu hvor vi bl.a. kan skrive inn tekst på aksene. I dette eksemplet skriver vi x (km) for x-aksen og y (kroner) på y-aksen.

4. Til slutt kan vi merke funksjonsuttrykket og “dra” det over i grafikkfeltet. Da får vi denne grafen:

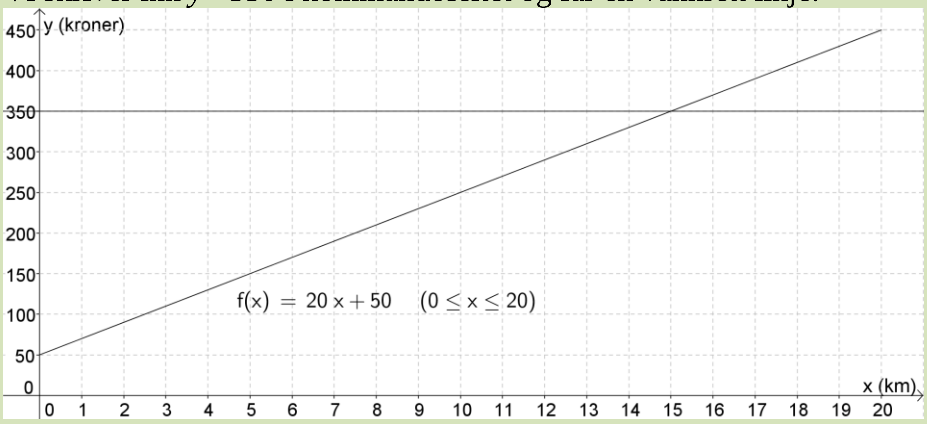


Kopier over i et Word-dokument og skriv ut.

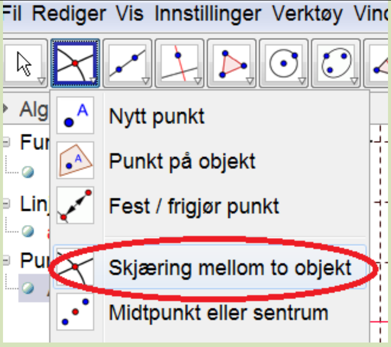
5.2 Grafisk løsning via GeoGebra.

Så skal vi bruke Geogebra til å finne ut hvor langt vi kan kjøre for 350 kr. Her er det lett å lese av direkte, men vi bruker likevel en metode som virker selv når det er umulig å se svaret nøyaktig rett fra grafen.

1. Vi skriver inn y= 350 i kommandofeltet og får en vannrett linje.

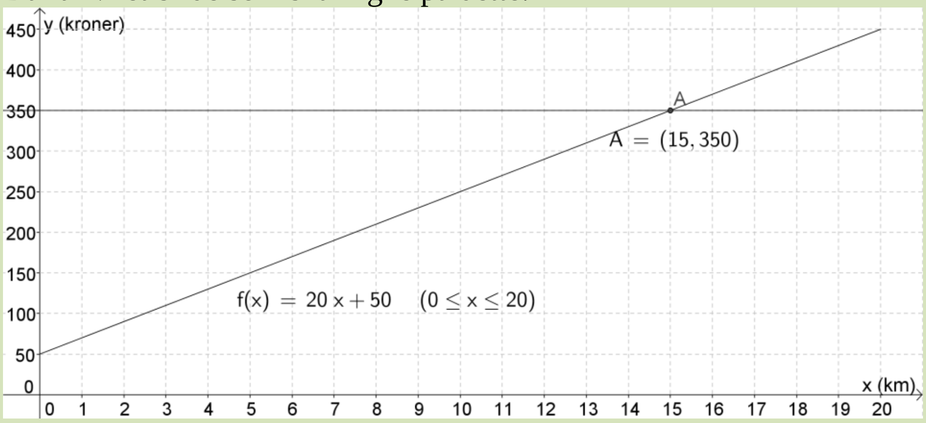


2. Vi finner skjæringspunktet mellom de to grafene ved å velge:



Når vi klikker i skjæringspunktet slik at begge linjene blir tykkere, får vi avmerket skjæringspunktet.

Vi vil vise koordinatene, og får fram disse ved å velge **Flytt**-knappen  , markere punktet og "dra" det over i koordinatsystemet
Da får vi et bilde som skal ligne på dette:



3. Vi avslutter med å skrive et tekstsvar *og* en forklaring på hva vi har gjort.
   Tekstsvar: <u>Vi kan kjøre 15 km for 350 kr</u>

Forklaring: Skrev inn y =350. Brukte "Skjæring mellom to objekt"
Kopier grafen til et word-dokument og skriv det ut derfra.

Oppgave 10

Tegn linjene nedenfor i GeoGebra. Ta ett skjermbilde per graf.

a) $y = 10x + 150$, la x være mellom 0 og 20 (Start = 0, Slutt = 20)
b) $y = 7.5x + 250$, la x være mellom 0 og 20
c) $y = 80 - 2x$, la x være mellom 0 og 12
d) $y = 600 - 15x$, la x være mellom 0 og 12

Oppgave 11

Jon er medlem på treningssenter. Han betaler 180 kr fast per måned og 30 kr per gang. Dersom antall ganger han trener kalles x, kan vi skrive uttrykket som $y = 30x + 180$

a) Tegn grafen til utrykket dersom han trener mellom 0 og 15 ganger i løpet av en måned.
b) Bruk grafen til å finne ut hvor mye han betaler når han trener 10 ganger
c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange ganger i løpet av en måned han kan trene for 600 kr.

Oppgave 12

Anna har et mobilabonnement der hun for samtaler betaler 0,25 kr i fast startavgift pluss 0,45 kr per minutt. Dersom vi snakker i x minutter kan vi skrive funksjonen som $y = 0{,}45x + 0{,}25$

a) Tegn grafen til uttrykket dersom samtalene varer mellom 0 og 60 minutter.
b) Hvor mye betaler hun for en samtale som varer i en halvtime?
c) Hvor lenge kan hun snakke for 10 kroner?

Oppgave 13

Mona leser en bok som har 300 sider. Hver dag leser hun 12 sider. Etter x dager kan antall sider hun har igjen å lese skrives som $y = 300 - 12x$

a) Hun bruker 25 dager på å lese boka. Tegn grafen til uttrykket for x fra 0 til 25.
b) Bruk grafen til å finne ut hvor mange sider har hun lest etter 20 dager
c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange dager det tar før hun har lest 100 sider.

6.Finne funksjonsuttrykket når grafen er kjent

Nå skal vi bruke grafen til en lineær funksjon til å finne ut *hvilken* funksjon vi ser grafen til.

6.1 Positivt stigningstall

Eksempel 9

Grafen nedenfor viser høyden til et tre på forskjellige tider etter at det ble plantet.

a) Hvor høyt var treet da det ble plantet?
b) Hvor mye har treet vokst på ett år?
c) Skriv opp et funksjonsuttrykk som viser høyden *y* etter *x* år.

LØSNING:

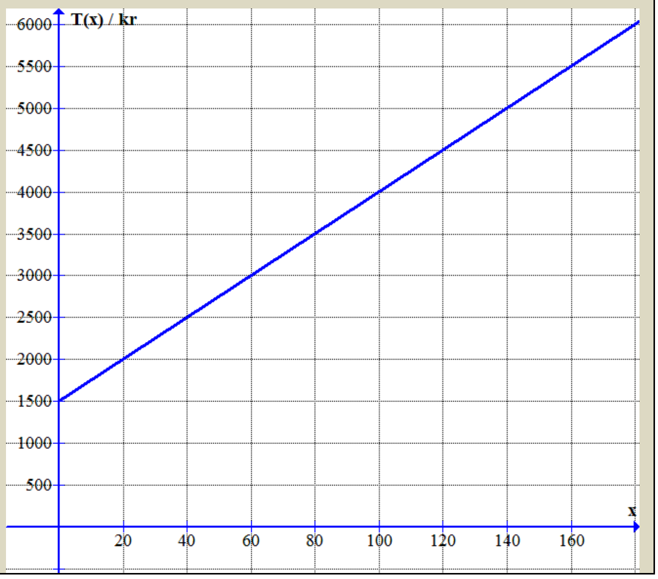
a) Da treet ble plantet, var $x = 0$. Da ser vi at $y = 50$. Treet var 50 cm.
b) I slike oppgaver er det ofte vanskelig å lese av nøyaktig hvor mye *y* har forandret seg på *ett* år. Da kan vi isteden lese av koordinatene til to punkter på grafen som det er enklere å finne nøyaktige verdier til. Her bruker vi de to avmerkede punktene. Da ser vi at treet har vokst fra 50 cm fra starten $(x = 0)$ til 250 cm etter 5 år.

   Det har altså vokst 250 cm – 50 cm = 200 cm på 5 år.
   Da blir veksten på ett år: $\frac{200}{5} = 40$ cm per år.
c) Her fant vi stigningstallet i oppgave b og konstantleddet i oppgave a.
   Funksjonsuttrykket blir derfor $y = 40x + 50$

Oppgave 14

Sana går ofte på treningsstudio. Hun betaler en årsavgift og i tillegg et fast beløp for hver time. Grafen til høyre viser utgiftene hennes $T(x)$ i treningsstudioet hvis hun trener x timer i året.

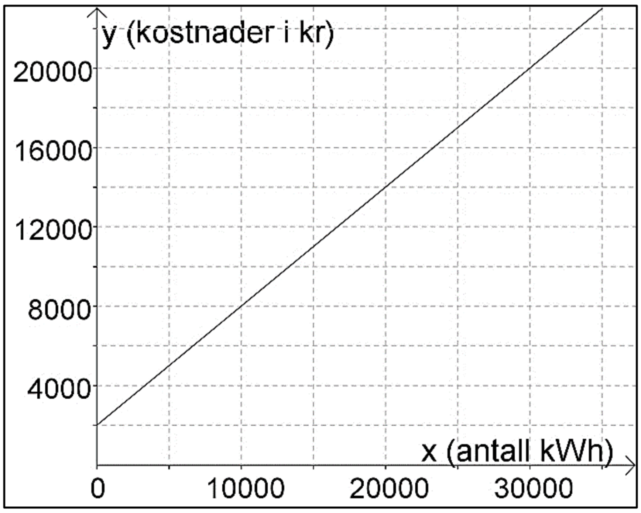
a) Hvor stor er årsavgiften?
b) Hvor mye betaler hun for *en* treningstime?
c) Sana vil ikke bruke mer enn 4000 kr i året på treningen. Hvor mange timer i året kan hun trene da?
   Løs oppgaven ved å lese av på grafen.
d) Skriv opp funksjonsuttrykket for $T(x)$.



Oppgave 15

Figuren til høyre viser hvordan de årlige strømutgiftene K(x) i en bolig er avhengig av energi¬forbruket x målt i kilowattimer (kWh). Utgiftene består av et fast årlig beløp pluss en del som bestemmes av en pris for hver kWh og antall kWh som er brukt i løpet av året.

a) Hvor stort er det faste årlige beløpet?
b) Hva er prisen for hver kilowattime?
c) Hvor mye koster det å bruke 18 000 kWh på ett år?
d) Finn ved å bruke figuren hvor mye energi vi kan bruke hvis utgiftene ikke skal bli større enn 14 000 kr.
e) Bestem funksjonsuttrykket til K(x).



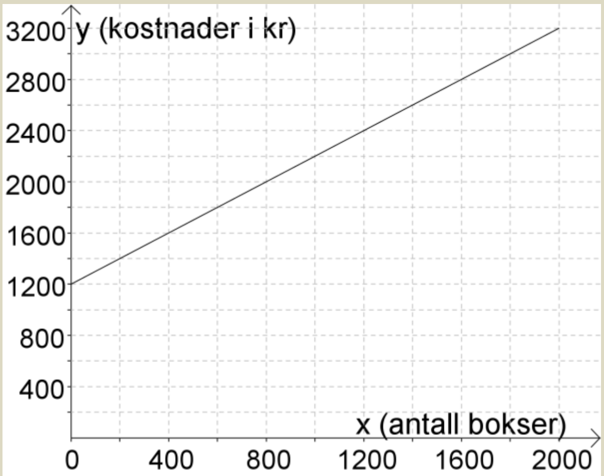
Oppgave 16

En maskin som lager metallbokser, kan produsere inntil 2000 bokser på en dag. Grafen til høyre viser kostnadene K i kroner per dag som funksjon av dagsproduksjonen av bokser.

a) Bruk grafen til å finne de faste kostnadene for maskinen per dag. (Med *faste kostnader* mener vi her hva det koster å betale ned på det som maskinen kostet i innkjøp, pluss utgiftene med å holde den i gang).

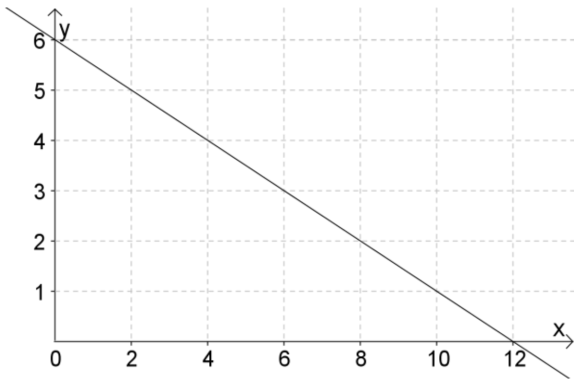
b) Hvor mye koster det å øke produksjonen med én boks?

c) Finn et funksjonsuttrykk for kostnaden $K(x)$ per dag når det blir produsert x bokser.



6.2 Negativt stigningstall

Hvis stigningstallet er *negativt*, vil y *minke* når x øker. Da synker linja mot høyre (se figur).



Hva er stigningstallet til linja til venstre?

Skriv svaret på linja under:

____

Hvorfor?

____

Eksempel 10

Abdi har 1500 kr. Hver dag bruker han 100 kr.

a) Lag en funksjon $f(x)$ som viser hvor mye penger han har igjen etter x dager.
b) Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for $f(x)$.
c) Tegn grafen til funksjonen for passende verdier av x.

a) For å gjøre det lettere å tenke, kan vi først regne ut hvor mye han har igjen etter én dag, etter to dager, etter tre dager osv.

Etter én dag: 1500 – 100 = 1400 kr

Etter to dager: $1500 - 100 \cdot 2 = 1500 - 200 = 1300$ kr

Etter tre dager: $1500 - 100 \cdot 3 = 1500 - 300 = 1200$ kr

Etter x dager: $1500 - 100 \cdot x$

Det han har igjen etter x dager kan vi da regne ut med funksjonen $f(x) = 1500 - 100x$.

b) Det er kanskje lettere å se stigningstallet og konstantleddet hvis vi skriver konstantleddet til slutt istedenfor først. Da blir funksjonen $f(x) = -100x + 1500$.

Stigningstallet er – 100 kr/dag, og konstantleddet er 1500 kr.

c) Hvis vi regner litt eller ser på grafen, finner vi ut at pengene hans er oppbrukt etter 15 dager. Det er derfor naturlig å tegne grafen for x mellom 0 og 15. Da blir den omtrent slik:

Oppgave 17

En kopimaskin koster 64 000 kr. Vi regner med at verdien av maskinen avtar (minker) med 8000 kr i året.

a) Finn funksjonsuttrykket $V(x)$ som viser verdien av maskinen etter x år.
b) Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for $V(x)$.
c) Hvor lang tid tar det før kopimaskinen har verdi null?
d) Tegn grafen til funksjonen.
e) Hvor lang tid går det før verdien er halvert?

Oppgave 18

Tony har fått et rentefritt lån på 4000 kr hos foreldrene sine. Han betaler tilbake 250 kr hver måned.

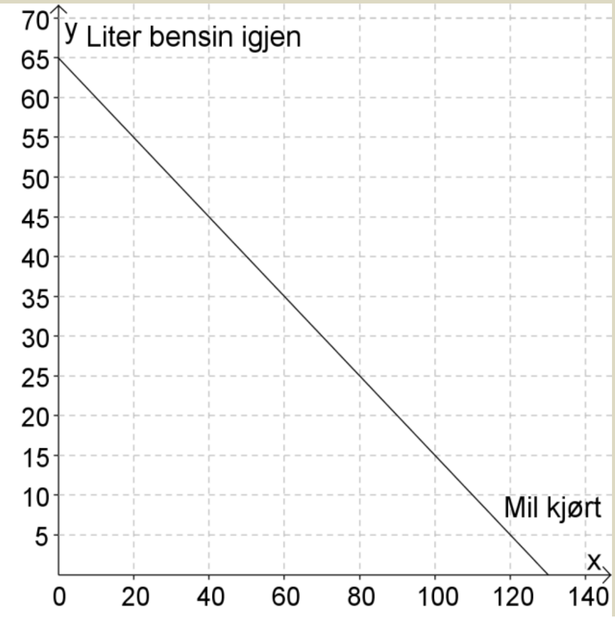
a) Lag en funksjon $S(x)$ som viser hvor mye han skylder foreldrene etter x måneder.
b) Tegn grafen til funksjonen.
c) Hvor mye er det igjen av lånet etter ett år?

d) Hvor lang tid tar det før lånet er nedbetalt, det vil si at han ikke lenger skylder penger?

Oppgave 19

En bilfører fyller bensintanken helt full før han drar ut på langtur. Veien, farten og kjørestilen er slik at han bruker omtrent like mye bensin per mil på hele turen. Grafen til høyre viser hvor mye bensin $b(x)$ det er på tanken etter at han har kjørt x mil etter at tanken ble fylt.

a) Hvor mange liter går det på tanken?
b) Hvor mye bensin bruker han per mil?
c) Skriv opp funksjonsuttrykket for $b(x)$.
d) Etter omtrent hvor mange mil er tanken halvfull?
e) Han fyller bensin på nytt når det er igjen 10 % av full tank. Etter omtrent hvor mange mil fyller han?



Av og til kan stigningstallet være positivt og konstantleddet *negativt*.

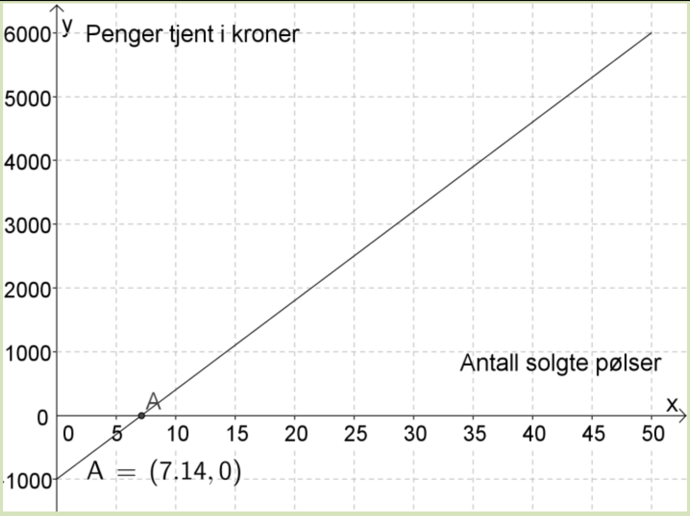
Eksempel 11

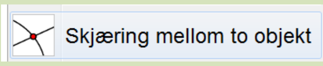
En pølseprodusent selger spekepølser på en varemesse. For å få lov til å stå på en stand på messen, må han betale en avgift på 1000 kr til arrangøren. Pølsene blir solgt for 140 kr per pølse.

a) Hvor mye tjener han hvis han selger
   1) 5 pølser? **Avgiften skal regnes med**
   2)10 pølser? **Avgiften skal regnes med**.
b) Lag en funksjon som viser hvor mye han tjener hvis han selger x pølser.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn grafen til funksjonen hvis han regner med å selge maksimalt 50 pølser på messen.
e) Hvor mange pølser må han selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen

LØSNING:

a) 1) Med et salg på 5 pølser blir fortjenesten $140 \cdot 5 - 1000 = 700 - 1000 = -300$.
   Den negative fortjenesten betyr at han taper 300 kr hvis han bare selger 5 pølser.
   2) Med et salg på 10 pølser blir fortjenesten $140 \cdot 10 - 1000 = 1400 - 1000 = 400$.
   Han tjener 400 kr hvis han selger 10 pølser.
b) $f(x) = 140x - 1000$
c) Stigningstallet er 140 kr/pølse og konstantleddet er -1000 kr.
d) Her er grafen:



e) Når linja ligger under x-aksen går han med underskudd. Vi må altså finne punktet der grafen treffer x-aksen, det gjør vi ved å bruke knappen for skjæring mellom to objekt 

og så klikke ved skjæringspunktet. Da finner vi at fortjenesten blir positiv når x er større enn 7,1. (Se grafen, punkt A). Han må altså selge 8 pølser for å gå med overskudd.

Oppgave 20

Lotte selger jordbær på torget. Hun må betale en avgift på 100 kr dagen for få stå der. Hun tjener 8 kr på hver jordbærkurv hun selger.

a) Hvor mye tjener hun hvis hun selger
   1) 10 kurver?
   2) 30 kurver?
b) Lag en funksjon som viser hvor mye hun tjener hvis hun selger x kurver.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn grafen til funksjonen hvis hun regner med å selge maksimalt 100 kurver på en dag.
e) Hvor mange kurver må hun selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen.

Oppgave 21

Temperaturen i en fryseboks er – 18 grader. Strømmen går og temperaturen øker med 2 grader/time inntil strømmen kommer tilbake etter 15 timer.

a) Hva er temperaturen i fryseboksen
   1) Etter 3 timer?
   2) Etter 12 timer?
b) Lag en funksjon $T(t)$ som viser temperaturen i boksen etter t timer.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn en graf som viser temperaturen i boksen som funksjon av tiden.
e) Finn ved avlesning på grafen og ved å løse en likning når temperaturen har steget til 0 grader.

Oppgave 22

Ali arbeider i en salatbar. Han tjener 120 kr per time, men blir trukket 50 kr per dag for mat. Ali arbeider inntil åtte timer om dagen.

a) Lag en funksjon $L(x)$ som viser lønna hans for en dag, fratrukket beløpet for maten, dersom han jobber x timer denne dagen.
b) Tegn grafen til denne funksjonen.
c) Hvor mye tjener Ali hvis han arbeider fire timer?
d) Hvor mange timer arbeidet han en dag hvor han tjente 670 kr?

7. Skjæring mellom to grafer

Noen oppgaver handler om *to* funksjoner. Typiske spørsmål handler om å finne for hvilken verdi av x disse funksjonene har *samme* verdi, eller for hvilke verdier av x den ene funksjonen har *større* verdi enn den andre. Dette kan vi løse ved å finne skjæringspunktet mellom grafene eller ved å løse en likning.

Eksempel 12

I bilutleiefirma A må man betale 500 kr i fast avgift og 3 kr per kjørt km. I firma B er det 800 kr i fast avgift og 2 kr/km.

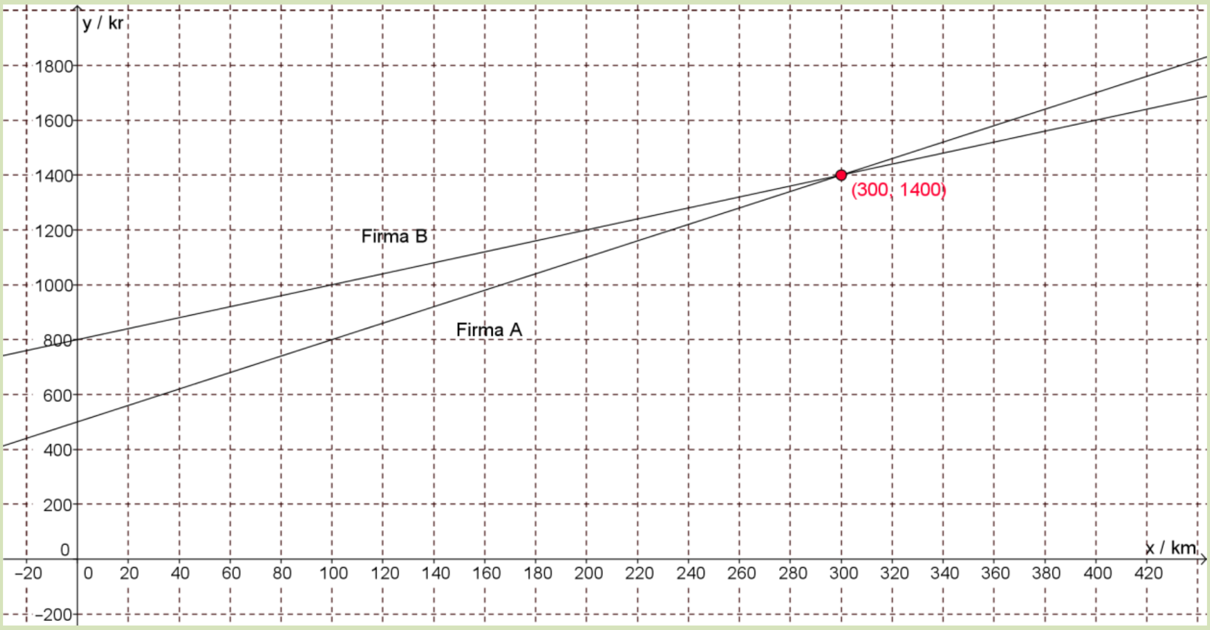
Hvor langt må man kjøre for at det skal lønne seg å bruke firma B?

De to funksjonene som beskriver hvor mye det koster å kjøre x km er

$$A(x) = 3x + 500, \qquad B(x) = 2x + 800 .$$

Her vet vi ikke noen passende største verdi for x så vi skriver inn funksjonene i Geogebra akkurat slik de står ovenfor. Vi drar i aksene til vi tydelig ser skjæringspunktet. Vi finner skjæringspunktet nøyaktig med kommandoen **Skjæring mellom to objekt** slik vi har gjort før.

Her har vi også lagt til tekst i bildet ved hjelp av tekstverktøyet i Geogebra.



Vi ser at firma B er billigst hvis vi kjører mer enn 300 km.

Vi kan også finne når firmaene koster like mye ved å løse en likning:

$$3x + 500 = 2x + 800$$
$$3x - 2x = 800 - 500$$
$$x = 300$$

Oppgave 23

Reisekostnadene ved å bruke to ulike taxiselskaper, A og B, er gitt ved funksjonene

$$A(x) = 12x + 30, \quad B(x) = 9{,}50x + 65$$

der x er antall kilometer vi reiser. Reisen overstiger ikke 35 km.

a) Tegn grafen til A(x) og B(x) i samme koordinatsystem.
b) Finn grafisk hvor langt vi må kjøre for at selskap B skal være billigst.

Oppgave 24

Frida og Guri blir enige om å spare penger til en ferietur. Frida har 2200 kr og sparer 120 kr i uka. Guri har ingen penger, men sparer 250 kr i uka.

a) Hvor mye har
   1) Frida etter ti uker?
   2) Guri etter ti uker?
b) Hvor mye har
   1) Frida etter tjue uker?
   2) Guri etter tjue uker?
c) Vi kaller de beløpene etter x uker for $F(x)$ og $G(x)$. Skriv opp disse funksjonsuttrykkene.
d) Tegn grafene til F og G for 26 uker (et halvt år).
e) Hvor mange uker går det før de to har like mye?
f) Hvor mange kroner har de da?

Oppgave 25

Magnus er medlem av en bowlingklubb. Medlemsavgiften er 700 kr, og han betaler 18 kr for hver runde. Jørgen bowler sammen med Magnus, men er ikke medlem. Han betaler derfor 30 kr for hver runde. Jørgen regner med at han kommer til å spille maksimalt 100 runder i året.

a) Bestem de to kostnadsfunksjonene $M(x)$ og $J(x)$ som beskriver utgiftene til Magnus og Jørgen.
b) Tegn grafene til de to funksjonene i samme koordinatsystem og finn hvor mange runder Jørgen må spille i året for at det skal lønne seg for ham å tegne medlemskap.

8. Polynomfunksjoner

"Polynom" betyr "flere ledd". En polynomfunksjon består av en sum av potenser av *x*. Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*
Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon.*

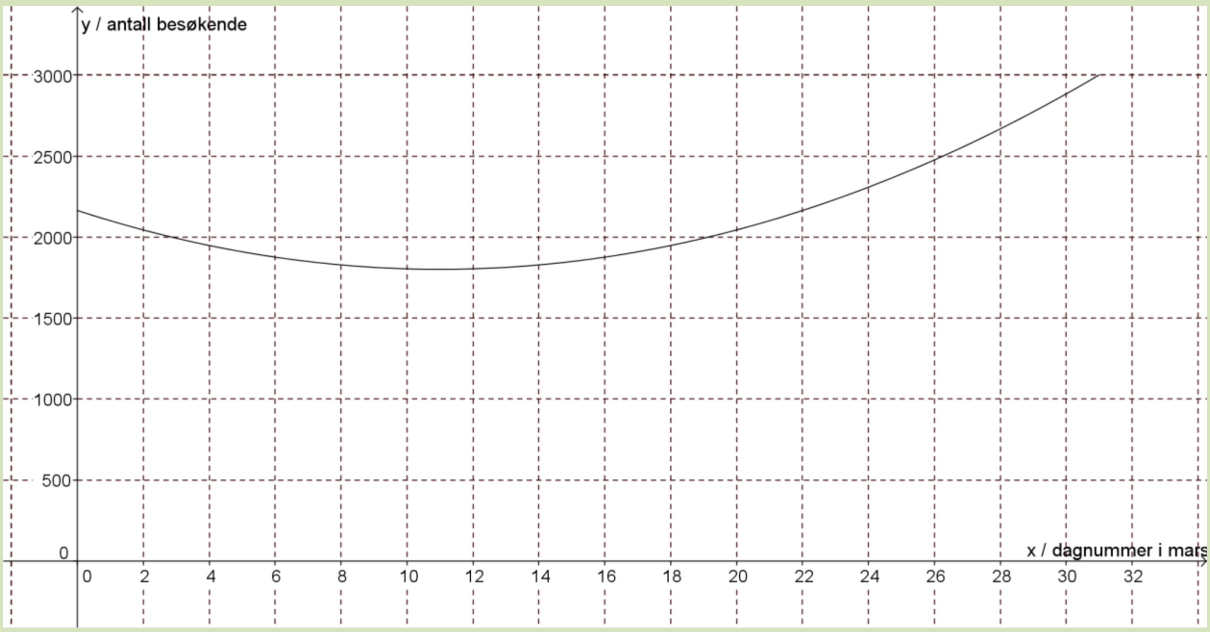
Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene *f* og *g* ovenfor.

Ekstremalpunkt

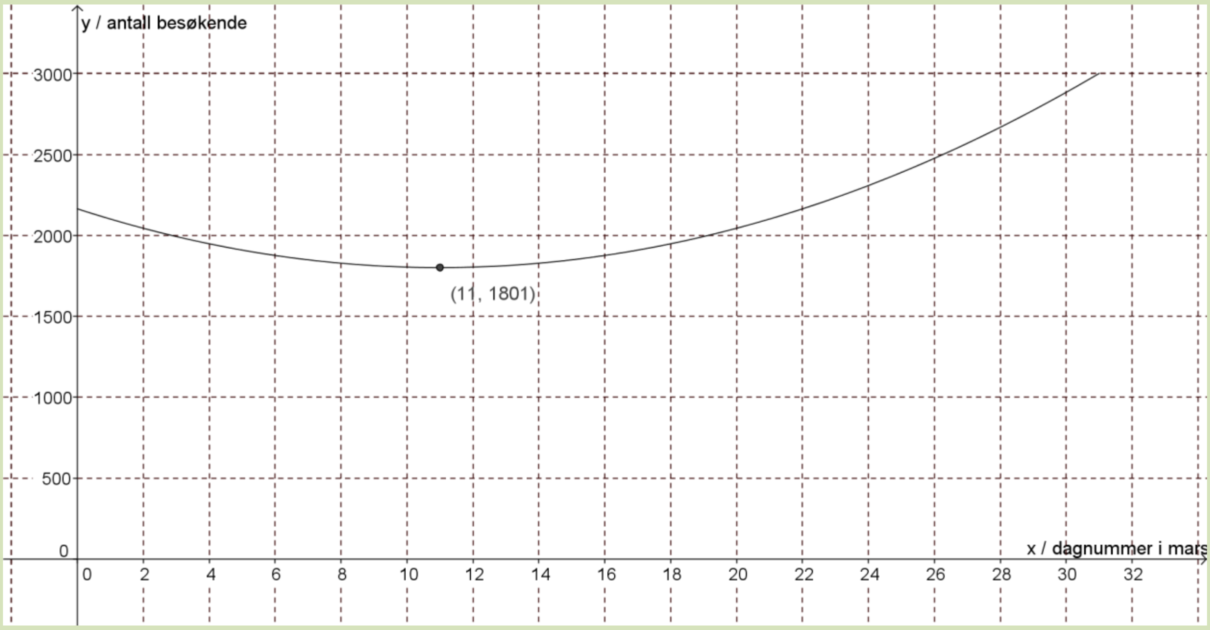
I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

Eksempel 13
Funksjonen $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$ er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret *x* i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.
Tegn grafen til funksjonen når *x* ligger mellom 1 og 31.
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon[3x^2 – 66x + 2164,0,31].** Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra $x = 0$ til $x = 31$. Så skriver vi en passende tekst på aksene. Etter å ha justert aksene, skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet $f(x)$. For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt[f].**



Vi ser at det var færrest besøkende for $x = 11$, altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

Oppgave 26

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$, der x er prisen på en enhet av varen i kroner.

a) Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 100.

b) For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

Oppgave 27

Funksjonen $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$ beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune x år etter år 2000. $x = 0$ er altså år 2000, $x = 1$ er år 2001 osv.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.
Her må du altså la x ligge mellom 0 og 13.

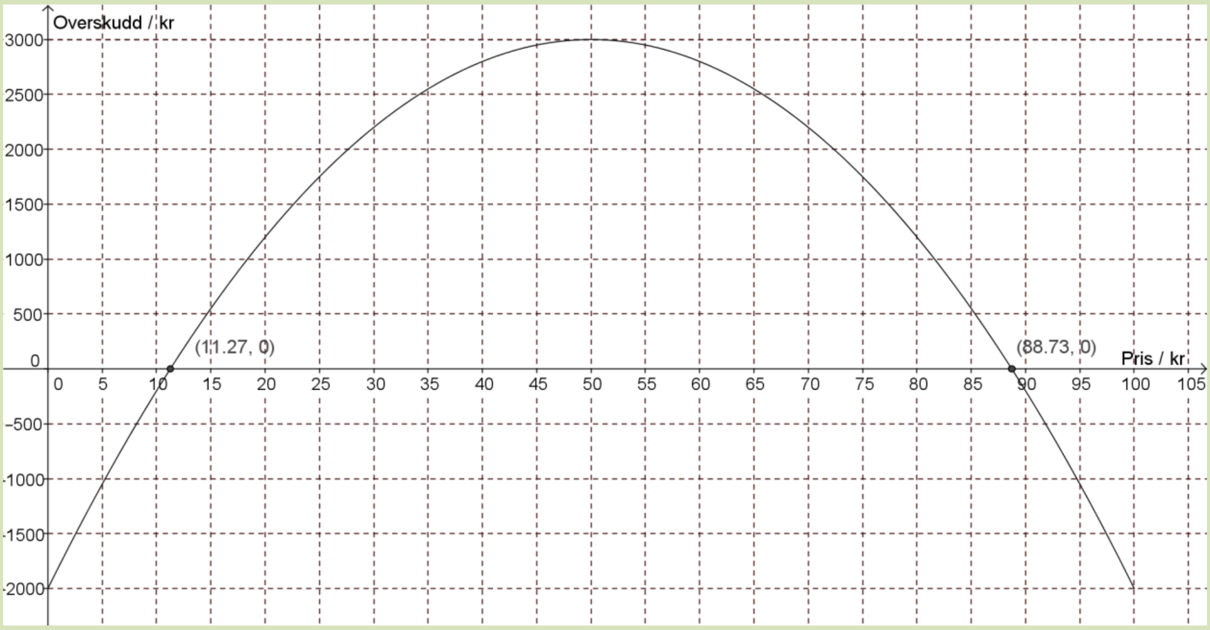
b) Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

9. Nullpunkt

Et punkt der en funksjon treffer *x*-aksen kalles *nullpunkt*. Da er funksjonsverdien lik null. Vi ser først på et eksempel på hvordan vi finner nullpunkter i Geogebra.

Eksempel 14

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 26. Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-2x^2+200x-2000,0,100].** Geogebra kaller funksjonen for *f*. Vi bruker "Skjæring mellom to objekt" og klikker der grafen treffer x-aksen.



Det ene nullpunktet er $x = 11.27$, og har koordinatene (11.27 , 0). Alle nullpunkt vil ha *y*-koordinat 0. Det andre nullpunktet er $x = 88.73$, og har koordinatene (88.73 , 0).

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under *x*-aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer *x*-aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.
Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.
Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

Oppgave 28

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$, der *x* er prisen på en enhet av varen.

a) Tegn grafen. La *x* ligge mellom 0 og 300.
b) For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
c) Når går bedriften med overskudd?

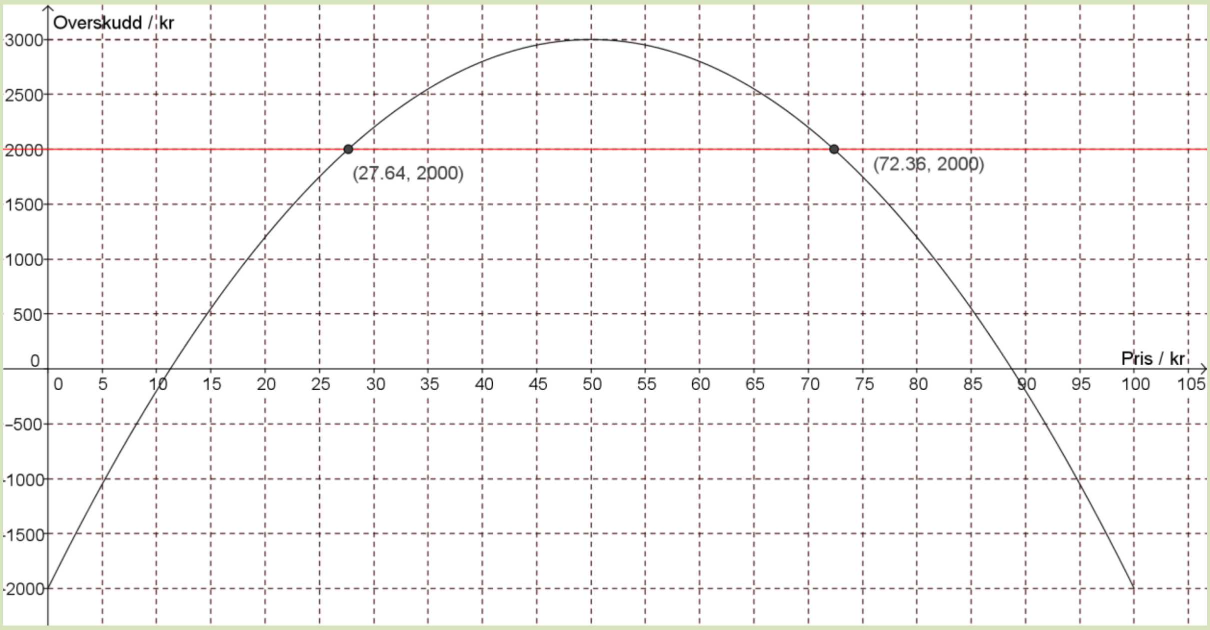
10. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

Eksempel 15
Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 26.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja y = 2000 og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er (27.64 , 2000) og (72.36, 2000). Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja y = 2000 mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

Oppgave 29

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved $T(x) = -0{,}24x^2 + 1{,}2x + 16$, der $T(x)$ står for antall celsiusgrader, og x for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.
Her må du altså la x ligge mellom 0 og 8.
b) Når var temperaturen lik 17 °C?
c) Når var temperaturen lavere enn 17 °C?

11.Eksponentialfunksjoner

Hvis en størrelse alltid øker eller minker like mye når *x* øker med 1, kan den beskrives med en *lineær* funksjon.

Hvis en størrelse alltid øker eller minker *like mange prosent* når *x* øker med 1, kan den beskrives med en *eksponentialfunksjon.*

Eksempel 16

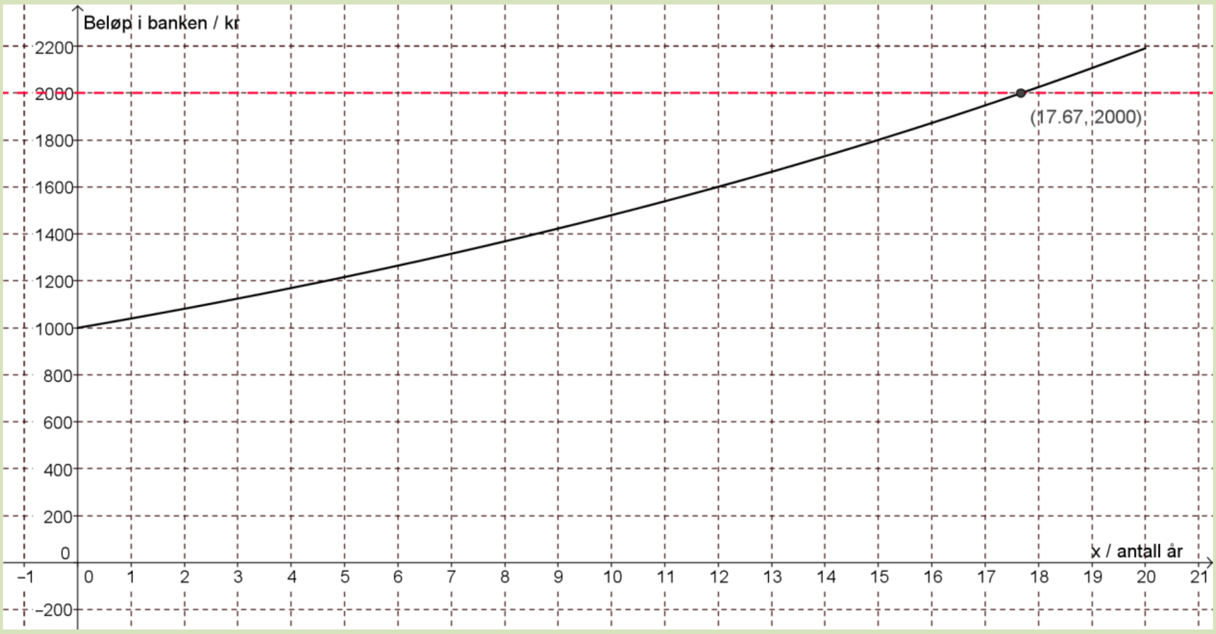
Vi setter 1000 kr i banken til 4 % rente i året. Vekstfaktoren er da 104 % = 1,04, og etter 1 år har vi $1000 \text{ kr} \cdot 1{,}04 = 1040$ kr i banken. Etter nok ett år legger vi igjen til 4 % rente, men nå er det 4 % av 1040 kr, ikke av 1000 kr. Slik kan vi fortsette å regne ut hva vi kommer til å ha i banken:

Antall år	Regnestykke	Beløp i banken
0		1000
1	$1000 \cdot 1{,}04$	1040
2	$1000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 1000 \cdot 1{,}04^2$	1081,60
3	$1000 \cdot 1{,}04^3$	1124,86
x	$1000 \cdot 1{,}04^x$	$1000 \cdot 1{,}04^x$

Funksjonen som beskriver hvor stort beløpet er etter *x* år er *eksponentialfunksjonen*

$$f(x) = 1000 \cdot 1{,}04^x$$

Vi skriver inn funksjonen slik i Geogebra: **Funksjon[1000*1.04^x,0,20]** hvis vi vil tegne grafen i området fra *x* = 0 til *x* = 20. Grafen ser slik ut:



Vi kan se at beløpet øker mer og mer for hvert år som går slik at dette ikke er en lineær funksjon. Årsaken til det er altså at renten beregnes av et stadig større tall.

Ved hjelp av den prikkede røde linjen kan vi finne når beløpet passerer 2000 kr. Geogebra gir oss nøyaktig verdi ved å bruke **Skjæring mellom to objekt**. Da finner vi at beløpet passerer 2000 kr etter ca. 18 år.

Hvis Geogebra kalte funksjonen vi skrev inn for *f*, kan vi finne beløpet etter 10 år ved å skrive **f(10)** på kommandolinjen. Da får vi 1480,24 kr.

Oppgave 30

Taksten på en leilighet var 2,0 millioner i 2008. Den har vokst 9 % i året siden 2005.

a) Hva var taksten i 2009? I 2010?

b) Lag en funksjon som beskriver taksten x år etter 2008.

c) Tegn grafen til denne funksjonen fra $x = -3$ (år 2005) til $x = 10$.

d) Hva var taksten i 2006?

e) Når vil taksten bli 4 millioner hvis utviklingen fortsetter på samme måten?

Oppgave 31

En tre år gammel bruktbil har i dag verdien 252 000 kr. Vi regner med at verdien har sunket 15 % per år, og vil fortsette å synke på samme måte noen år til.

a) Hva vil verdien være om 2 år? Om 5 år?

b) Hva var verdien da den var ny?

c) Lag en funksjon som beskriver verdien fra den var ny og til den er 15 år

d) Tegn grafen til denne funksjonen i det aktuelle området for x.

e) Når vil verdien bli mindre enn 75 000 kr?

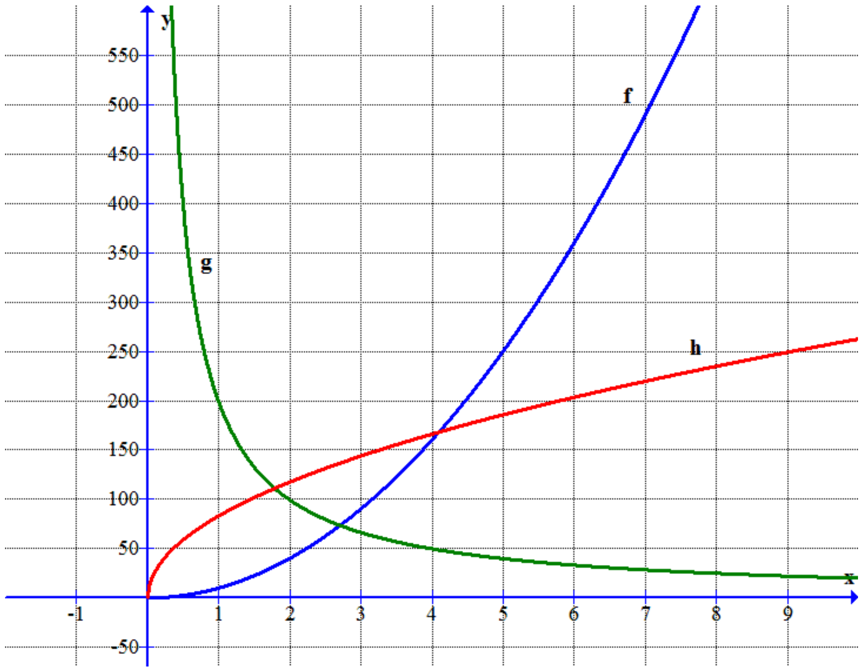
12. Potens- og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er *a* og *b* faste tall. Eksempler:

$$f(x) = 10 \cdot x^2$$
$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

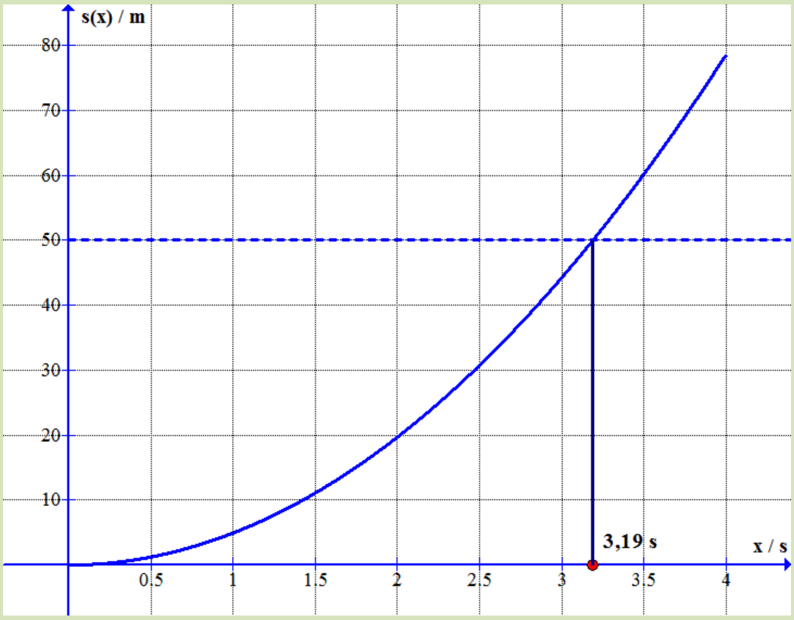
Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 17

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter *x* sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x) = 4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..
For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja y= 50 i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

Oppgave 32

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle *x* meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x) = 0,45\sqrt{x}$.

a) Tegn grafen til *t* når $0 \le x \le 100$. $\sqrt{x}$ skriver du som sqrt(x) i Geogebra. (sqrt = square root.)

b) Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?

c) Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

13. Vekstfart

13.1 Konstant vekstfart

Vekstfarten til en størrelse som forandrer seg med tiden viser hvor *raskt* størrelsen forandrer seg. Vi ser først på eksempler hvor en størrelse forandrer seg like mye i like lange tidsrom. Da sier vi at veksten er *jevn*, og vekstfarten er *konstant*. Slik vekst beskrives med en *lineær* funksjon.

Eksempel 18
Et tre vokser jevnt og med 0,6 m hvert år. Da er vekstfarten 0,6 m/år.

Eksempel 19
Det vi i dagligtale kaller fart, er egentlig vekstfarten til en strekning som en bil eller noe annet forflytter seg. Hvis farten til en bil er 80 km/h, betyr det at strekningen som bilen kjører øker 80 km på en time.

Eksempel 20
Et tre vokser jevnt, og høyden øker fra 2,1 til 4,5 m på 3 år. Høyden øker altså med 4,5 m – 2,1 m = 2,4 m på 3 år. Da er vekstfarten $\frac{2,4 \text{ m}}{3 \text{ år}} = 0,8 \text{ m/år}$

Oppgave 33

Vekten av en melon øker jevnt fra 2,6 kg til 5,9 kg på 3 uker. Hva er vekstfarten til vekten av melonen? Husk målenhet på svaret.

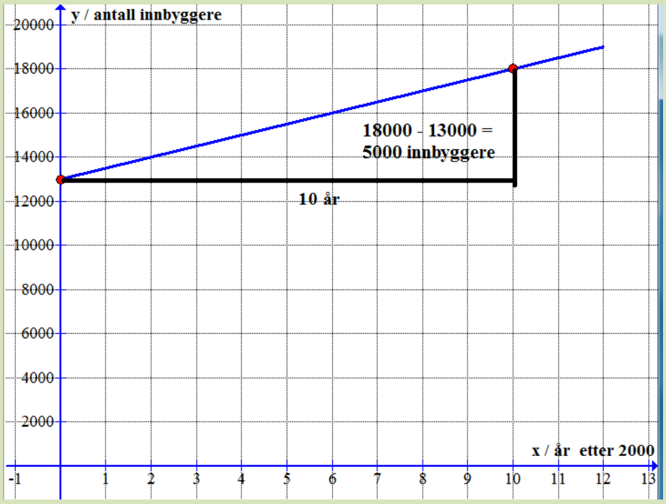
Eksempel 21
Antall bakterier i ei skål med næring er gitt ved funksjonen $b(x) = 300x + 1000$, hvor x er antall timer som er gått etter at bakteriene ble plassert i skåla. Da er vekstfarten lik stigningstallet til denne lineære funksjonen. Vekstfarten er konstant og lik 300 bakterier/time.

Oppgave 34

Den 1. juni var 50 m^2 av en sjø dekket med alger. t uker senere var arealet som var dekket, beskrevet av funksjonen $A(t) = 50 + 20t$. Hva var vekstfarten til arealet av det algedekkede området? Husk målenhet.

Eksempel 22

Grafen viser antall innbyggere i en kommune fra år 2000 og utover. År 2000 svarer til $x = 0$.



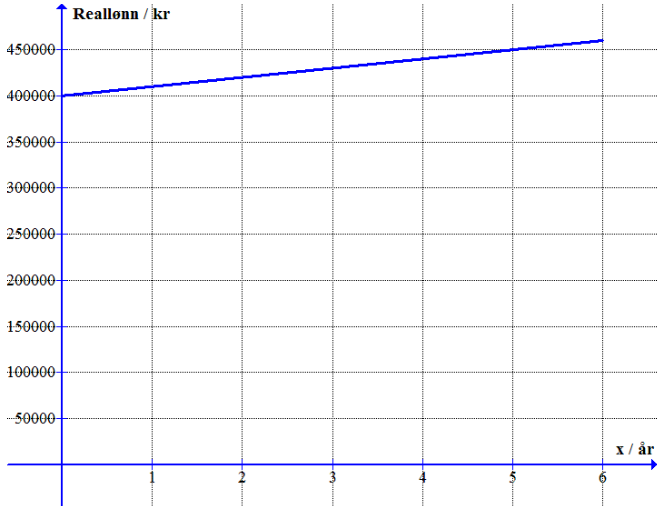
For å beregne vekstfarten finner vi to punkter på grafen som er lette å lese av. Ved å bruke de to punktene som er vist, får vi at vekstfarten er

$$\frac{5000 \text{ innbyggere}}{10 \text{ år}} = 500 \text{ innbyggere/år}$$

Oppgave 35

Grafen viser hvordan reallønna til Asgar har utviklet seg de siste 6 årene.

Finn vekstfarten til reallønna.



Eksempel 23

En sommerdag synker temperaturen jevnt noen timer. På 4 timer har temperaturen minket fra 25 grader til 19 grader, altså med 6 grader.

Hvis noe *minker* etter hvert som tiden går, er vekstfarten *negativ*.

Her blir vekstfarten $\frac{-6 \text{ grader}}{4 \text{ timer}} = -1,5 \text{ grader/time}$.

Funksjonen som beskriver temperaturutviklingen blir da $T(x) = -1,5x + 25$ når *x* er tiden som har gått siden temperaturen var 25 grader.

Oppgave 36

Temperaturen i en kopp med varmt vann synker jevnt noen minutter. Temperaturen minker fra 100 grader til 90 grader på 4 minutter.

a) Finn vekstfarten til temperaturen.
b) Lag en funksjon som viser temperaturen i vannet som funksjon av tiden *x*.

Oppgave 37

I en kommune sank innbyggertallet jevnt gjennom flere år. I 2008 var det 20 000 innbyggere i kommunen og i 2012 var det 18 000 innbyggere.

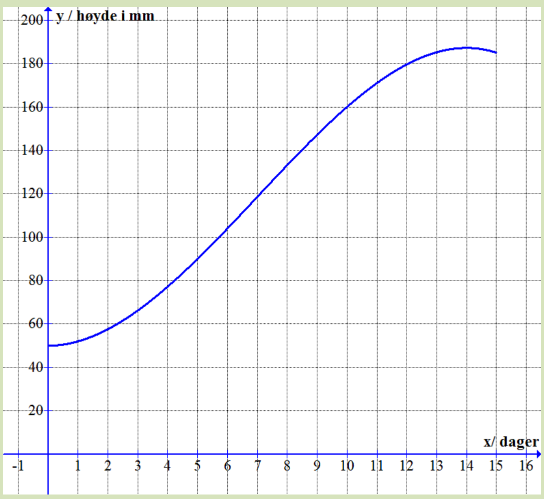
a) Finn vekstfarten til innbyggertallet.
b) Lag en funksjon som viser innbyggertallet *I*(*x*), hvor *x* er antall år som har gått siden 2008 (slik at *x* = 0 tilsvarer år 2008, *x* = 1 tilsvarer 2009 osv.)
c) Hva vil innbyggertallet være i 2015 hvis utviklingen fortsetter på samme måten?
d) Når vil innbyggertallet være lik 15 000?

13.2 Gjennomsnittlig vekstfart

Hvis veksten *ikke* er jevn, vil heller ikke vekstfarten være den samme hele tiden. Da bruker vi ofte *gjennomsnittlig* vekstfart.

Eksempel 24

Grafen til høyre viser høyden til en plante de første 15 dagene etter at den ble plantet.
Av grafen kan vi lese at høyden er 50 mm ved *x* = 0, 90 mm ved *x* = 5 og 160 mm ved *x* = 10.



Fordi grafen ikke er en rett linje, er vekstfarten ikke konstant. Vi kan imidlertid regne ut gjennomsnittlige vekstfarter.

To eksempler:

Gjennomsnittlig vekstfart de fem første dagene:

$$\frac{90 \text{ mm} - 50 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{40 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 8 \text{ mm/dag}$$

Gjennomsnittlig vekstfart fra dag 5 til dag 10:

$$\frac{160 \text{ mm} - 90 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{70 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 14 \text{ mm/dag}$$

Oppgave 38

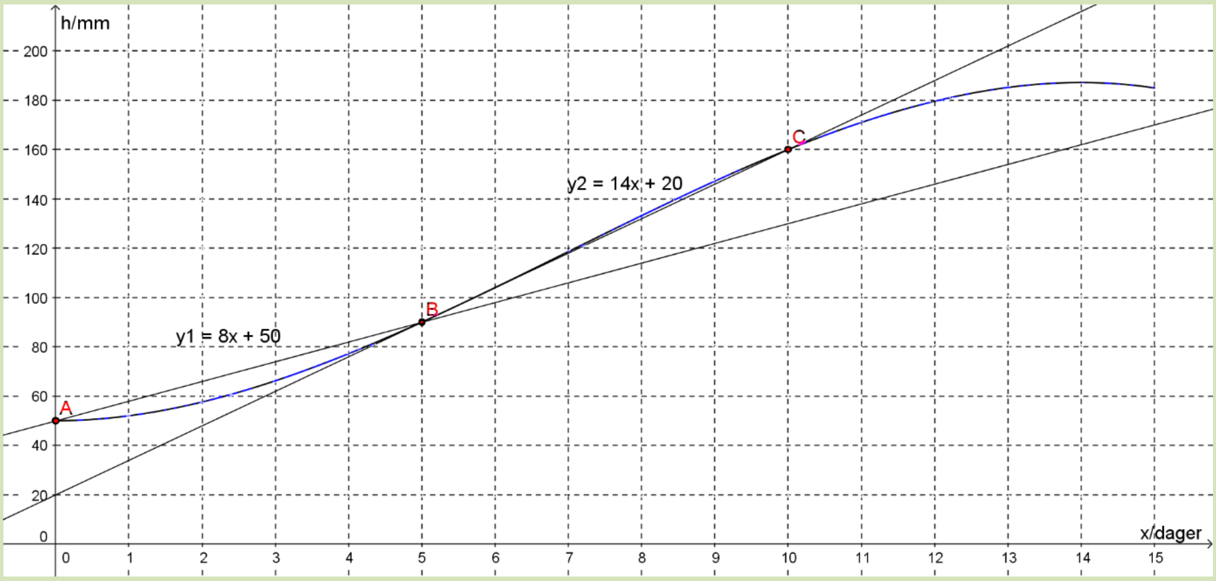
Finn gjennomsnittlig vekstfart de ti første dagene for planten i eksemplet foran.

Eksempel 25

Vi kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av en graftegner (GeoGebra).
Funksjonen som beskriver høyden av planten i forrige eksempel er

$$h(x) = -0{,}1x^3 + 2{,}1x^2 + 50$$

Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-0.1x^3+2.1x^2+50,0,15].**
Vi setter inn punktene **A** = (0, 50), **B** = (5, 90) og **C** = (10, 140) på grafen.
Vi velger verktøyikonet linje mellom to punkter.
Høyreklikk på linjen og endre funksjonsuttrykket til **y = ax + b**. Stigningstallet **a** er lik gjennomsnittlige vekstfart.
Svaret blir **a = 8 mellom punkt A og B**, og **a = 14 mellom punk B og C** som stemmer med utregningene i eksempel 12, 8 mm/dag og 14 mm/dag.



13.3 Momentan vekstfart

Momentan vekstfart er vekstfarten på et bestemt tidspunkt, altså i et bestemt øyeblikk (sammenlign "moment" = øyeblikk på engelsk).

Den momentane vekstfarten er størst der grafen er brattest. Hvis vi igjen ser på grafen i forrige eksempel som viser høyden til planten, kan det se ut som grafen er brattest omtrent når x = 7 dager.

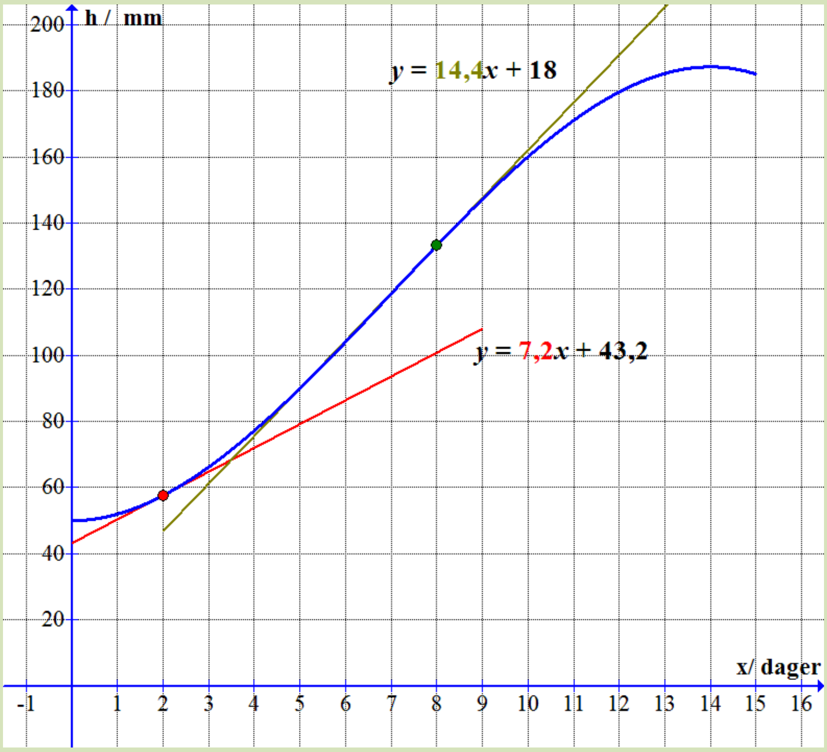
For å finne verdien til den momentane vekstfarten i et bestemt øyeblikk x, må vi tegne *tangenten* til grafen for denne verdien av x. *Da er den momentane vekstfarten stigningstallet til tangenten*. Dette kan vi gjøre i Geogebra.

Eksempel 26

Vi fortsetter å undersøke veksten til planten i eksemplene foran

Under har vi tegnet grafen, og tangenter for $x = 2$ og $x = 8$. Vi tegner en tangent til funksjonen f i $x = 2$ i Geogebra med kommandoen **Tangent[2,f]** .

Geogebra gir oss også likningene for tangentene. De er skrevet inn på figuren under.



Fra likningene til tangentene på figuren ser vi at den momentane vekstfarten er 7,2 mm/dag etter 2 dager og 14,4 mm/dag etter 8 dager.

Oppgave 39

Vekten i kg av en voksende melon er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$V(x) = -0{,}0024x^3 + 0{,}02x^2 + 0{,}21x + 1{,}0$$

der x er antall uker etter at vekten var 1,0 kg. Uttrykket gjelder bra de åtte første ukene.

a) Tegn grafen til V når x ligger mellom 0 og 8 uker.
b) Finn momentan vekstfart når $x = 2$ og når $x = 6$. Husk å skrive målenhet på svaret.
c) Hva er vekten av melonen etter 2 uker?
d) Regn ut gjennomsnittlig vekstfart mellom uke 2 og uke 8.

Eksamensoppgaver

Oppgavene fra del 1løses uten hjelpemidler!

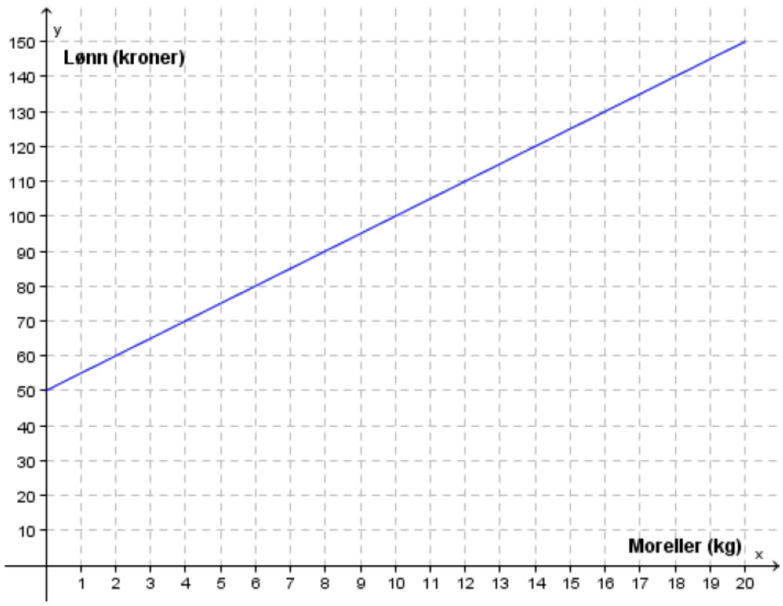
E1
(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

De tre funksjonene *f*, *g* og *h* er gitt ved

$$f(x) = 5x^2 + 100 \qquad g(x) = 100 \cdot 5^x \qquad h(x) = 5x + 100$$

Hvilken av de tre funksjonene beskriver lineær vekst? Lag et eksempel der du bruker denne lineære funksjonen til å beskrive en praktisk situasjon.

E2
(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)



Ivar plukker moreller. Den grafiske framstillingen ovenfor viser hvor mye han tjener i løpet av en time når han plukker x kg.

Forklar hvordan lønnen til Ivar blir beregnet.

E3

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1) 

Tre elever kommer med hvert sitt utsagn. Se boblene ovenfor.

a) Skisser grafer som illustrerer de tre utsagnene. Lag én graf for hvert utsagn.
b) Hvilket utsagn beskriver størrelser som er proporsjonale, og hvilket utsagn beskriver størrelser som er omvendt proporsjonale? Begrunn svarene dine.

E4

(Eksamen 1P våren 2013, Del 1)

I en tank er det 60 L vann. Hver dag tapper vi 5,0 L vann fra tanken.

a) Hvor mye vann er det igjen i tanken etter åtte dager?
   Hvor mange dager går det før tanken er tom?
b) Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$ til en funksjon f som viser hvor mange liter vann det er igjen i tanken etter x dager.
c) Tegn grafen til f.
   Vis hvordan du kan bruke grafen til å finne svar på spørsmålene i oppgave 7 a).

E5

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1) 

Antall hektogram smågodt	3	5	10
Pris for påskeegg med smågodt (kroner)	48	60	90

Stian vil kjøpe et påskeegg. Han vil fylle påskeegget med smågodt.
Tabellen ovenfor viser sammenhengen mellom hvor mye smågodt han fyller i påskeegget, og hvor mye han må betale.

a) Tegn et koordinatsystem med hektogram langs x – aksen og kroner langs y – aksen. Marker verdiene fra tabellen ovenfor som punkter i koordinatsystemet, og tegn en rett linje som går gjennom punktene.
b) Bruk linjen i a) til å bestemme prisen for det tomme påskeegget og prisen per hektogram smågodt.
c) Hvor mye smågodt er det i et påskeegg som koster 81 kroner?

E6

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1) 

Stig har fått en kakeoppskrift fra tante Mathilde i Amerika. I oppskriften står det at kaken skal stekes på 350 °F. Han lurer på hvor mange grader celsius dette tilsvarer. Stig har en gradestokk utenfor kjøkkenvinduet som viser både celsiusgrader og fahrenheitgrader. Se bildet til høyre.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk gradestokken til høyre og fyll ut tabellen.

°F	0		100
°C		10	

b) Tegn et koordinatsystem med grader fahrenheit langs x – aksen og grader celsius langs y – aksen. Marker verdiene fra tabellen i a) som punkter i koordinatsystemet.

c) Tegn en rett linje som går gjennom punktene. Bruk linjen til å finne ut hvor mange grader celsius Stig skal steke kaken på.

E7

(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

På et treningssenter har de to ulike prisavtaler.

Avtale 1: Du betaler 160 kr per måned. I tillegg betaler du 20 kroner hver gang du trener

Avtale 2: Du betaler 400 kr per måned. Da kan du trene så mye du vil.

Kari trener på treningssenteret, Hun har valgt avtale 1.

a) I januar trente hun 8 ganger. I februar trente hun 14 ganger.
Hvor mye måtte hun betale for treningen hver av disse to månedene?
b) Tegn en graf som viser sammenhengen mellom antall ganger Kari trener en måned og prisen hun må betale denne måneden.
c) Bruk grafen i oppgave b) til å bestemme hvor mye hun må trene for at det skal lønne seg med avtale 2.

La A være antall ganger du trener en måned. La P være prisen per trening.

d) For hver av avtalene 1 og 2 skal du avgjøre om A og P er

- proporsjonale størrelser

- omvendt proporsjonale størrelser

E8

(Eksamen 1P våren 2012, Del 2) 

Leon vil bestille sand for å gjøre badestranden utenfor hytta finere. Han ønsker å få sanden tilkjørt med lastebil. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom prisen for et billass med sand og antall tonn sand på lasset.

Antall tonn sand	10	16
Pris for billasset	2300	3200

Denne sammenhengen kan beskrives ved hjelp av likningen $y = ax + b$, der x tonn er mengden sand og y kroner er prisen for billasset.

a) Bestem tallene a og b.
b) Gi en praktisk tolkning av tallene a og b i denne oppgaven.

E9
1P vår 2010, Del 2)

Hvis en bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag, er overskuddet $O(x)$ per dag i kroner gitt ved $O(x) = -10x^2 + 1100x - 10000$.

a) Tegn grafen til O. Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for at overskuddet skal bli størst mulig?
b) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for å ikke gå med underskudd?

E10
(1P vår 2012, Del 2)

Funksjonen gitt ved $f(x) = -0,05x^2 + 2,60x + 0,50$ viser sammenhengen mellom alder og vekt for en type griser. Her er $f(x)$ vekten til en gris målt i kilogram når grisen er x måneder gammel.

d) Tegn grafen til f for $0 \le x \le 25$.
Hvor mye veier en gris ved fødselen?
e) Hva er alderen til en gris når vekten passerer 20 kg?
Hvor mye øker vekten i gjennomsnitt per måned fram til da?

E11
(1P høst 2012, Del 2)

Frank deltar i et friidrettsmesterskap. Han kaster et spyd.
Grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = -0,01x^2 + 0,85x + 2,20$ beskriver banen spydet følger gjennom luften.

Her er x meter målt langs bakken fra stedet hvor Frank står, og $f(x)$ meter er høyden spydet har over bakken.

a) Tegn grafen til f for $x \geq 0$.
b) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og aksene.
   Bestem toppunktet på grafen til f.
c) Hva forteller svarene i b) om spydkastet?

E12
(1P vår 2011, Del 2)

Antall gram CO_2 en bil slipper ut per kilometer er gitt ved

$$f(x) = 0,046x^2 - 6,6x + 386$$

der x er farten til bilen målt i km/h.

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem for x-verdier fra 20 km/h til 100 km/h.
b) Hvor mange gram CO_2 slipper bilen ut per kilometer, dersom den holder en fart på 60 km/h?
c) Hvilken fart gir minst CO_2-utslipp per kilometer? Hvor stort er CO_2-utslippet per kilometer da?

Bilen kjører i 80 km/h i en halv time.

d) Hvor mye CO_2 slipper bilen ut i løpet av denne halvtimen?

E13
(1P høst 2010, Del 2)

Aud arbeider ved et laboratorium. En dag samler hun fluer i en kasse. Hun mater fluene og holder dem isolert i to måneder. Hun finner ut at en god tilnærming for antall fluer i kassen etter t dager er gitt ved

$$f(t) = -0,007t^3 + 0,5t^2 - 3t + 20$$

a) Bruk opplysningene i teksten ovenfor til å avgjøre hvilke t – verdier du bør bruke når du tegner grafen til f. Tegn grafen for disse verdiene av t.
b) Finn grafisk og ved regning hvor mange fluer det var i kassen ved starten og ved slutten av eksperimentet.
c) I hvilket tidsrom økte antall fluer i kassen?

E14
(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen h gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.
Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen t år etter 1. januar 1990.

a) Tegn grafen til h for $0 \le t \le 10$.
b) Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?
c) Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
d) Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 til 1. januar 1998?

E15
(1P høst 2013, Del 2)

Funksjonen f gitt ved $f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$ viser hvor mange tonn fisk $f(x)$ det var i en fiskebestand x år etter år 2000.

a) Tegn grafen til f for $0 \le x \le 10$.
b) Når var fiskebestanden minst?
Hvor mange tonn var det i fiskebestanden da?
c) Bestem skjæringspunktet mellom grafen til f og linjen med likning $y = 200$.
Hva forteller koordinatene til dette punktet om fiskebestanden?

E16
(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen f gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside x timer etter midnatt et gitt døgn.

a) Tegn grafen til f for $0 \le x \le 24$.
b) Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
c) Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

E17
(1P vår 2014, Del 2)

Vi bruker funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0,002x^3 + 0,06x^2 - 0,2x + 2, \qquad 0 \le x \le 24$$

Som en modell for vindstyrken $f(x)$ m/s ved en målestasjon x timer etter midnatt 18. mai 2014.

a) Tegn grafen til f

b) Hva var vindstyrken kl. 09.45 i følge modellen?
c) Når var vindstyrken minst, og når var den størst, i følge modellen?

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom vindstyrke og betegnelse.

d) I hvilke tidsrom i løpet av dette døgnet var det lett bris i følge modellen?

Vindstyrke (m/s)	Betegnelse	Kjennetegn
0,0 – 0,2	Stille	Røyken stiger rett opp
0,3 – 1,5	Flau vind	En kan se vindretningen av måten røyken driver på
1,6 – 3,3	Svak vind	En kan føle vinden. Bladene på trærne rører seg, vinden kan løfte små vimpler
3,4 – 5,4	Lett bris	Løv og småkvister rører seg. Vinden strekker større flagg og vimpler
5,5 – 7,9	Laber bris	Vinden løfter støv og løse papirer, rører på kvister og smågreiner og strekker større flagg og vimpler.
8,0 – 10,7	Frisk bris	Småtrær med løv begynner å svaie. På vann begynner småbølgene å toppe seg

E18
(1P våren 2015, Del 2)

En bedrift bruker i en periode vann fra et basseng i produksjonen av et nytt produkt.

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 0{,}0013x^3 - 0{,}59x^2 + 61x + 2000 \qquad 0 \leq x \leq 300$$

Viser vannstanden $f(x)$ millimeter i bassenget x dager etter at fabrikken startet produksjonen av produktet.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i bassenget i denne perioden.

c) Bruk graftegner til å løse likningen $f(x) = 3000$
Hva forteller løsningene om vannstanden i bassenget?

d) Bestem stigningstallet for den rette linjen som går gjennom punktene $(90, f(90))$ og $(210, f(210))$. Hva forteller dette stigningstallet om vannstanden i bassenget?

E19
(2P-Y våren 2015, Del 2)

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f

b) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur

c) Bestem $f(100)$ og den momentane vekstfarten til f når $x = 100$.
Hva forteller disse svarene?

E20
(2P-Y høsten 2014, Del 2)

En tankbil med gift har vært innblandet i en ulykke. Noe av giften har havnet i en innsjø. Innsjøen brukes som drikkevannskilde.

Giftkonsentrasjonen $f(x)$ mg/L i drikkevannet x døgn etter ulykken er gitt ved

$$f(x) = 1{,}42 \cdot 0{,}87^x$$

a) Bestem giftkonsentrasjonen i drikkevannet rett etter ulykken.
Hvor mange prosent avtar giftkonsentrasjonen i drikkevannet per døgn?

b) Hvor mye avtok giftkonsentrasjonen i drikkevannet i gjennomsnitt per døgn den første uken etter ulykken?

Når giftkonsentrasjonen kommer under 0,40 mg/L, er det ikke lenger farlig å drikke vannet.

c) Hvor mange døgn tar det før vannet igjen kan drikkes?

E21
(2P, vår 2015, del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

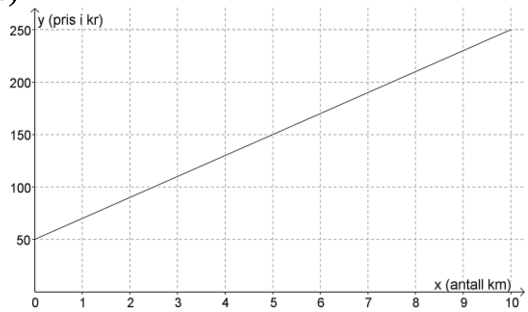
Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 2
a) 50 kr
b) 70 kr
c) 150 kr
d)

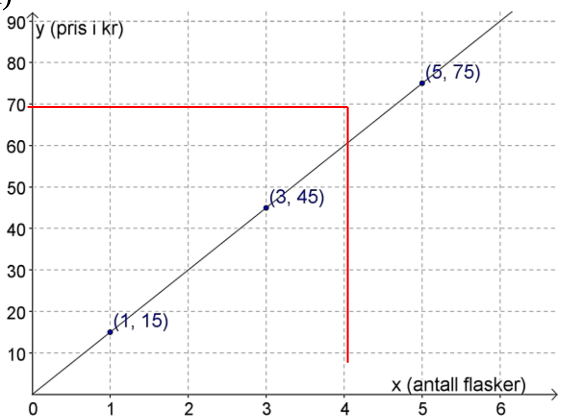
x (antall km)	0	5	10
y (pris)	50	150	250

e)



Oppgave 3a) 30 kr b) 10 kr

Oppgave 4.
a)



b) 4 flasker (markert ved de rød linjene)
c) $y = 15 \cdot x$

Oppgave 5 a) 300 kr b) 30x + 150 d) 6

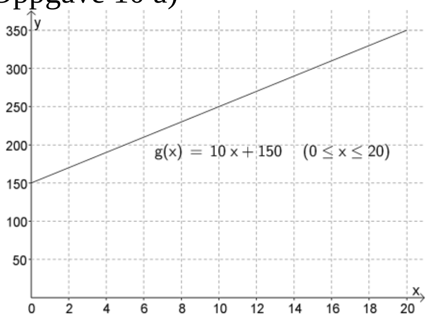
Oppgave 6 a) Linje A. b) linje A: 2. Linje B: 0,5

Oppgave 7 a) 10 b) 10 kr per kg

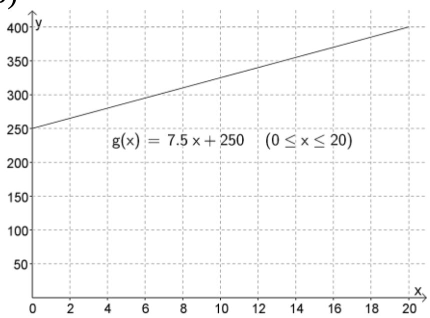
Oppgave 8 Linje A: 2, Linje B: 1

Oppgave 9 0. (Fordi det ikke koster noe hvis du ikke kjøper noe)

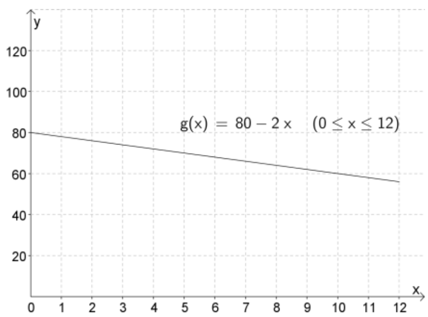
Oppgave 10 a)



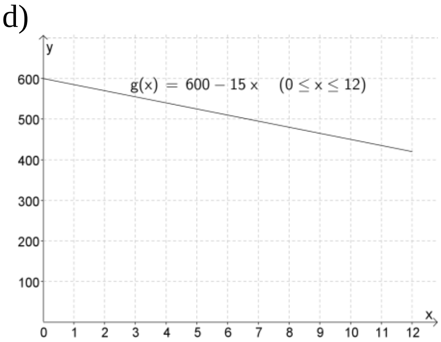
b)



c)



d)



Oppgave 11b) 480 c) 14 ganger	
Oppgave 12 b) 13,75 kr. c) 21,67 min (21 min og 40 sek)	
Oppgave 13 b) $300 - 60 = 240$sider igjen å lese c) $8,33 \approx 9$ dager	
Oppgave 14 a) 1500 kr b) 25 kr c) 100 timer d) $T(x) = 25x + 1500$	
Oppgave 15 a) 2000 kr b) 0,60 kr c) 12800 kr d) 20000 kWh e) $K(x) = 0,60x + 2000$	
Oppgave 16 a) 1200 kr b) 1 kr c) $K(x) = x + 1200$	
Oppgave 17a) $V(x) = 64000 - 8000x$ b) -8000, 64000 c) 8 år e) 4 år	
Oppgave 18 a) $S(x) = 4000 - 250x$ c) 1000 kr d) 16 mnd = 1 år 4 mnd	
Oppgave 19 a) 65 L b) 0,5 L/mil c) $b(x) = 65 - 0,5x$ d) 65 mil e) ca. 120 mil	
Oppgave 20 a)1) -20 kr, 2) 140 kr b) $f(x) = 8x - 100$ c) 8, -100 e) 13 kurver	
Oppgave 21 a) 1) -12 grader, 2) 6 grader b) $T(t) = 2t - 18$ c) 2, -18 e) 9 timer	
Oppgave 22 a) $L(x) = 120x - 50$ c) 430 kr d) 6 timer	
Oppgave 23 14 km	
Oppgave 24 a)1) 3400 kr, 2) 2500 kr b) 1) 4600 kr, 2) 5000 kr c) $F(x) = 120x + 2200, G(x) = 250x$ e) 17 uker (x=16,9) f) 4240 og 4250 kr	
Oppgave 25. a) $M(x) = 18x + 700,\ J(x) = 30x$ b) 59	
Oppgave 26 b) x = 50, 3000 kr	
Oppgave 27 b) 2008, ca. 10 000	
Oppgave 28 b) 5,08 kr (x=5.08) og 294,91 kr (x = 294.91) c) Mellom 5,08 kr og 294,91 kr.	
Oppgave 29 b) ca. kl. 13 (x = 1.06) og ca. kl 16 (x = 3.94) c) Mellom kl. 13 og kl. 16.	
Oppgave 30 a) 2,18 mill., 2,38 mill. D) 1,68 mill. E) 2016	
Oppgave 31 a) ca. 182 000 kr, ca. 112 000 kr b) ca. 410 000 kr e) ca. 7,5 år	
Oppgave 32 b) 4,0 s c) 64 m	
Oppgave 33 1,1 kg/uke	
Oppgave 34 20 m^2/uke	
Oppgave 35 10 000 kr/år	
Oppgave 36 a) -2,5 grader/min b) $y =$ -2,5x +100	
Oppgave 37 a) – 500 innbyggere/år b) $I(x) = -500x + 20000$ c) 16 500 d) 2018	
Oppgave 38 11 mm/dag	
Oppgave 39 b) 0,26 kg/uke, 0,19 kg/uke c) 1,48 kg d) 0,21 kg/uke	

Fasit eksamensoppgaver

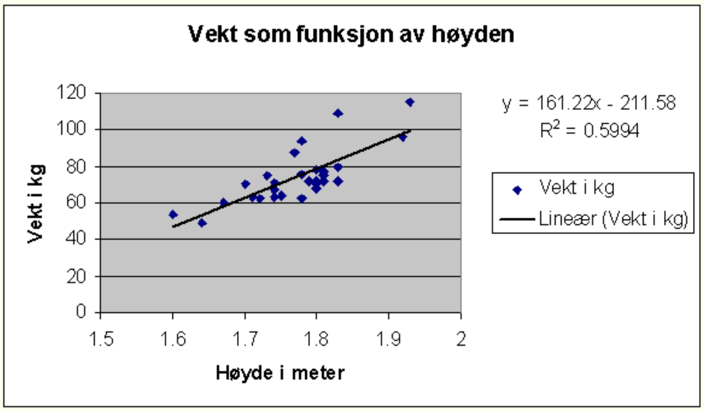
E1. $h(x)$
E2. 50 kr fast timelønn pluss 5 kr per kurv
E3 Proporsjonale: Kari. Omvendt proporsjonale: Grete
E4. a) 20 L , 12 d b) $f(x)=60-5x$
E5 b) 30 kr, 6 kr/hg c) 8,5 hg
E6. c) ca. 180 grader celsius
E7. a) januar: 320 kr. februar: 440 kr b) Uttrykk: $y = 160 + 20 \cdot x$ c) Mer enn 12 ganger. d) Avtale 1: A og P er ikke prodorsjonale (eller omvendt proporsjonale) størrelser. Avtale 2: A og P er omvendt proporsjonale størrelser
E8. a) a = 150 kr, b = 800 kr b) $a =$ prisen per tonn, $b =$ fast avgift for kjøringen
E9 a) 55 b) mellom 10 og 100
E10. a) 0,50 kg b) ca. 9 måneder, 0,975 kg/måned
E11. b) (0, 2.20), (87.5, 0), (42.5, 20.3). c) Spydet er 2,20 m over bakken i det det forlater hånda til spydkasteren. Sydkastet er på sitt høyeste 42,5 m fra kaststedet, da er det 20,3 m over bakken. Lengden på spydkastet er 87,5 m
E12 b) 156 g/km c) 72 km/h, 149 g/km d) 6100 g = 6,1 kg
E13. b) 20, ca. 130 c) fra 3 til 44 dager
E14. b) I februar 1992, ca. 870 hjort c) I mai 1991 og januar 1993
E15. b) 51 tonn midt i 2008 c) x = 5,91, 200 tonn fisk i slutten av 2005
E16. b) kl. 17, 13000 c) mellom ca. kl. 5 og 24
E17. b) 3,9 m/s c) Minst ca. kl. 02 (x=1,84), størst ca. kl. 18 (x=18,16) d) Mellom ca. kl. 08.30 og 13.45 (x=8,48 og x = 13.77) og etter ca. kl 22 (x=21.88)
E18. b) Ca. 3200 mm (3206,8). C) x=122,84 og x=20,14. Vannstanden er 3000 mm (3,0 m) etter ca. 20 dager og etter ca. 123 dager d) $a = -24{,}89$. I denne perioden synker vannstanden med ca. 25 mm per dag.
E19. b) 13,3 grader. c) $f(100) = 8{,}5$ og momentan vekstfart til f når $x = 100$ er 0,09. Dvs at temperaturen 100 dager etter nyttår var 8,5 grader, og den steg med 0,09 grader per dag
E20. a) 1,42 $\mathrm{mg/L}$. Avtar med 13 % per døgn. b) 0,126 mg/døgn. c) Ca. 9 døgn (x = 9,1)
E21 2,5h

Kapittel 7. Matematiske modeller

En matematisk modell er en funksjon som mer eller mindre bra beskriver en praktisk situasjon.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hvordan lage en matematisk modell ved hjelp av gitte opplysninger.
- Hvordan finne en matematisk modell ut fra en tabell med observerte sammenhenger mellom to størrelser (regresjon).
- Hvordan finne mønster i et tallmateriale.



1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra "virkeligheten". Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

Eksempel 1

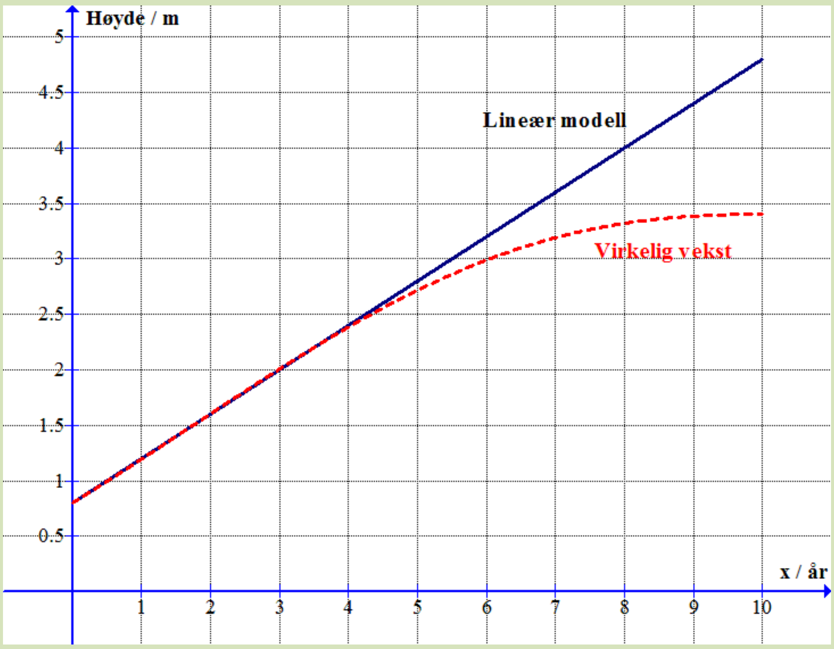
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for *x*, kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$ m.

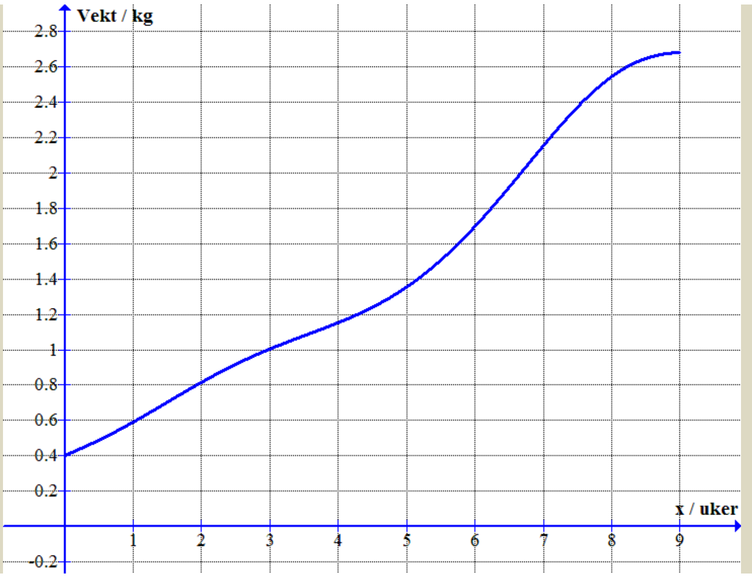
Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er *x* mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik: $x \in [0,5]$.



Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.



a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten $v(x)$ som passer bra for de fem første ukene.

Oppgave 2

Temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

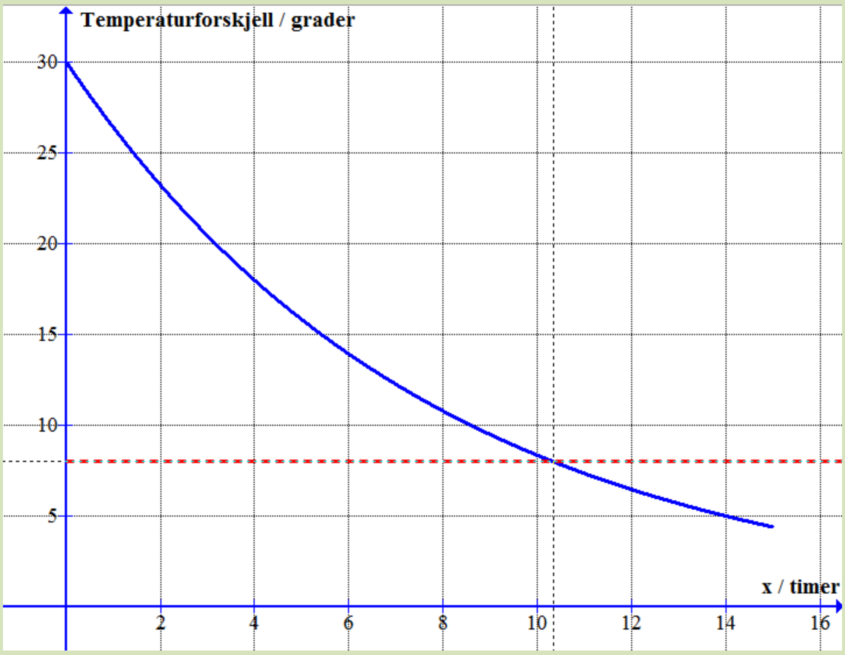
a) Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?
b) Lag en lineær modell som beskriver temperaturen T i koppen etter x minutter.
c) Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?
d) Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?
e) Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når x øker.
f) Tegn grafen til modellen.

g)  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.

Eksempel 2
I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.
Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.
Temperaturforskjellen er 22 – (-8) = 30 grader i starten.
Vekstfaktoren er 100 % – 12 % = 88 % = 0,88.
Vi kaller antall timer som har gått for *x*. Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0{,}88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.
Når er innetemperaturen null?
Vi tegner grafen til *f* med **Funksjon[30*0.88^x,0,15]**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen y = 8, viser at dette skjer etter 10,4 timer.

Oppgave 3
I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

a) Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
b) Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

Eksempel 3

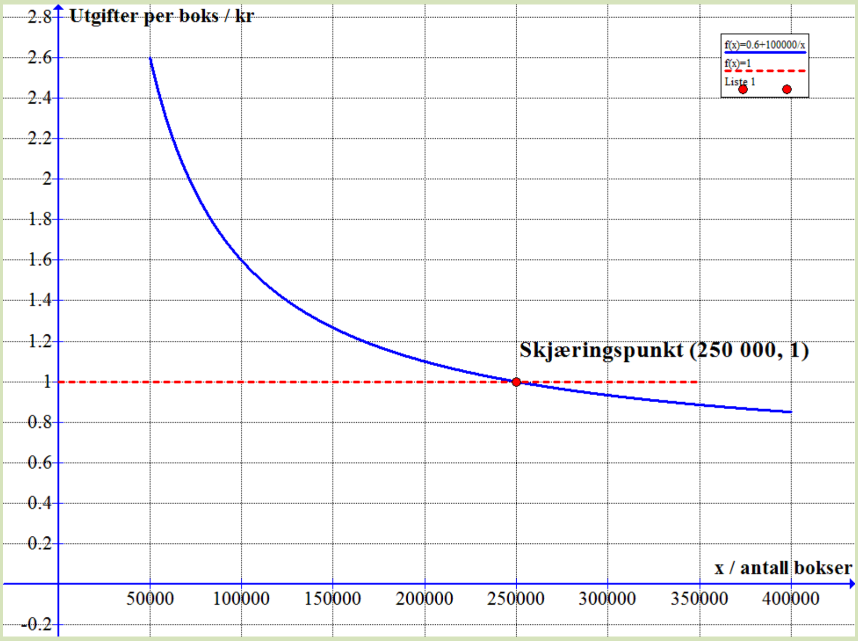
En fabrikk lager hermetikkbokser. Hver uke har fabrikken 100 000 kr i *faste kostnader* (lønn, verditap på maskiner og annet). I tillegg koster det 0,60 kr per boks (metall, elektrisk energi og annet). Vi skal lage en modell for utgiftene per boks.

Vi kaller antall bokser som blir laget per uke for x og utgiftene per boks for U.
Utgiftene for x bokser blir $0,60x + 100000$.

Utgiftene per boks: $U = \dfrac{0,60x + 100000}{x}$.

Denne funksjonen må vi skrive slik i Geogebra: (0.60x+100000)/x.

Hvor mange bokser må fabrikken minst lage for at utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr? Dette kan vi finne grafisk:



Vi ser at fabrikken må lage minst 250 000 bokser i uka hvis utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr.
Vi kan også løse en likning:

$$\frac{0,60x + 100000}{x} = 1$$

$$\frac{(0,60x + 100000)x}{x} = 1 \cdot x$$

$$0,60x + 100000 = x$$

$$100000 = x - 0,60x$$

$$100000 = 0,40x$$

$$x = \frac{100000}{0,40} = 250000$$

Oppgave 4

Ola er medlem av en klubb hvor han må betale 200 kr i året for å være medlem. Da kan han få kjøpe sokker til 30 kr per par. Vanlig pris på sokkene er 50 kr.

a) Lag en modell som viser hva han må betale per par når han tar med kontingenten i utgiftene.

b) Hvor mange par sokker må han minst kjøpe per år for at det skal lønne seg å være medlem?

Eksempel 4

En bonde har 200 m gjerde som han skal bruke til å sperre av et rektangulært beiteområde for noen kuer. Vi skal lage en matematisk modell for arealet $A(x)$ av beiteområdet hvis den ene siden i rektangelet er x meter.

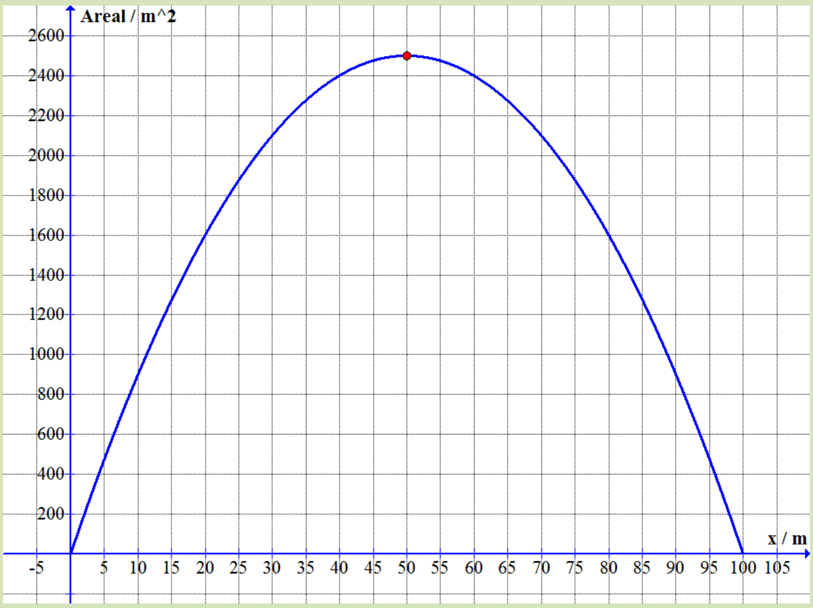
Hvis vi kaller den andre siden i rektangelet for y, må $x + y$ være lik halve omkretsen av rektangelet, nemlig 100 m. Da må vi ha at $y = 100 - x$. Arealet blir

$$A(x) = x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Modellen er altså et andregradspolynom.

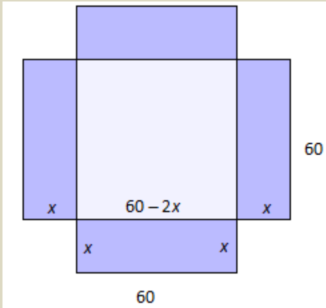
Hvis bonden velger $x = 60$ m, blir arealet $100 \cdot 60 - 60^2 = 2400\,\text{m}^2$.

For å finne hvilken verdi av x som gir *størst areal*, tegner vi grafen til andregradsfunksjonen ovenfor:



Vi ser at arealet blir størst når $x = 50$ m. Da er området et kvadrat.

Oppgave 5



Du skal lage en eske av en papp-plate med sidekant 60 cm ved å skjære bort et kvadrat i hvert hjørne og deretter brette opp de fargede sideflatene i figuren.

a) Forklar at sidene i bunnen av esken blir $60 - 2x$.

b) Lag en modell $V(x)$ for volumet av esken. Som du kanskje husker fra 1P er volumet lik arealet av grunnflaten multiplisert med høyden av esken.

c) Hva er den største verdien x kan ha? Tegn grafen til $V(x)$. Hvilken verdi av x gir størst volum? Hvor stort er dette volumet?

3. Regresjon (kurvetilpasning)

3.1 Lineær regresjon

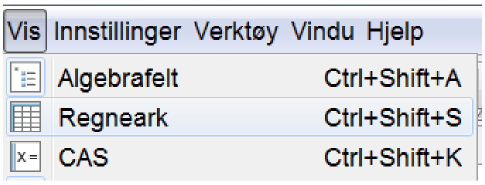
Hvis vi har en tabell som viser sammenhørende verdier mellom to størrelser, er det ofte mulig å finne en funksjon som passer bra med disse verdiene. Metoden som gjør dette mulig, kalles *regresjon*. Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under* ***Innstillinger, Avrunding****. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

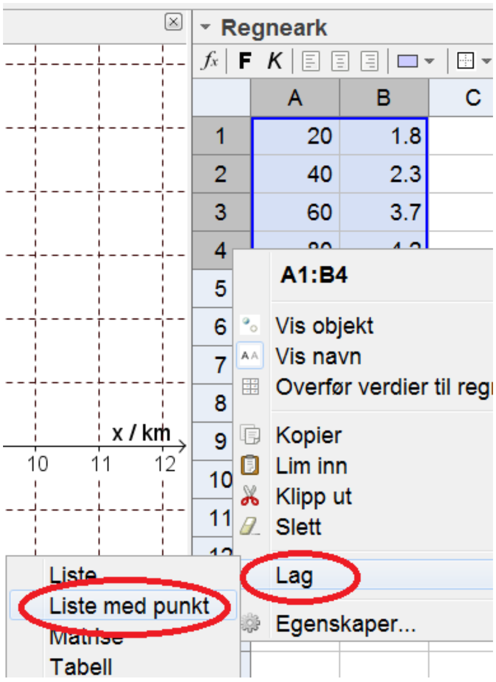
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder x / år	20	40	60	80
TV-tid y / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

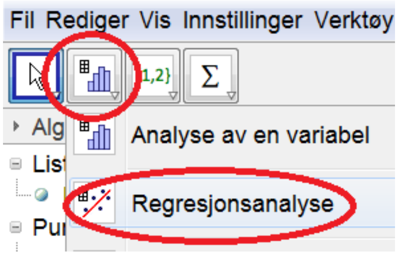
Vi åpner regnearket i Geogebra:

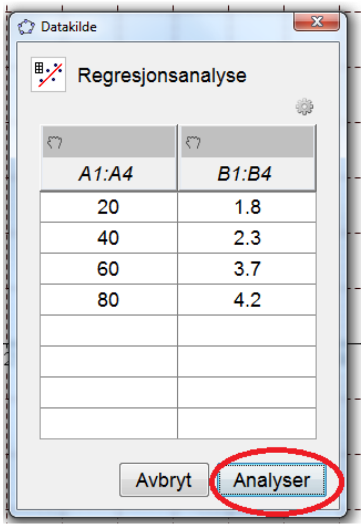


Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

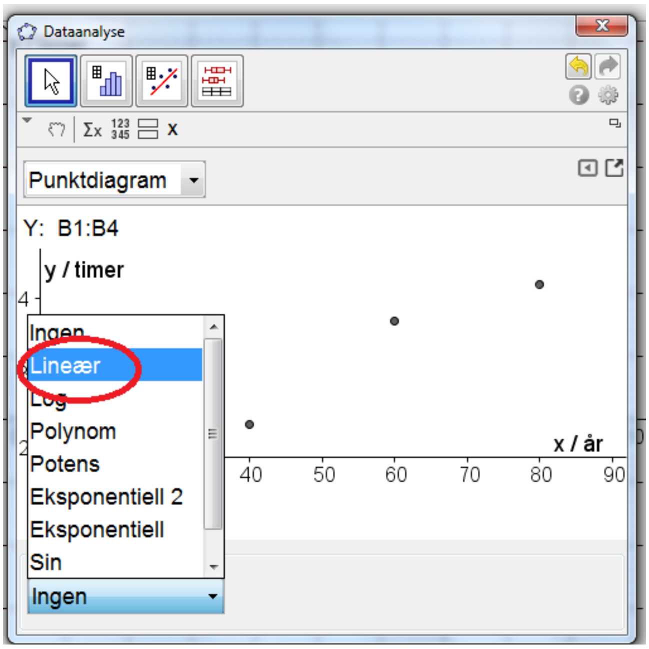


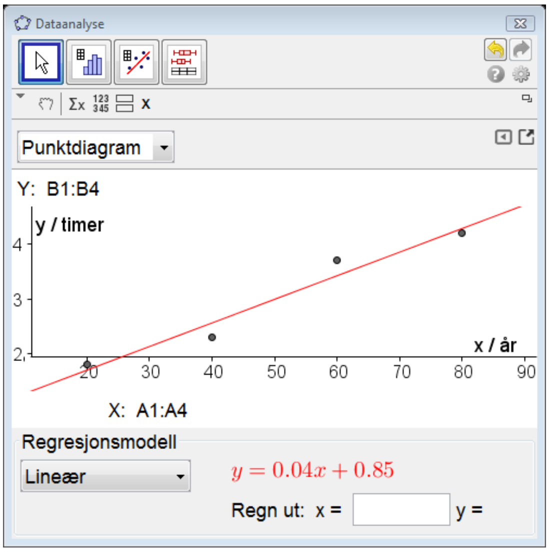
Så velger vi regresjonsanalyse:





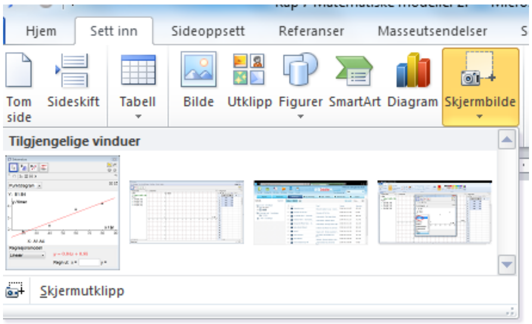
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er $y = 0,04x + 0,85$.

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.

Ut fra dette kan vi si at $f(x) = 0,04x + 0,85$ er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$ timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for *x* hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ($x = 0$) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

Oppgave 6

Tabellen viser folketallet y i Norge (i millioner) fra 1950 (x = 0) til 2000 (x = 50).

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

a) Finn ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
b) Hva var folketallet i 2010 (x = 60) i følge denne modellen?
c) Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
d) Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

3.2 Polynomregresjon

Det er ikke så vanlig at en lineær funksjon passer godt til data fra virkeligheten. Da kan av og til en polynomfunksjon passe bedre. Tabellen nedenfor viser hvor stor prosent av den yrkesaktive befolkningen i Norge som arbeidet i primærnæringene (jordbruk, skogbruk, jakt, fiske) i noen av årene mellom 1900 og 2004.

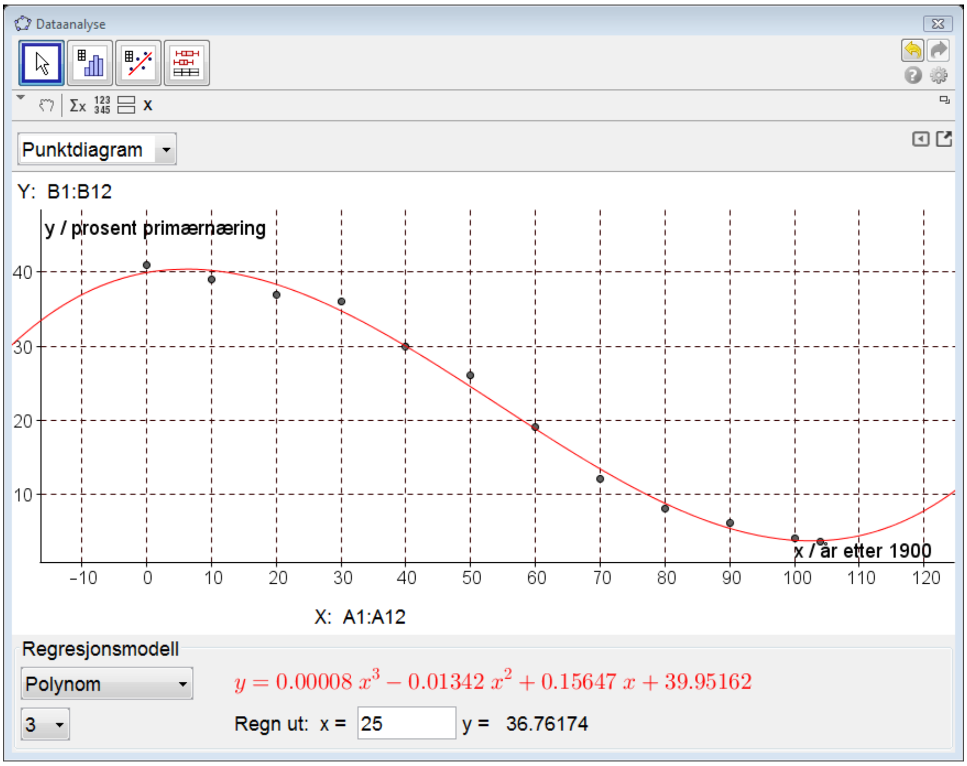
År	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**	**1940**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2004**
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
***y*/%**	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la x være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3.5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$. (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor *x* ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut *f*(25) ved å skrive $x = 25$ inn i Geogebravinduet (se ovenfor). Da finner vi *f*(25) = 37 %.

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av *x* i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut *f*(120). Geogebra gir da ca. 8 %.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8 % i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

Oppgave 7

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen $O(x)$ er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
O	0	20	35	50	100	150	175	160

a) La x være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.
b) Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?
c) I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?
d) Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet(time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene.,

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

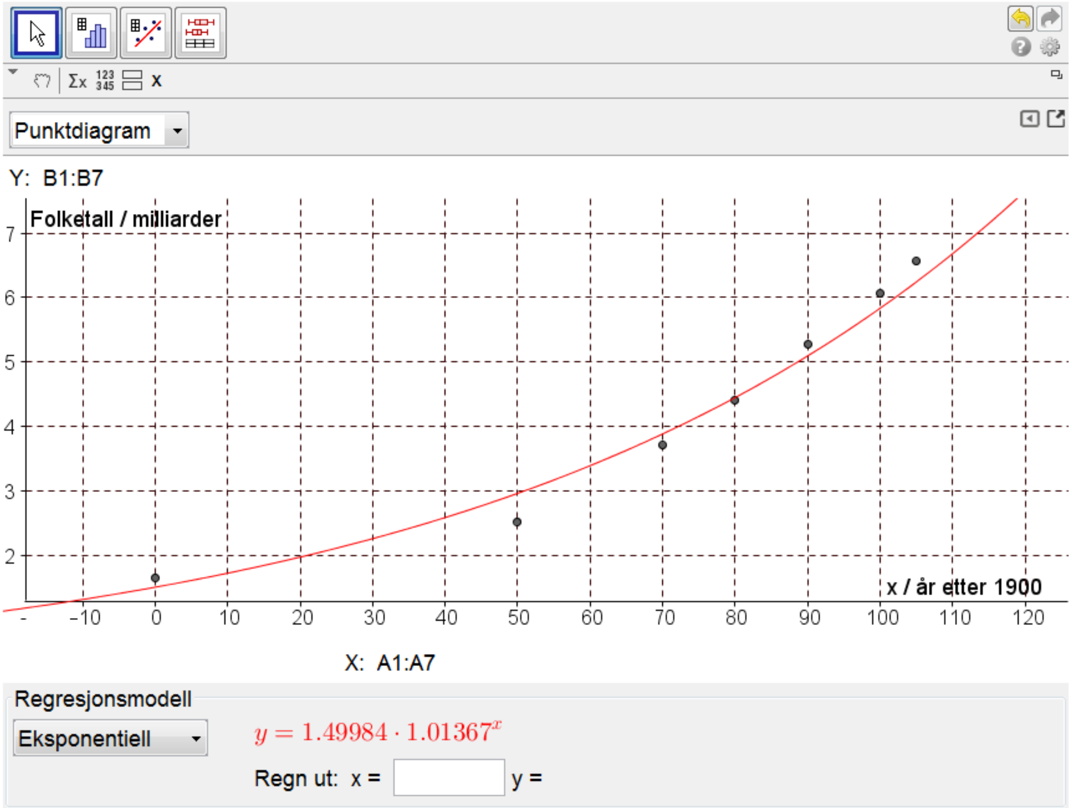
År	**Folketall (milliarder)**
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar x være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til x = 0, 1950 svarer til x = 50 osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

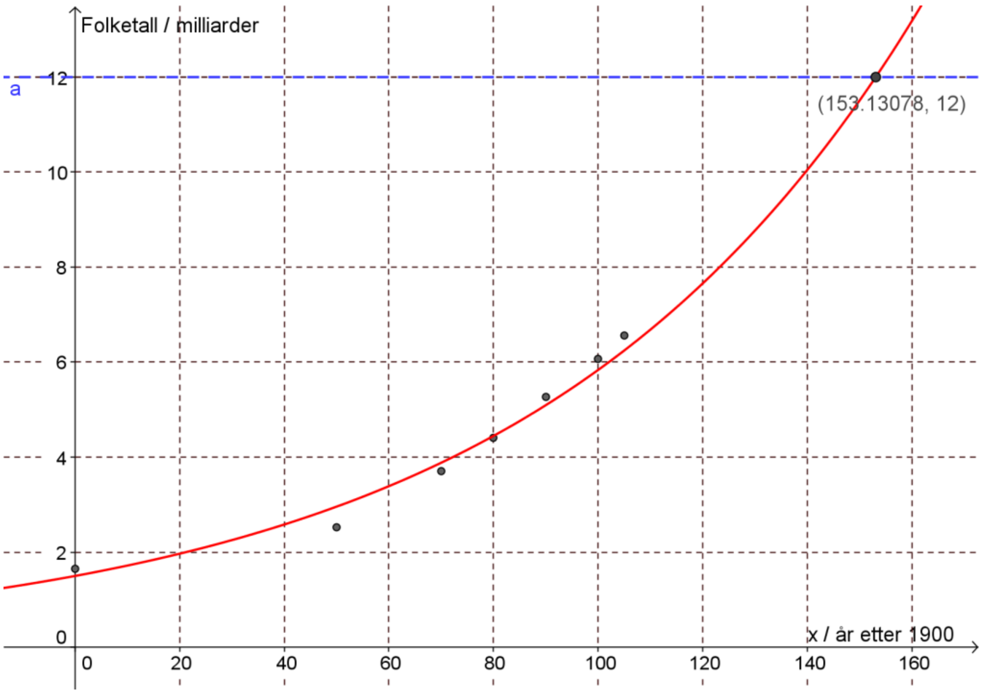
Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:



Funksjonen som passer best (passe avrundet) er $f(x) = 1,5 \cdot 1,014^x$.

Fra vekstfaktoren 1,014 = 101,4 % ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte 101,4 % - 100 % = 1,4 % i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja y = 12 og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:



Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

Oppgave 8

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

a) Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der $x = 0$ svarer til 1975.
b) Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
c) Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
d) En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

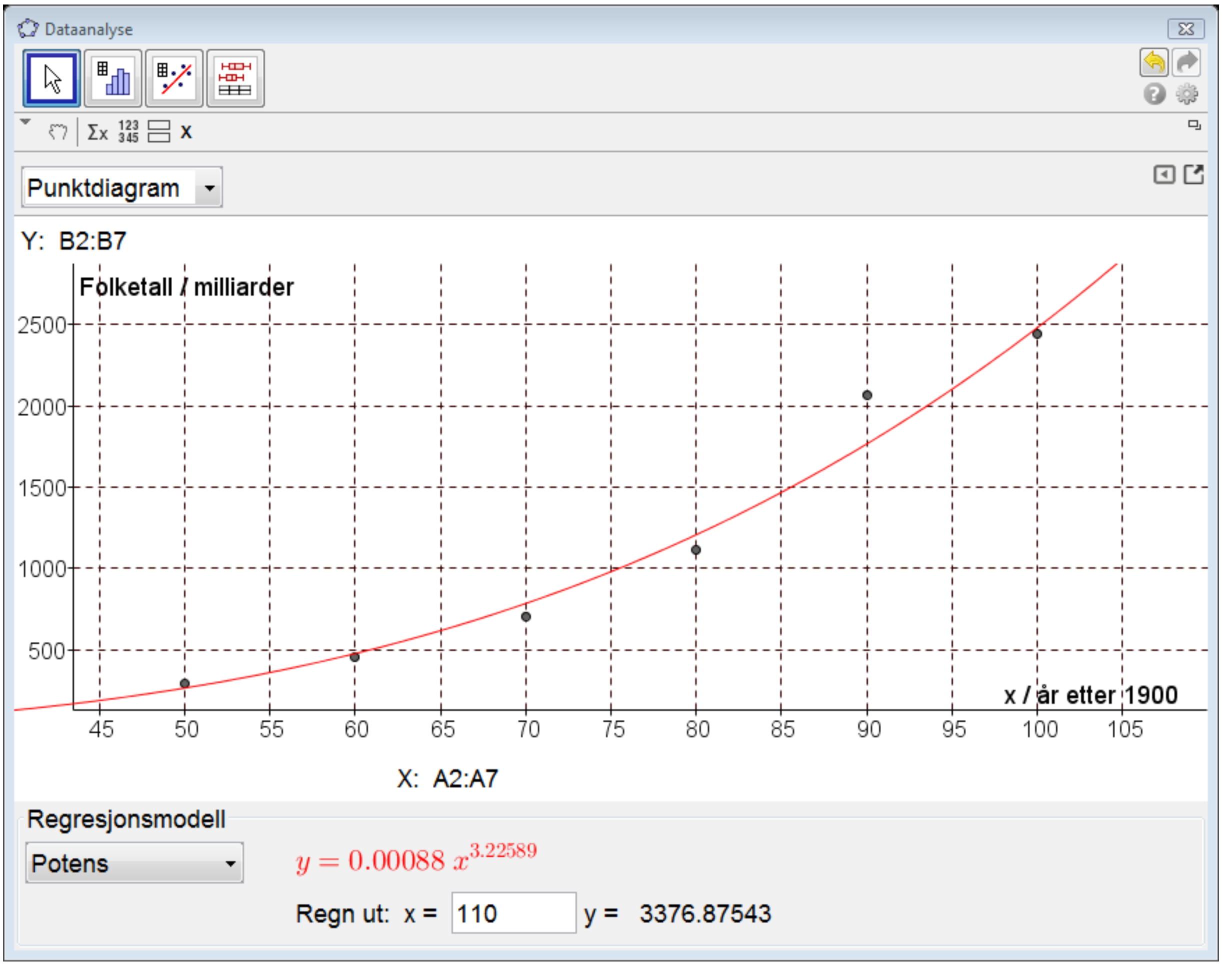
3.4. Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^b$. Eksponenten *b* kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
***t* / tusen**	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar *x* bety antall år etter 1900 (*x* = 50 tilsvarer da 1950, *x* = 60 tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon.* Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er $t(x) = 0{,}00088x^{3{,}226}$ (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

Oppgave 9

Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
x	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
y	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden x fra sola og omløpstiden y for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

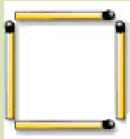
a) Finn den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.

b) Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?

c) Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

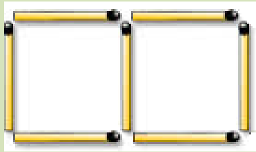
4. Mønster i tall og figurer

Eksempel 5
Figuren viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.



Vi skal finne en formel (matematisk modell) for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage flere sammenhengende kvadrater.

Vi ser at for å lage to kvadrater trenger vi 7 fyrstikker.



For å legge på et nytt kvadrat, trenger vi 3 fyrstikker til, altså 10.

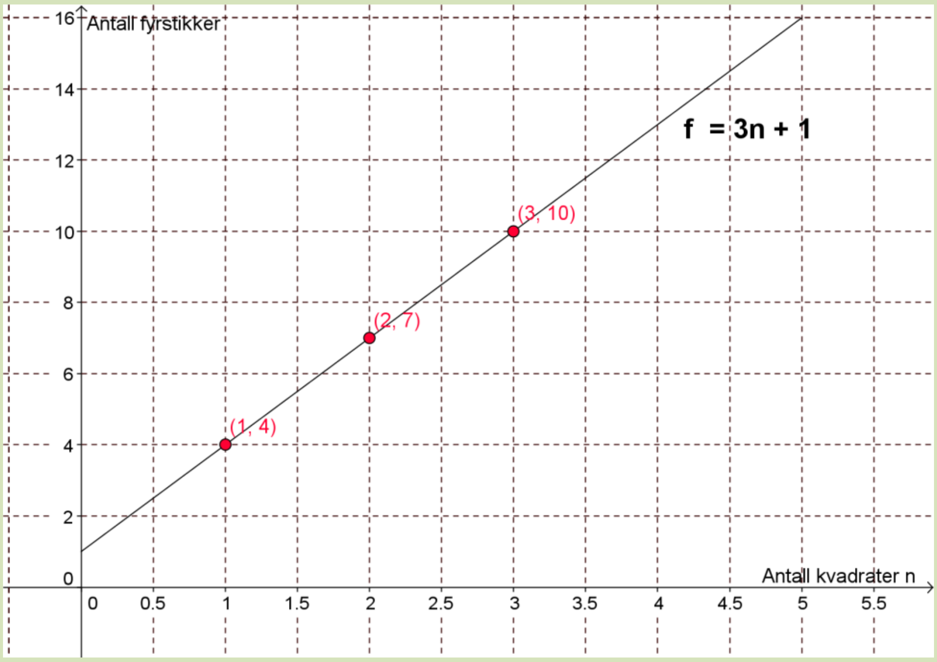
Vi kan si at antall fyrstikker er en funksjon av antall kvadrater. Variabler, slik som antall kvadrater, som bare kan være et *helt* tall, er det vanlig å kalle n istedenfor x. Det er også vanlig å skrive funksjonsuttrykket som f_n istedenfor $f(n)$.
I dette eksemplet kan vi da skrive

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 7, \quad f_3 = 10.$$

For å finne en formel for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage n kvadrater, legger vi merke til at vi starter med 4 og legger til 3 for hvert nytt kvadrat vi legger til. Men hvis vi har n kvadrater, har vi lagt til n -1 nye, hver med tre fyrstikker. Derfor har vi

$$f_n = 4 + 3(n-1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

Formelen $3n + 1$ kan vi også finne bare ved å se på tallene 4, 7 og 10 og gruble litt, eller ved å legge inn punktene (1,4), (2, 7) og (3,10) i Geogebra og foreta en *lineær* regresjon.



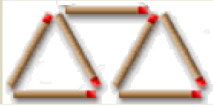
Oppgave 10

Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker f_4 trengs for å lage 4 slike trekanter?

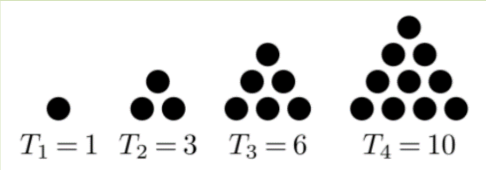
b) Finn en formel for f_n.

c) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?



d)  Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?

 Eksempel 6

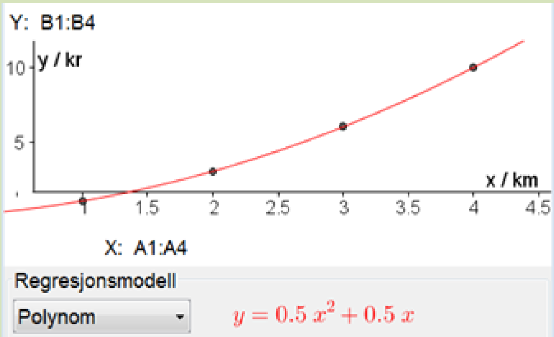


Figuren viser trekanter som er bygget opp av kuler. Antallet kuler utgjør de fire første *trekanttallene.*

Vi ser at $T_2 = T_1 + 2,\ \ T_3 = T_2 + 3,\ \ T_4 = T_3 + 2$.

Da må vi ha T_5 = 10 +5 = 15 og T_6 = 15 + 6 = 21.

Da antall kuler ikke øker like mye fra en trekant til den neste, kan en formel for T_n ikke være lineær. Vi legger punktene (1,1), (2,3), (3,6) og (4,10) inn i regnearket i Geogebra og prøver polynomregresjon. Da finner vi



Formelen for trekanttall nr. n er altså $T_n = 0,5n^2 + 0,5n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Vi vil finne hvor stor trekant vi kan lage med 1000 kuler. Det kan vi gjøre ved å tegne grafen til funksjonen og finne skjæringspunktet med linja y = 1000. Da finner vi at vi kan lage trekant T_{44} med 1000 kuler. Da T_{44} = 990, får vi 10 kuler til overs.

Eksamensoppgaver

E1

(vår 2012, Del 1)

Elev	Praktisk situasjon	Modell	Spørsmål
Stian	Jeg har laget noen armbånd. Armbåndene skal jeg selge for 50 kroner per stykk.	Jeg trenger en modell som viser hvor mye jeg kan tjene.	Hvor mye tjener jeg dersom jeg selger fem armbånd?
Sondre	Jeg har kjøpt en krukke med 150 drops. Hver dag vil jeg spise fem drops.	Jeg trenger en modell som viser hvor mange drops jeg har igjen i krukka hver dag.	Hvor mange dager går det før jeg har spist opp halvparten av dropsene?
Sebastian	Jeg skal klippe ut rektangelformede tøystykker i ulike størrelser. Lengden av hvert tøystykke skal være 2,0 cm større enn bredden.	Jeg trenger en modell som viser hvor stort arealet av hvert tøystykke blir.	Hvor stort blir arealet av et tøystykke dersom jeg velger at bredden skal være 3,0 cm?

Ovenfor har tre elever beskrevet tre ulike situasjoner.
Ta for deg hver av de tre situasjonene.

a) Svar på elevens spørsmål.
b) Foreslå en matematisk modell.
c) Si noe om modellens begrensninger.

E2

(høst 2011, Del 2) 

Nils har funnet en bok på loftet. Tippoldefaren til Nils lånte boka på biblioteket og skulle levert den inn igjen 23.11.1911.

Nils lurer på hvor dyrt dette kunne blitt for tippoldefar dersom biblioteket hadde beregnet gebyr for sen innlevering. Han ser for seg at biblioteket kunne beregnet gebyr etter to ulike modeller.

Modell 1
Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og så 5 øre i tilleggsgebyr for hver uke som går etter det. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 20 øre.)

Modell 2
Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og deretter øker dette gebyret med 0,2 % hver uke. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 10,04004 øre.)

I denne oppgaven regner vi at det er 52 uker i et år.

a) Tenk deg at tippoldefar leverer inn boka i dag. Regn at "i dag " er 23.11. 2011.
   1) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 1?

   2) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 2?

b) For hvilken av de to modellene kommer gebyret raskest opp i 10 kroner?

E3
(vår 2011, Del 2)

Vibeke har fått en bakterieinfeksjon og tar tabletter med antibiotika. En tablett inneholder 220 mg antibiotika. Antall milligram antibiotika i kroppen reduseres med 11 % hver time.

a) Vibeke tar en tablett. Hvor mange milligram antibiotika er det igjen i kroppen hennes
   1) etter én time?
   2) etter åtte timer?

Vibeke tar en tablett hver åttende time.

b) Hvor mange milligram antibiotika har hun i kroppen rett etter at hun har tatt sin
   1) andre tablett?
   2) tredje tablett?

c)  Skisser grafen som viser hvor mange milligram antibiotika Vibeke til enhver tid har i kroppen det første døgnet etter at hun begynte å ta tablettene.

E4

(høst 2012, Del 1)

Et fallskjermhopp kan deles inn i fire faser. I hver fase ser vi på farten fallskjermhopperen har loddrett nedover.

Fase 1:
Fallskjermhopperen forlater flyet. Etter tre sekunder er farten 25 m/s, og etter åtte sekunder har fallskjermhopperen nådd den maksimale farten, som er 50 m/s.

Fase 2:
Fallskjermhopperen faller med maksimal fart i fire sekunder.

Fase 3:
Fallskjermen løses ut, og i løpet av ett sekund minker farten til 5 m/s.

Fase 4:
Fallskjermhopperen fortsetter med konstant fart 5 m/s i åtte sekunder før han når bakken.

Lag en grafisk framstilling som viser hvordan farten til fallskjermhopperen varierer med tiden i løpet av hoppet.

E5

(vår 2011, Del 2)

Rebecca er på ferie i Kina. Hun vil kjøpe sko til kjæresten, Isak, hjemme i Oslo. Kinesiske skostørrelser er annerledes enn det hun er vant med fra Norge.

Nedenfor ser du hva Rebecca finner ut om kinesiske herresko.

* Den minste størrelsen er 20. Sko i størrelse 20 er 21,5 cm lange.

* Når størrelsen øker med 1, øker skolengden med 5 mm.

* Kineserne bruker halvstørrelser, slik at for eksempel 37,5 er en mulig skostørrelse.

Rebecca vil sammenlikne norske og kinesiske skostørrelser. Hun setter opp tabellen nedenfor.

	Minste skostørrelse	Økning i lengde per størrelse	Halvstørrelser
Kina	20 (lengde 21,5 cm)	5 mm	Ja
Norge	32 (lengde 21,75 cm)	6,6 mm	Nei

a) Hvor lang er en sko som har norsk skostørrelse 40?

b) 1) Forklar at $y = (x - 20) \cdot 0,5 + 21,5$ er en formel for å regne ut skolengden, y, når du kjenner den kinesiske skostørrelsen, x.

2) Sett opp en tilsvarende formel for å regne ut skolengden når du kjenner den norske skostørrelsen.

c) Isak bruker norsk skostørrelse 43. Hvilken kinesisk skostørrelse tilsvarer dette? Det er en lineær sammenheng mellom norske og kinesiske skostørrelser.

d) Tegn av tabellen under i besvarelsen din. Fyll ut tabellen og finn den lineære sammenhengen.

Norsk skostørrelse	Kinesisk skostørrelse
32	
43	
	39

E6
(vår 2012, Del 2)

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen i Norge i perioden fra 1998 til 2011.

Årstall	Konsumprisindeks
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4

a) Marker verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem der x - aksen viser antall år etter 1998 (1998 tilsvarer $x = 0$) og y - aksen viser konsumprisindeksen.

Bruk regresjon til å finne en rett linje som passer med punktene i koordinatsystemet.

b) Hva vil konsumprisindeksen bli i 2030 ifølge modellen i a)?

Myndighetene har siden 2001 hatt som mål at konsumprisindeksen skal stige med 2,5 % per år.

c) Hva ville konsumprisindeksen ha blitt i 2030 dersom den hadde steget med 2,5 % per år fra 2001 til 2030?

E7

(høst 2012, Del 2)

Måned	Januar	Mars	Juni	Juli	August	Desember
Antall kilogram pølser	45	144	299	328	336	36

Tabellen ovenfor viser antall kilogram pølser som ble solgt i en butikk noen måneder i 2011.

a) Framstill datamaterialet i tabellen ovenfor som punkter i et koordinatsystem der x - aksen viser måned og y - aksen viser antall kilogram pølser.

(La $x = 1$ svare til januar, $x = 2$ til februar, $x = 3$ til mars, osv.)

b) Bruk regresjon til å bestemme en modell på formen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ som kan brukes for å beskrive antall kilogram pølser som ble solgt per måned i løpet av dette året.

Tegn grafen til f i samme koordinatsystem som du brukte i a).

Butikken regner med at pølsesalget vil være 20 % høyere hver måned i 2012 sammenliknet med tilsvarende måned i 2011.

c)  I hvilke måneder i 2012 vil butikken da selge mer enn 300 kg pølser per måned dersom vi tar utgangspunkt i modellen i b)?

E8
(vår 2012, Del 2)
Tabellen nedenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år.

Årstall	1927	1961	1974	1987	1999	2011
Folketall (milliarder)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La x være antall år etter 1900 (i 1900 er $x = 0$, i 1901 er $x = 1$, og så videre).

a) Bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved $f(x) = 1,27 \cdot 1,016^x$ kan brukes som modell for å beskrive hvordan folketallet i verden har endret seg i årene 1927–2011.

b) Hvor mange prosent øker folketallet med per år ifølge modellen i a)?

c) Når var folketallet 4,6 milliarder ifølge modellen i a)?

d) Hvor lang tid går det ifølge modellen i a) mellom hver gang folketallet fordobles? Hvordan stemmer dette med tallene i tabellen ovenfor?

FN har utarbeidet prognoser som sier at folketallet i verden skal passere 8 milliarder i 2025 og 9 milliarder i 2045.

e)  Vurder om modellen i a) passer med disse prognosene.

E9
(høst 2011 Del 2)

Årstall	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Innbyggertall	650	550	467	396	336	284
Endring fra året før		-100				
Prosentvis endring fra året før		-15,4 %				

Tabellen ovenfor viser innbyggertallet i en liten bygd i årene fra 2005 til 2010. Hans og Grete vil ut fra tabellen lage en matematisk modell som kan brukes til å anslå innbyggertallet i bygda i årene som kommer. Hans mener de bør velge en lineær modell. Grete er ikke enig.

a)

1) Tegn av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Fyll inn tallene som skal stå i resten av de hvite feltene.

2) Bruk opplysningene i tabellen. Argumenter for at Hans og Grete ikke bør velge en lineær modell, og foreslå hvilken type modell de bør velge.

La x være antall år etter 2005, og la $f(x)$være innbyggertallet i bygda.

b) Bruk regresjon til å finne den modellen du foreslo i a).

c) 1) Hva vil innbyggertallet i bygda være i 2020 ifølge modellen du fant i b)?

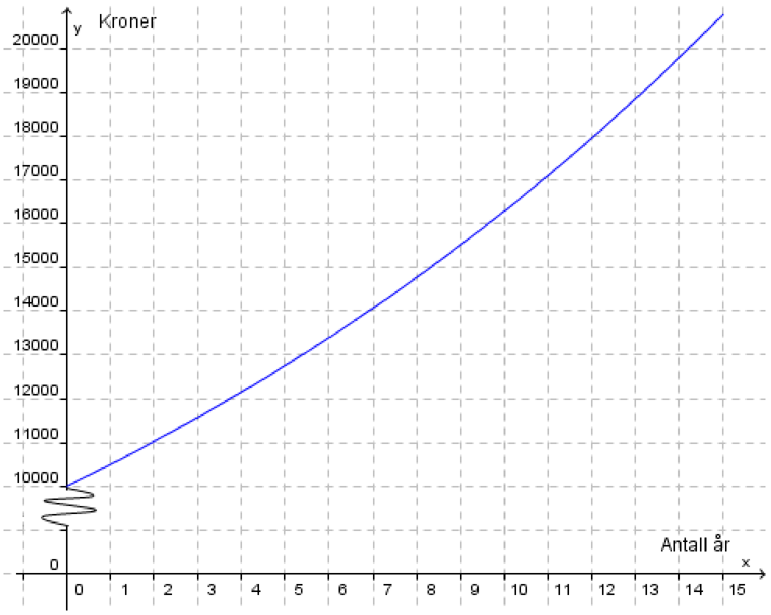
2) Hvor lang tid vil det gå før innbyggertallet er under 100 ifølge denne modellen?

Hans lager likevel en lineær modell. Han finner at $y = -62x + 635$.

d)  Vurder om denne modellen kan brukes til å beskrive innbyggertallet i bygda i årene fram til 2020.

E10

(høst 2012 Del 2)



Guri setter et pengebeløp i banken. Grafen ovenfor viser hvordan beløpet vokser de 15 første årene. Vi antar at renten er den samme hvert år.

a)  Sett opp et matematisk uttrykk som kan være en modell for hvor mye penger Guri har i banken etter x år.

b) Hvor mye penger vil Guri ha i banken etter 20 år ifølge modellen du satte opp i a)? Når vil beløpet hun har i banken, passere 50 000 kroner ifølge modellen?

E11

vår 2011, Del 2)

Per prøver å finne en sammenheng mellom diameteren og volumet til kuler.
Han måler diameter og volum for noen kuler av ulik størrelse. Se tabellen nedenfor.

Diameter (cm)	3,0	6,0	10,0	16,0	26,0
Volum (cm^3 = mL)	14	113	525	2 145	9 200

a) 1) Bruk regresjon til å vise at funksjonen *f* gitt ved $f(x) = 0,52 \cdot x^{3,0}$ er en god modell for sammenhengen mellom diameteren, *x*, og volumet, $f(x)$, til kuler.
   2) Tegn grafen til funksjonen *f*.

b) Finn diameteren til en kule med volum 1000 mL.

Per lærte allerede i grunnskolen at formelen for volumet av en kule er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ der *r* er radius i kulen.

c) Stemmer resultatet fra a) med denne formelen? Forklar.

E12

(høst 2011, del 2)

Haile Gebrselassie fra Etiopia har vært en av verdens beste langdistanseløpere. I tabellen nedenfor ser du hans beste tider på noen distanser.

Distanse x (i meter)	1 500	3 000	5 000	10 000	15 000	16 093	25 000	42 195
Tid T (i minutter)	3,550	7,417	12,656	27,033	41,633	44,400	71,617	123,988

a) Bruk regresjon til å vise at $T = 1,44 \cdot 10^{-3} \cdot x^{1,07}$ er en modell for tiden T som funksjon av distansen x for Gebrselassies resultater.

b) Tegn grafen til T.

c) Hvor lang tid vil Gebrselassie bruke på en halvmaraton (21097,5 m) ifølge modellen i a)?

Pete Riegel har laget en modell som viser sammenhengen mellom tiden T_1 en løper bruker på en distanse D_1, og tiden T_2 løperen bruker på en distanse D_2.
Modellen ser slik ut:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1,06}$$

d) Ta utgangspunkt i tiden Gebrselassie bruker på 25 000 m, og regn ut hvor lang tid han vil bruke på en halvmaraton ifølge Riegels modell.
Hvordan passer dette svaret med modellen du fant i a)?

E13
(vår 13, Del 2)

Bilmerke	Volvo
Bilmodell	V50
Nybilpris i 2006	299 990
Antatt verdi i 2011	171 000
Verditap	128 900
Verditap årlig	25 780

I 2011 kjøpte Helene en bruktbil. Hun fant da tabellen ovenfor på Internett.
Alle beløp er oppgitt i kroner.

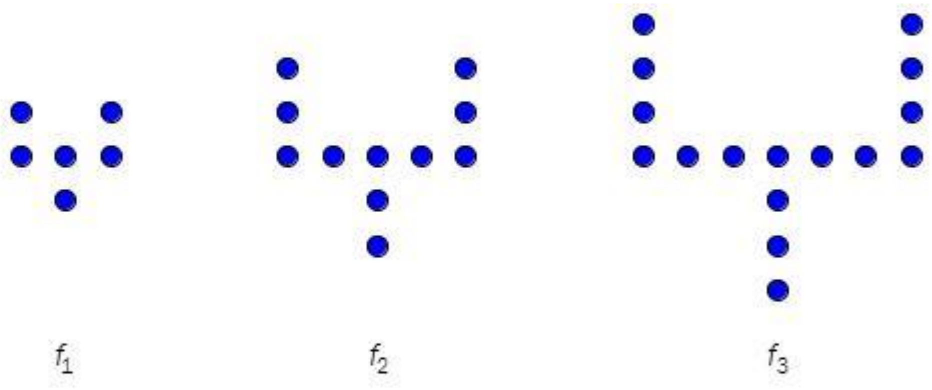
a) Forklar at det årlige verditapet på bilen er beregnet ved hjelp av en lineær modell og bestem denne modellen.

Helene lurer på om det vil være mer realistisk å bruke en eksponentiell modell.

b) Bestem en eksponentiell modell som totalt gir samme verditap på bilen fra 2006 til 2011 som den lineære modellen.

c) Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den lineære modellen?
Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den eksponentielle modellen?

E14
(høst 12, del 1)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1, f_2 og f_3 .

a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4.
Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n, uttrykt ved n.

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

E15

(vår 2016, del 2)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1000 hPa (hektopascal)

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsider og se på noen modeller for hvor stort luftrykket er x kilometer over havets overflate.

a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell *f* der $f(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x$

Tegn grafen til *f* for $0 \leq x \leq 10$.

b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modellen i *f*. Gi denne modellen navnet *g*. Tegn grafen til g for $0 \leq x \leq 10$ i sammen koordinatsystem som grafen til *f*.

c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell h. Tegn grafen til h for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem du har brukt tidligere i oppgaven. Kommenter siste setning i sitat 3.

d) Bruk hver av de tre modellene *f*, *g*, og *h* til å bestemme lufttrykket 8848 meter over havoverflaten. Sammenlikn svarene du får med sitat 4 og kommenter.

Fasit

Fasit øvingsoppgaver
Oppgave 1 a) ca. 0,95 kg b) $v(x)=0,19x+0,4$

Oppgave 2 a) 94 grader b) $T(x)=100-3x\ (=-3x+100)$ c) 76 grader d) -20 grader

Oppgave 3 a) $B(x)=10000\cdot 0,965^x$ b) ca. 65 timer

Oppgave 4 a) $U(x)=\dfrac{30x+200}{x}$ b) 10 par

Oppgave 5 b) $V(x)=(60-2x)^2\cdot x$ c) x = 10 cm, 16 000 cm^3 (= 16 dm^3 = 16 liter)

Oppgave 6 a) $f(x)=0,024x+3,3$ b) 4,8 millioner c) 0,024 millioner = 24 000 d) I 2060

Oppgave 7 a) $f(x)\approx -0,012x^3+0,65x^2-3,1x+7$ b) 60 c) 2002 – 2003 d) 2018

Oppgave 8 b) $f(x)=13,5x+105$, ca. 850 personer c) $f(x)=132\cdot 1,049^x$, ca. 1830 personer d) En tredobling passer best med den eksponentielle modellen.

Oppgave 9 a) $y=1,00\cdot x^{1,50}$ b) Den gir 84,1 år c) 30,1

Oppgave 10 a) 9 c) $2n+1$ d) 49, 2 fyrstikker til overs

Fasit eksamensoppgaver

E2. a) 1) 26005 øre = 260,05 kr 2) 324552 øre = 3245,52 kr c) Modell 1

E3. a) 1) 196 mg 2) 87 mg b) 1) 307 mg 2) 341 mg

E5. a) 27,0 cm c) $y=(x-32)\cdot 0,66+21,75$ c) 35

E6 a) $f(x)=2,26x+100,5$ b) 172,7 c) 222,4

E7 b) $f(x) = -1{,}001x^3 + 10{,}413x^2 + 20{,}913x + 14{,}686$ c) fra og med mai (x = 5), til og med oktober(x = 10)

E8. b) $f(x)=-1,00x^3+10,4x^2+20,9x+14,6$ c) Fra juni til oktober

E9 b) 1,6 % c) 1981 d) ca. 44 år e) Modellen gir høyere verdier enn FNs prognoser

E10. b) $f(x)=650\cdot 0,848^x$ c) 1) 54 2) ca. 11 år

E10a) $y=10000\cdot 1,05^x$ b) 26530 kr c) Etter 33 år

E11 b) 12,4 cm

E12 c) 61,0 min d) 59,8 min.

E13 b) $299900\cdot 0,894^x$ c) 119 000 kr 136 000 kr.

E14 a) 26 31 b) $f_n = 5n + 1$ c) f_{199}

E15 a) Vf = 100 % - 12 % = 88 % = 0,88. Startverdi = 1000, så derfor 1000·0,88^x

b) Høyde: 0+5,5 = 5,5. 5,5+5,5 = 11. 11+5,5=16,5

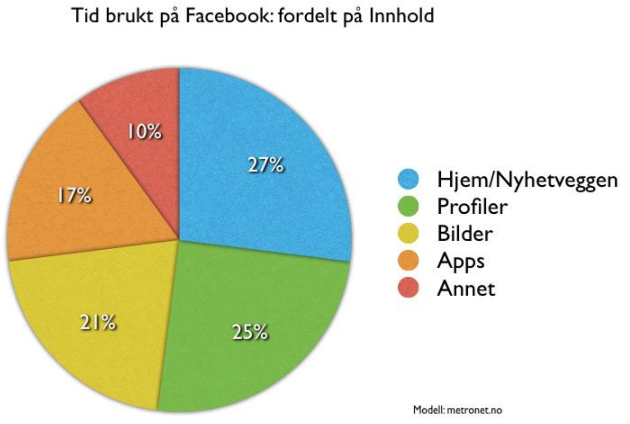
Lufttrykk: 1000/2= 500. 500/2 = 250. 250/2 = 125

c) h(x) = 1000 – $125x$. Siste setning viser modellens begrensning

d) Ca. 325 hPa for f og g. (1000/3=333, så stemmer bra for f og g).

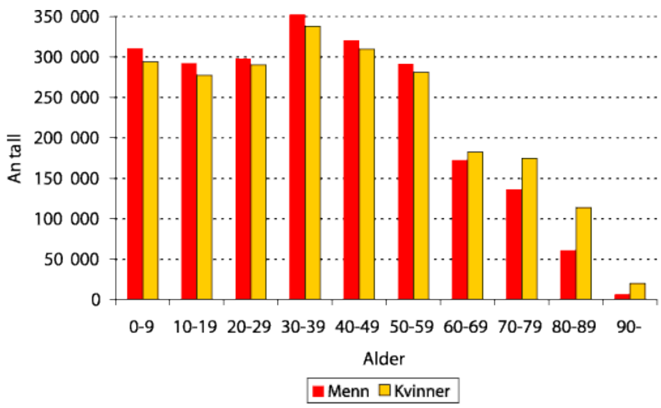
Negativ verdi for h, se c

Kapittel 8. Statistikk



Dette kapitlet handler blant annet om:

- Beregne gjennomsnitt og andre sentralmål.
- Framstille data i frekvenstabeller.
- Beregne standardavvik og andre spredningsmål.
- Framstille data i søyle-, sektor- og andre typer diagrammer.
- Bruke Excel til å gjøre statistiske beregninger.



1. Hva *er* statistikk?

Statistikk handler om å trekke informasjon ut av et *datamateriale* og å framstille materialet på oversiktlige måter. Et datamateriale består av mange tall, og hvert tall kaller vi gjerne en *observasjon.* Eksempler på datamateriale:

- Standpunktkarakterene til alle elevene i 2P som var oppe til eksamen
- Høydene til alle som er på militærsesjon et år
- Antall mål en bestemt fotballspiller har scoret i hver kamp han har spilt
- Maksimumstemperaturen på Blindern hver dag i 2013

Vi bruker karakterene i to 2P-grupper med tilsammen 50 elever som eksempel:

2 3 1 3 3   5 1 2 2 4   6 2 2 1 2   3 1 2 4 4 5 2 2 3 3   1 2 4 2 5   4 4 1 2 3   2 2 3 1 5 4 2 1 5 2
3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut. Vi framstiller derfor tallene i en *frekvenstabell* og som et *diagram*.

2. Frekvenstabeller

En *frekvenstabell* viser hvor mange ganger hver dataverdi forekommer. I datamaterialet ovenfor er det seks dataverdier (de seks mulige karakterene), og det er 10 elever som har fått karakteren 3. Vi sier at *frekvensen* til karakteren 3 er lik 10. Et annet ord for frekvens er *hyppighet*.

Frekvenstabellen blir slik:

Karakter	Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1

Vi bør regne ut summen av alle seks frekvensene og sjekke at den blir lik antall observasjoner (her 50).

Ofte er det mer opplysende å finne ut hvor stor *del* av datamaterialet hver frekvens utgjør. Det oppgir vi i prosent og kaller det *relativ frekvens.* Her er et eksempel på utregning:

Relativ frekvens for karakteren 4: $\frac{8}{50} = 0{,}16 = 16\ \%$

Her er tabellen en gang til hvor vi har tatt med relative frekvenser:

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens
1	9	18 %
2	17	34 %
3	10	20 %
4	8	16 %
5	5	10 %
6	1	2 %

Sjekk at summen av de relative frekvensene blir 100 %.

Tabellen under er utvidet slik at den også viser *kumulativ frekvens* og *relativ kumulativ frekvens*. Ordet kumulativ betyr “oppsamlet”.

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	18 %	9	18 %
2	17	34 %	26	52 %
3	10	20 %	36	72 %
4	8	16 %	44	88 %
5	5	10 %	49	98 %
6	1	2 %	50	100 %

Dette betyr for eksempel at 36 av de 50 elevene fikk 3 eller dårligere og at dette utgjør 72 % av elevene.

Oppgave 1

Løs denne oppgaven uten kalkulator.
Noen elever ble spurt om hvor mange PCer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Framstill disse dataene i en tabell som viser frekvenser, kumulative frekvenser, relative frekvenser og relative kumulative frekvenser.

3. Diagrammer

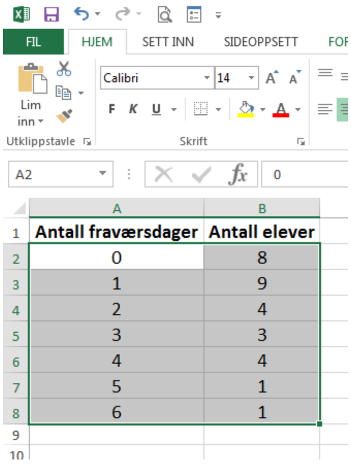
3.1 Søylediagram (stolpediagram)

Tallene i en frekvenstabell kan vi også framstille i et *diagram*. Det er mest aktuelt å gjøre dette i del 2 - oppgaver, og da kan vi bruke regnearket Excel. Men du bør også kunne tegne et diagram på papir i del 1.

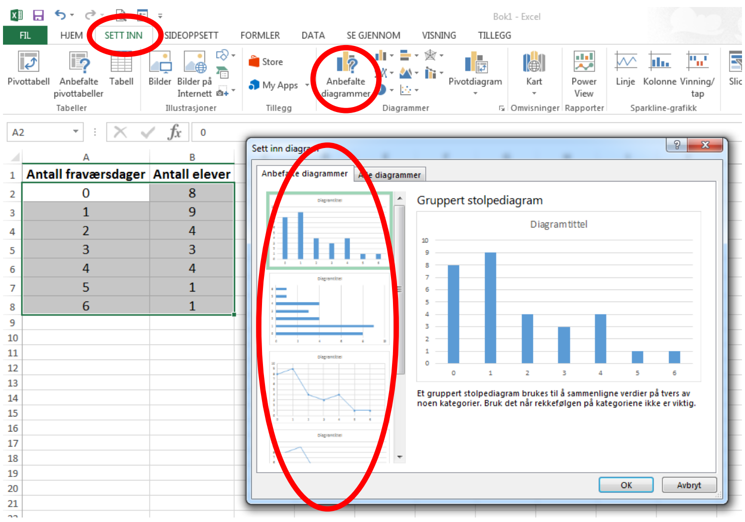
Det er noen små forskjeller på menyer og kommandoer mellom Excel på Windows og Excel på Mac. Teksten beskriver Windows-versjonen. Hvis du bruker Mac får du et ark av læreren som beskriver forskjellene på de to versjonene.

Vi bruker en tabell over elevfravær som eksempel:

Legg inn dataene som du vil lage søylediagram av i Excel. Merk ut med pekeplate eller mus dataområdet. Ikke ta med eventuell overskrift.

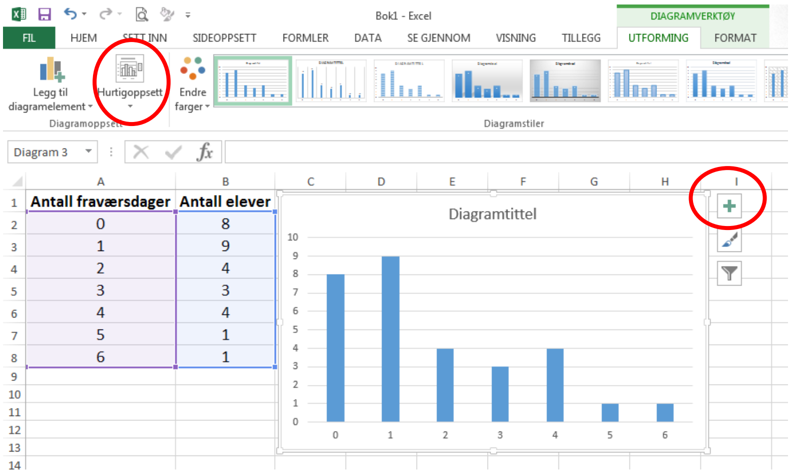


Velg fanen *Sett inn* og *Anbefalte diagrammer*. I nytt vindu velg ønsket diagram og klikk ok:

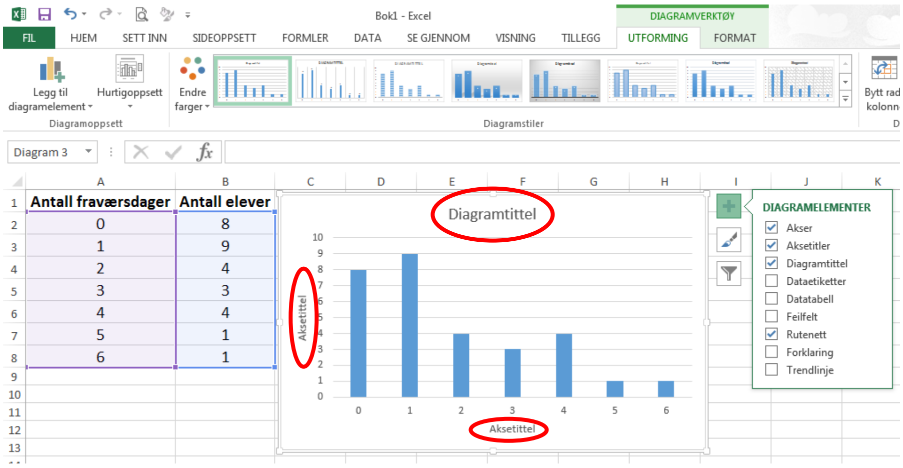


<u>Formatering av diagrammet, diagramtittel og aksetitler:</u>

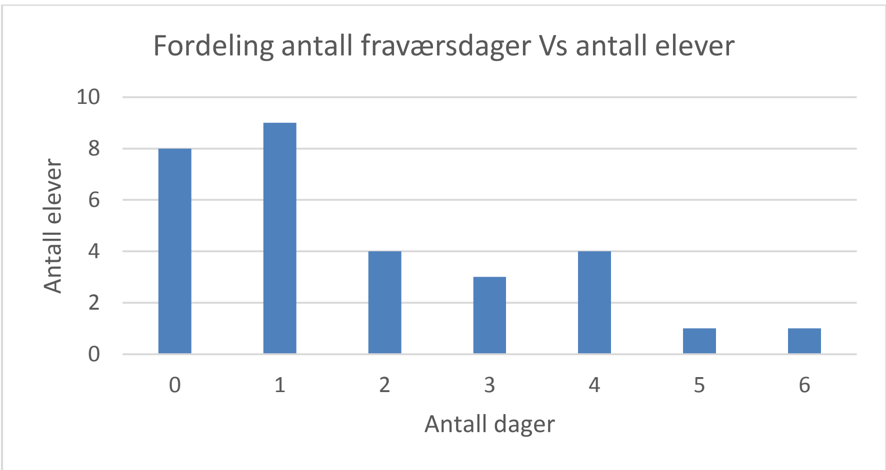
Velg enten fanen *hurtigoppsett* eller + tegnet til høyre på diagram vinduet.



Skriv inn ønsket tekst inn i feltene diagramtittel og aksetittel:



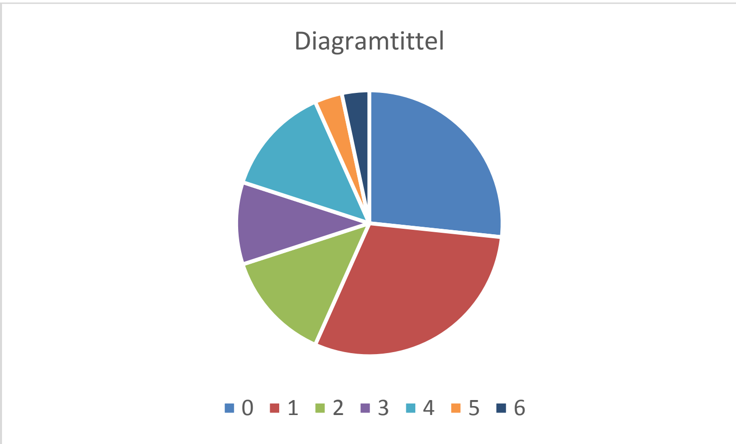
Diagrammet ferdig:



Av og til vil du lage diagrammer hvor det er mer enn en kolonne for hver dataverdi. Et eksempel kan være fraværet i flere klasser som skal sammenlignes. Da merker du bare ut alle kolonnene det skal lages søyler av. Resten blir som før.

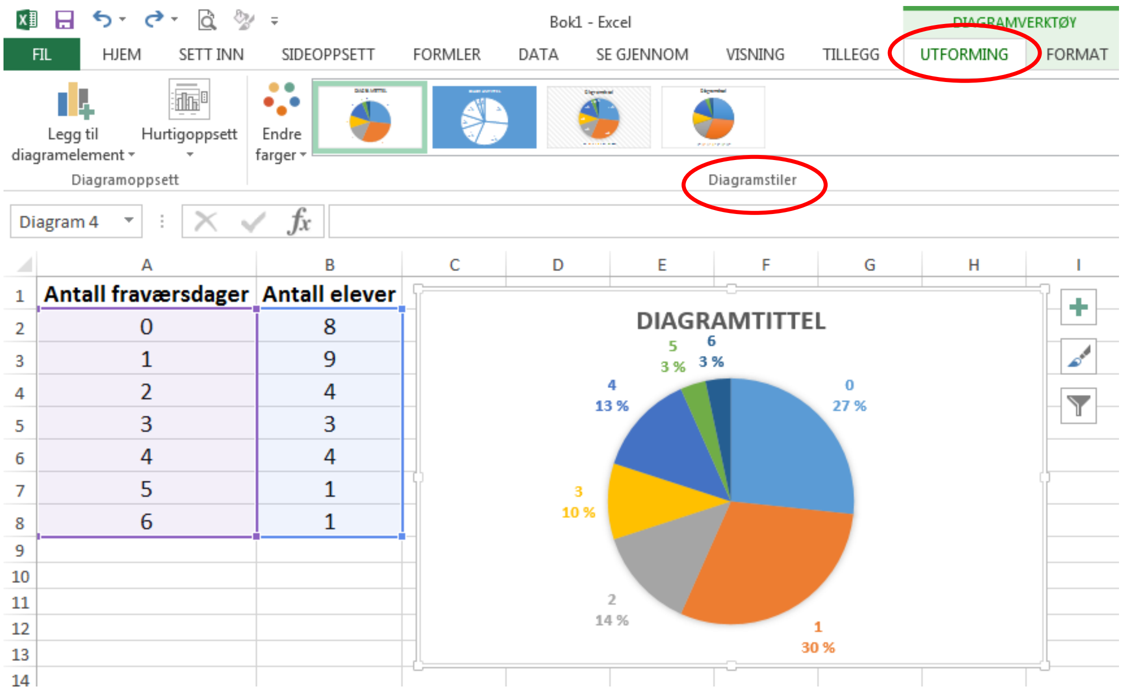
3.2 Sektordiagram

I mange tilfelle hvor man ikke har for mange dataverdier, er det vanlig å lage et *sektor-diagram* (populært kalt "kakediagram"). Vi går fram på samme måte som for et stolpediagram, men velger *Sektor* istedenfor Stolpe. Med tallene fra forrige eksempel får vi da dette diagrammet:

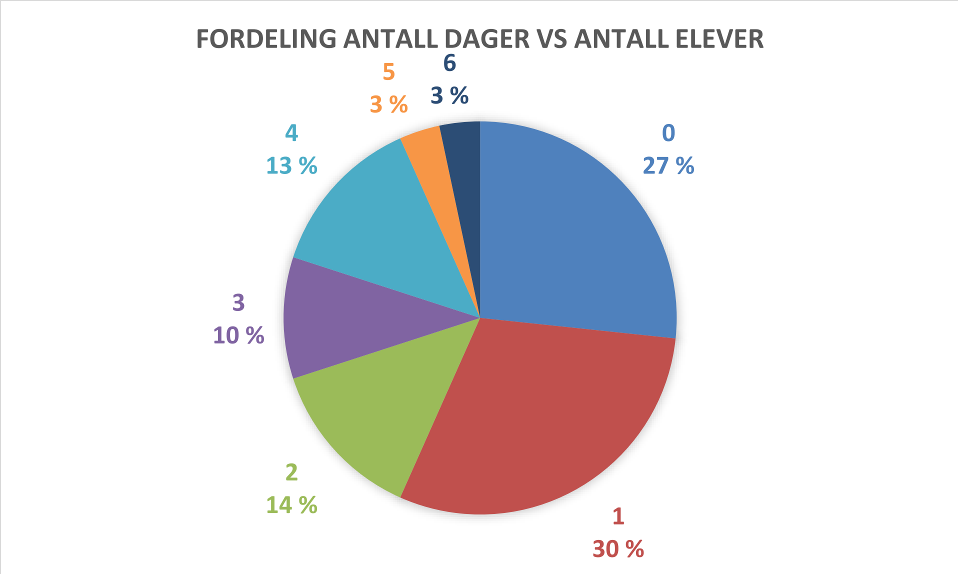


Det er en sektor for hver av de sju verdiene til antall fraværsdager. Disse verdiene er fargekodet, og koden står til høyre. I svart-hvitt er det vanskelig å se hva som er hva.

Vise den relative frekvensen i prosent for hver av sektorene. Velg fanen *utforming* og velg et av *diagramstilene*:



Til slutt kan du skrive en passende diagramtittel.



Det er mulig å lage mye "pynt" på diagrammene. Ikke bruk tid på det, i hvert fall ikke på prøver!

Et diagram skriver du ut på vanlig måte etter å ha klikket på det. Da får du bare med diagrammet, ikke hele regnearket.

Oppgave 2
Framstill frekvenstabellen i oppgave 1 som et søylediagram og som et sektordiagram

3.3 Linjediagram

Linjediagrammer brukes nesten bare for å vise hvordan noe utvikler seg over tid. Det betyr at på vannrett akse har vi som regel timer, dager, uker, måneder eller år.

I Excel lager du et linjediagram på samme måte som et stolpediagram.

3.4 Tegne sektordiagram for hånd

I del 1 kan du hende at du blir bedt om å tegne et sektordiagram på papir. Da vil det bare være noen få sektorer, og det vil være tall som skal være mulig å håndtere uten å være veldig god i hoderegning.

For å tegne et bra sektordiagram trenger du passer, gradskive og linjal.

Eksempel 1

En del mennesker ble spurt om de var fornøyd med regjeringen. 60 % svarte “ja”, 30 % svarte “nei” og 10 % svarte “vet ikke”. (Dette er altså de relative frekvensene for dataverdiene.)

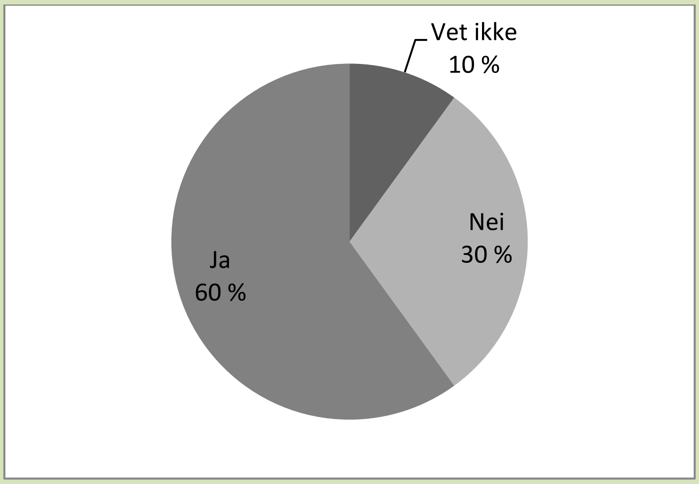
Vi vil lage et sektordiagram som illustrerer svarene. Vi regner da ut hvor mange grader hver av de tre sektorene må fylle. Hele sirkelen utgjør 360^{o}.

Ja-sektoren må fylle $360^{o} \cdot 0,6 = 216^{o}$.

Nei-sektoren må fylle $360^{o} \cdot 0,3 = 108^{o}$.

Vet ikke-sektoren må fylle $360^{o} \cdot 0,1 = 36^{o}$.

Vi lager en litt stor sirkel med passer og bruker gradskive til å lage de tre sektorene med riktig gradtall. Til slutt skriver vi passende tekst i hver sektor. Resultatet skal være omtrent slik:



Oppgave 3

To klasser på 60 elever skal ha aktivitetsdag. 12 elever ønsker langrenn, 22 slalåm, 18 aking og 8 fottur. Lag et sektordiagram på papir (og uten kalkulator) som illustrerer denne svarfordelingen.

Tips: Legg merke til at 360/60 = 6. En elev svarer altså til 6 grader.

4. Sentralmål

Et *sentralmål* er et tall som viser hovedtendensen i et datamateriale. De vanligste sentralmålene er *gjennomsnitt*, *median* og *typetall*.

4.1 Gjennomsnitt

Vi finner *gjennomsnittet* av et datamateriale ved å legge sammen alle observasjonene og dividere med antall observasjoner.

Eksempel 2
Høydene til 10 gutter (i cm) er 187, 182, 175, 184, 173, 180, 182, 177, 171, 186.

Vi regner ut summen av høydene: 187 + 182 + 175 + 184 + 173 + 180 + 182 + 177 + 171 +186 = 1797.

Gjennomsnittet er 1797 cm /10 = 179,7 cm.

Oppgave 4

Noen elever ble spurt om hvor mange PCer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Finn gjennomsnittlig antall "datadingser" i disse familiene.

Oppgave 5

a) Kan en gjennomsnittshøyde være større enn *alle* høydene som er brukt for å regne ut gjennomsnittet?
b) Kan *alle* høydene være lik gjennomsnittshøyden?

Eksempel 3
Hvis datamaterialet er satt i en frekvenstabell, finner vi gjennomsnittet slik:

Karakter	Frekvens	Karakter * Frekvens
1	9	9
2	17	34
3	10	30
4	8	32
5	5	25
6	1	6
	Sum = 50	**Sum = 136**

Dette viser at summen av alle 50 karakterene er 136.
Gjennomsnittskarakteren er 136 / 50 = 2,72

Oppgave 6
Taiba spiller håndball. Hun har laget en tabell som viser antall mål hun har scoret i kampene. Tabellen viser for eksempel at i 5 av kampene har hun scoret 2 mål i hver kamp. Frekvensene er her antall kamper hvor hun har scoret 0 mål, 1 mål, osv.

Antall mål	Antall kamper
0	2
1	3
2	5
3	7
4	8
5	6
6	2

a) Hvor mange kamper har hun spilt?
b) Lag en ekstra kolonne og finn ut hvor mange mål hun har scoret tilsammen på disse kampene.
c) Hvor mange mål har hun scoret i gjennomsnitt per kamp?

4. 2 Median

Medianen i et datamateriale er den midterste verdien når materialet er sortert i stigende rekkefølge.

Eksempel 4
Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5 og 1?
Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2**, 4, 5. Da ser vi at medianen er 2.
Eksempel 5
Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5, 1 og 3?

Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2, 3**, 4, 5. Da ser vi at det er ikke noe tall nøyaktig i midten. I slike tilfelle er medianen definert som gjennomsnittet av de to verdiene nærmest midten. Derfor er medianen $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Oppgave 7

a) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall bøker noen tilfeldige elever hadde lest i 2012: 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3.
b) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall fraværsdager for noen elever: 2, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2, 0.

Hvis datamaterialet er ordnet i en frekvenstabell, er medianen den minste dataverdien hvor den relative kumulative frekvensen er større enn eller lik 50 %.

Karakter	**Frekvens**	**Kumulativ frekvens**	**Relativ kum. fr.**
1	9	9	18 %
2	17	26	**52 %**
3	10	36	72 %
4	8	44	88 %
5	5	49	98 %
6	1	50	100 %

Her er medianen lik 2.

4.3 Typetall

Typetallet i et datamateriale er den dataverdien som forekommer flest ganger ("er typisk for") i datamaterialet.

Eksempel 6
Typetallet i karaktereksemplet ovenfor er 2, fordi det er flest elever som har fått 2 (17 elever).

Oppgave 8

Finn typetallet i datamaterialet i oppgave 1.

5. Spredningsmål

Et *spredningsmål* er et tall som sier noe om hvor stor spredning det er på tallene i et datamateriale.

5.1 Variasjonsbredde

Det enkleste spredningsmålet er *variasjonsbredde*.

Variasjonsbredden i et datamateriale er forskjellen mellom største og minste verdi i materialet.

Eksempel 7
I oppgave 7a hadde vi tallene 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3, som var antall leste bøker i 2012. Største verdien er 7 bøker og minste er 0 bøker. Variasjonsbredden er 7 bøker – 0 bøker = 7 bøker.

Oppgave 9

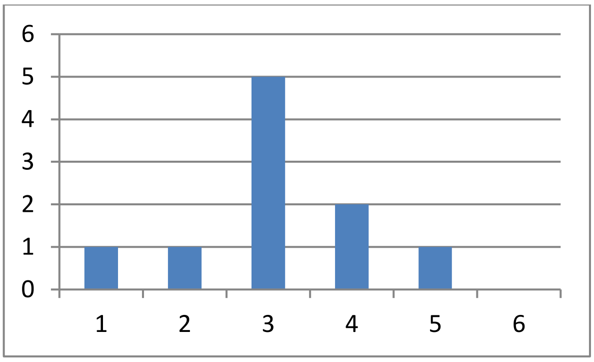
Åtte jenter løper 100 m. Tidene i sekunder er 15,6 17,8 14,4 18,2 16,3 14,9 15,8 17,1.
Finn variasjonsbredden.

5.2 Standardavvik

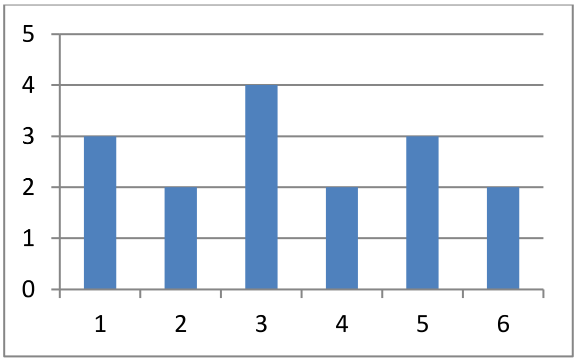
Ofte gir ikke variasjonsbredden et godt bilde av spredningen. For eksempel kan vi tenke oss en 2P-gruppe hvor nesten alle elevene fikk karakter 3, mens en elev fikk 1 og en fikk 6. I en annen gruppe fikk to elever 1, fire fikk 2, fem fikk 3, fire fikk 4, tre fikk 5 og to fikk 6. Variasjonsbredden er 5 i begge gruppene, men det er likevel naturlig å si at det er mer spredning i karakterene i den andre gruppen.

Standardavvik er et spredningsmål som sier noe om hvor "bred" en fordeling er. Det venstre diagrammet nedenfor viser et datamateriale med lite standardavvik og det høyre et med stort standardavvik.

Den nøyaktige definisjonen av standardavvik er litt vanskelig, så vi tar den ikke med her. Heldigvis er det bare aktuelt å beregne standardavvik i del 2-oppgaver, og da kan vi gjøre det ved å bruke regnearket Excel slik det er forklart i neste delkapittel.



Lite standardavvik.



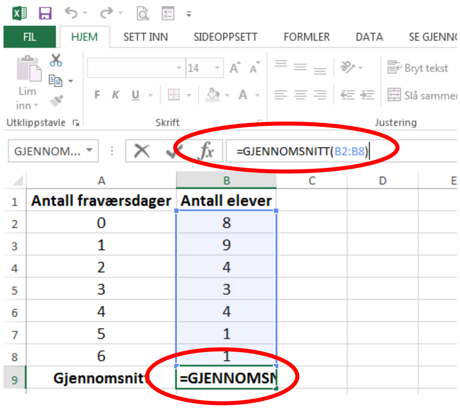
Stort standardavvik.

6. Beregning av sentralmål og spredningsmål i Excel

De sentral- og spredningsmål i 2P som kan være aktuelle å beregne i Excel er gjennomsnitt, median, typetall og standardavvik. Men husk at gjennomsnitt og median med enkle tall må du også kunne beregne uten hjelpemidler.

Viktig: alle formler og kommandoer må begynne med likhetstegn (=).

I. Klikk på cellen som skal inneholde sentralmålet og sett inn et likhetstegn (=).
II. Skriv inn ønsket kommando med parentestegn: Gjennomsnitt(dataområde) eller Median(dataområde) eller Modus(dataområde), modus er det samme som typetall eller STDAV.P.(dataområde), standardavvik.
III. Bruk musepekeren og marker dataområdet til kommandoen og trykk *Enter*.



- Ikonet f_x på verktøylinjen er en hurtigfunksjon. Da får du likhetstegn inn i cellen. Og tilgang på alle Excel kommandoer i et nytt vindu.
- Vi kan bytte mellom å se formler og beregninger i Excel ved å taste ***(Ctrl*** + **`).** Apostrofe = (Shift + tasten bak pluss**) eller** Velg *fane-formler* deretter *verktøyikon-Vise formel*.
- På en prøve må du legge ved utskrift av både resultater og formler med navn på rader og på kolonner.

Eksempel 8

Vi har målt høyden til 7 jenter. Høydene i cm er: 177,164, 170, 168, 172, 161, 169.

Bildet under viser hvordan vi finner medianen, gjennomsnittet og standardavviket til disse høydene i Excel. Til venstre ser vi formlene som må skrives inn og til høyre hvordan resultatene blir.

Formelen for antall i B11 trenger vi egentlig ikke her. Den er bare tatt med for å vise at Excel lett kan telle opp antall celler i et område; her antall høyder.

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	= ANTALL(B3:B9)
12	Gjennomsnitt:	=GJENNOMSNITT(B3:B9)
13	Standardavvik:	=STDAV.P(B3:B9)
14	Median:	=MEDIAN(B3:B9)

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	7
12	Gjennomsnitt:	168,7
13	Standardavvik:	4,8
14	Median:	169

7. Klassedelt (gruppedelt) materiale

Når det er mange ulike dataverdier er det upraktisk å ta med alle i en frekvenstabell. Et eksempel er inntektsstatistikk hvor inntekten kan ha tusenvis av forskjellige verdier. Da grupperer vi verdiene i *klasser* (*grupper*) og finner frekvensen for hver klasse.

Her er et eksempel på en klassedelt frekvenstabell som viser inntekten til lønnsmottakerne i en tenkt kommune. Inntektene er oppgitt i tusener av kroner.

Inntekt	Frekvens
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45
	N = 14211

Dette betyr for eksempel at det var 678 lønnsmottakere som hadde en inntekt *fra og med* 100 000 kr og *inntil* 200 000. En inntekt på nøyaktig 200 000 kr faller i neste klasse, nemlig [200, 300>. Nederst i frekvenstabellen har vi regnet ut det totale antall lønnsmottagere (N).

Legg merke til alle klassene ikke behøver å ha samme bredde. Bredden til klassen [300, 400> er 100, mens klassebredden til [1000, 5000> er 4000.

7.1 Gjennomsnitt i klassedelt materiale

Fordi vi ikke kjenner alle verdiene i et klassedelt materiale, går det ikke an å finne en *nøyaktig* verdi for gjennomsnittet. Det beste vi kan gjøre er å anta at *alle* verdiene i en klasse er lik verdien *midt i klassen*. Da utvider vi tabellen og regner slik:

Inntekt	Frekvens f	Midtpunkt x_m	$x_m \cdot f$
[0, 100>	467	50	23350
[100, 200>	678	150	101700
[200, 300>	1490	250	372500
[300, 400>	2653	350	928550
[400, 500>	3785	450	1703250
[500, 750>	4106	625	2566250
[750, 1000>	987	875	863625
[1000, 5000>	45	3000	135000
	N = 14211		Sum = 6694225

Gjennomsnittet blir da 6694225 : 14211 = 471, som tilsvarer 471 000 kr.

7.2 Median i klassedelt materiale

Heller ikke medianen er det mulig å finne nøyaktig i et klassedelt materiale. For å finne en tilnærmet verdi lager vi først en tabell som viser kumulativ frekvens:

Inntekt	**Frekvens**	**Kumulativ frekvens**
[0, 100>	467	467
[100, 200>	678	1145
[200, 300>	1490	2635
[300, 400>	2653	5288
[400, 500>	3785	9073
[500, 750>	4106	13179
[750, 1000>	987	14166
[1000, 5000>	45	14211
	$N = 14211$	

Hvis alle inntektene var ordnet i stigende rekkefølge, ville medianen være inntekten på plass nr. $14212 : 2 = 7106$. Vi ser av kolonnen med kumulativ frekvens at denne inntekten ligger i klassen [400,500>. For å beregne en best mulig verdi for medianen må vi anta at alle de 3785 inntektene i denne klassen ligger *jevnt fordelt* innenfor klassen.

Eksamensoppgaver

E1
(Eksamen vår 2010, Del 1)

I fjor kom alle elevene i en matematikkgruppe opp til eksamen i 2P. De oppnådde disse resultatene:

1, 6, 5, 4, 3, 2, 5, 5, 2, 4, 2, 2, 6, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 5

1) Lag en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens.
2) Finn medianen og gjennomsnittet for datamaterialet.

E2
(Eksamen vår 2011, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange mål som ble scoret i fotballkampene mellom Rosenborg og Brann i Eliteserien i årene fra 2005 til 2009:

5 5 0 4 3 5 2 0 2 2

1) Finn gjennomsnittet og medianen for dette datamaterialet.
2) Sett opp resultatene i en tabell. Tabellen skal vise frekvens og kumulativ frekvens.
3) Hva er den kumulative frekvensen for to mål, og hva betyr dette?

E3
(Eksamen høst 2009, Del 2)

Tabellen nedenfor viser karakterfordelingen på en matematikkeksamen et år.

Karakter	Elever
1	12
2	47
3	49
4	57
5	13
6	3

a) Framstill datamaterialet i tabellen ved hjelp av to ulike diagrammer.

b) 1) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 1?
   2) Hva var gjennomsnittskarakteren?

Året etter var det 234 elever som hadde eksamen. Gjennomsnittskarakteren dette året var 3,42.

c) Hva var gjennomsnittskarakteren dersom vi ser disse to årene under ett?

E4

(Eksamen høst 2012, Del 1)

Alle som går på tur til Pollfjell, skriver navnet sitt i boka som ligger i postkassen på toppen av fjellet. Nedenfor ser du hvor mange som har skrevet seg inn i boka hver uke de 12 siste ukene.

6 12 20 4 10 15 5 12 8 12 18 10

Bestem gjennomsnittet, medianen, typetallet og variasjonsbredden for dette datamaterialet.

E5

(Eksamen vår 2012, Del 1)

Antall datamaskiner	Antall elever
1	3
2	4
3	3
4	6
5	2
6	2

20 elever blir spurt om hvor mange datamaskiner de har hjemme. Se tabellen ovenfor. Finn variasjonsbredden, typetallet, medianen og gjennomsnittet.

E6

(Eksamen høst 2012, Del 2)

År	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Antall kamper per år	1	2	4	10	9	6	4	9	11	11	4
Antall mål per år	0	0	2	3	3	2	0	5	1	4	0

Tabellen ovenfor viser hvor mange landskamper Jan Åge Fjørtoft spilte, og hvor mange mål han skåret per år i perioden 1986–1996.

a) Hvor mange mål skåret Fjørtoft i gjennomsnitt per kamp i denne perioden?
I hvilket år skåret han flest mål per kamp?

b) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din, og fyll inn tallene som mangler.
Hva er den kumulative frekvensen for to mål per år, og hva forteller dette svaret?

Antall mål per år	Frekvens	Kumulativ frekvens
0		
1		
2		
3		
4		
5		

E7
(Eksamen vår 2013, Del 2)

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013	
Parti	**Antall representanter**
Arbeiderpartiet	64
Fremskrittspartiet	41
Høyre	30
Sosialistisk Venstreparti	11
Senterpartiet	11
Kristelig Folkeparti	10
Venstre	2

a) Lag et sektordiagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013		
Parti	**Antall kvinner**	**Antall menn**
Arbeiderpartiet	32	32
Fremskrittspartiet	10	31
Høyre	9	21
Sosialistisk Venstreparti	3	8
Senterpartiet	7	4
Kristelig Folkeparti	4	6
Venstre	2	0

b) Lag et passende diagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

E8
(Eksamen høst 2008, Del 2)

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

a) Finn gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.
b) Finn variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.
c) Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

E9
(Eksamen høst 2010, Del 2)

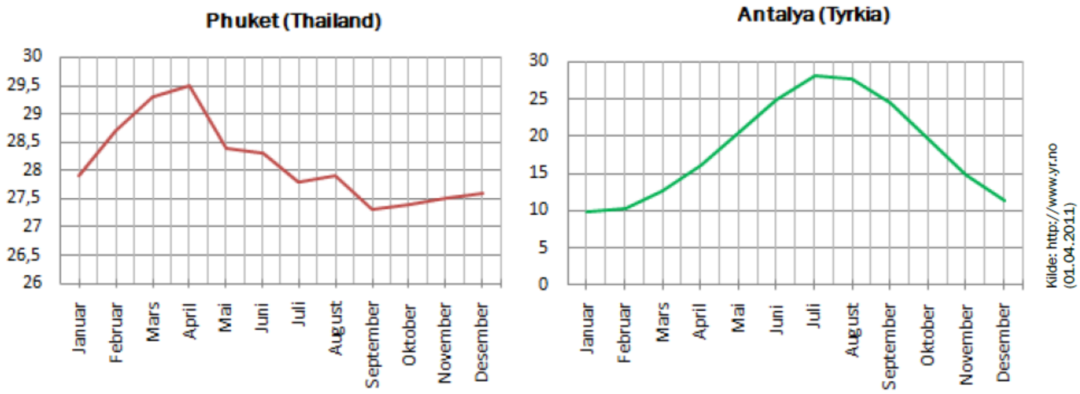
I klasse 1A er det 12 jenter og 12 gutter. Nedenfor ser du hvor mange timer de bruker på lekser hver uke.

Jentene: 7, 5, 5, 7, 7, 6, 8, 8, 5, 4, 6, 10

Guttene: 2, 5, 6, 7, 9, 6, 4, 9, 12, 2, 13, 3

Bruk ulike sentral- og spredningsmål og gjør rede for hva dette datamaterialet viser om jentenes og guttenes arbeidsvaner i denne klassen.

E10
(Eksamen vår 2012, Del 2)



Ovenfor ser du linjediagram som viser gjennomsnittstemperaturen per måned ved to kjente feriesteder.

a) Bruk diagrammene og lag en tabell som viser gjennomsnittstemperaturen per måned for hvert av de to stedene Phuket og Antalya.

b) 1) Finn gjennomsnittstemperaturen per år for hvert av de to stedene.
2) Finn standardavviket for temperaturene i a) for hvert av de to stedene.

Jon påstår at det er godt samsvar mellom diagrammene og resultatene fra b).

Asbjørn er enig, men mener at diagrammene lett kan tolkes feil.

c)  Forklar hvorfor diagrammene lett kan tolkes feil.
Hvordan kunne diagrammene vært laget for å unngå dette?

E11

(Eksamen vår 2011, Del 1)

Ved en skole er det 120 elever. Elevrådet skal arrangere aktivitetsdag, og elevene kan melde seg på én av fire turer.

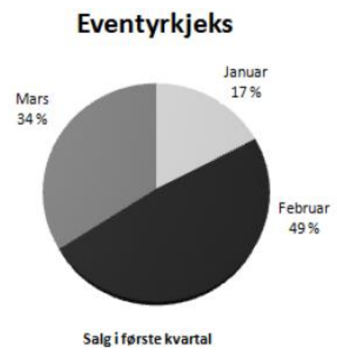
Elevene fordeler seg slik:

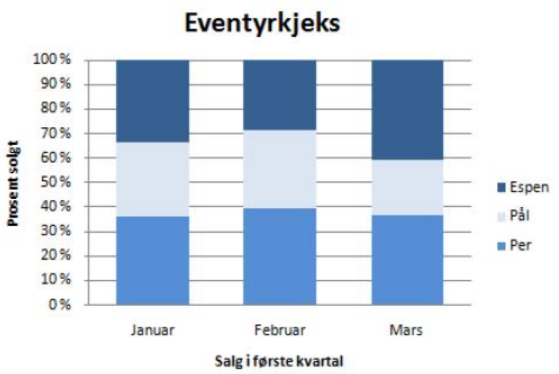
Tur	Antall elever
Tur 1 (Robåt)	15
Tur 2 (Sykkel)	30
Tur 3 (Høgfjell, kort løype)	40
Tur 4 (Høgfjell, lang løype)	35

Gjør beregninger og lag et sektordiagram som viser fordelingen. Det skal gå klart fram hvor mange grader hver av sektorene i diagrammet er på.

E12

(Eksamen høst 2011, Del 1) 





Per, Pål og Espen selger pakker med Eventyrkjeks. Diagrammene ovenfor viser resultater fra første kvartal 2011.

a) Bruk opplysningene i tabellen nedenfor til å lage tilsvarende diagrammer for andre kvartal 2011.

Salg i andre kvartal			
	April	Mai	Juni
Per	225	90	450
Pål	675	180	450
Espen	0	630	900

b) Lag et diagram for andre kvartal som viser hvor mange pakker med Eventyrkjeks hver av de tre guttene solgte hver måned.

E13
(Eksamen vår 2010, Del 2)

År	Antall laks	Totalvekten av laksen (kg)	Gjennomsnittsvekten for laksen (kg)
2000	3447	14550	4,22
2001	5694	24218	4,25
2002	3142	1)	5,51
2003	4401	22425	5,10
2004	2928	17979	2)
2005	5783	28144	4,87
2006	6507	26695	4,10
2007	3555	21074	5,93
2008	4782	28903	6,04
2009	3916	24361	6,22

Tabellen ovenfor viser hvor mange laks, totalvekten av laksen og gjennomsnittsvekten for laksen som er fanget i elva Gaula i Sør-Trøndelag de siste ti årene.

a) Hvilke tall skal stå i tabellfeltene som er merket 1) og 2)?
b) Lag et passende diagram som viser hvor mange laks som er fanget i Gaula per år de siste ti årene.
c) Finn gjennomsnittet av og standardavviket for totalvekten av laksen fanget i Gaula per år de siste ti årene.

E14
(Eksamen høst 2011, Del 2)

a) Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for tallmengden:

2 5 21 15 17 5 9 19 10 14 7 3 2 11 13

Vi dobler alle tallene i tallmengden og får:

4 10 42 30 34 10 18 38 20 28 14 6 4 22 26

b) Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for denne tallmengden.
Sammenlikn med resultatene fra a) og kommenter.

Berit får en idé og setter opp tabellen nedenfor.

Tallmengde 1 15 tall	2	5	21	15	17	5	9	19	10	14	7	3	2	11	13
Tallmengde 2 De 15 tallene doblet	4	10	42	30	34	10	18	38	20	28	14	6	4	22	26
Tallmengde 3 De 15 tallene tredoblet	6	15	63	45	51	15	27	57	30	42	21	9	6	33	39
Tallmengde 4 De 15 tallene firedoblet	8	20	84	60	68	20	36	76	40	56	28	12	8	44	52

Hun beregner median, gjennomsnitt og standardavvik for hver av tallmengdene og påstår at hun har funnet regler som sier noe om hvordan medianen, gjennomsnittet og standardavviket endrer seg når tallene i en tallmengde dobles, tredobles, firedobles osv.

c)  Formuler disse reglene, og gi en begrunnelse for at de er riktige.

E15
(Eksamen høst 2012, Del 2)

Nr	Resultat	Utøver	Land	Verdensdel
1	8,47	Christian Reif	Tyskland	Europa
2	8,46	Dwight Phillips	USA	Nord-Amerika
3	8,40	Fabrice Lapierre	Australia	Oceania
4	8,35	Alain Bailey	Jamaica	Sør-Amerika
5	8,33	Chris Noffke	Australia	Oceania
6	8,30	Irving Saladino	Panama	Sør-Amerika
7	8,27	Ndiss Kaba Badji	Senegal	Afrika
8	8,27	Eusebio Cáceres	Spania	Europa
9	8,25	Pavel Shalin	Russland	Europa
10	8,24	Salim Sdiri	Frankrike	Europa
11	8,24	Kafétien Gomis	Frankrike	Europa
12	8,23	Godfrey Khotso Mokoena	Sør-Afrika	Afrika
13	8,23	Christopher Tomlinson	England	Europa
14	8,22	Tommi Evilä	Finland	Europa
15	8,22	Tyrone Smith	Bermuda	Sør-Amerika
16	8,22	Greg Rutherford	England	Europa
17	8,21	Morten Jensen	Danmark	Europa
18	8,20	Wilfredo Martínez	Cuba	Sør-Amerika
19	8,20	Trevell Quinley	USA	Nord-Amerika
20	8,19	Christian Taylor	USA	Nord-Amerika

Ovenfor ser du verdensstatistikken fra 2010 for øvelsen lengdehopp for menn.

a) Lag et sektordiagram som viser hvordan de 20 utøverne fordeler seg mellom de ulike verdensdelene.
b) Finn gjennomsnittslengden og standardavviket for resultatene til de 20 utøverne.

Sondre har funnet resultatene for utøverne som står som nummer 21–40 på verdens-statistikken. Standardavviket for resultatene til disse 20 utøverne er tilnærmet lik 0,0258.

c)  Hva forteller dette om resultatene til utøverne som står som nummer 21–40, i forhold til resultatene til de 20 beste utøverne?

E16

Eksamen vår 2012, Del 2)

En dag gjorde klasse 1A et forsøk i naturfagtimen. Seks elever slapp hver sin stålkule fra 1 m høyde og målte tiden det tok før kulen traff bakken. Resultatene ser du i tabellen nedenfor.

Elev	1	2	3	4	5	6
Tid (sekunder)	0,46	0,45	0,47	0,44	0,52	0,46

a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for måleresultatene.

Klassen la merke til at elev nummer 5 målte en større falltid enn de andre. Mange mente at dette resultatet måtte skyldes målefeil, og at det derfor burde forkastes.

Da ga fysikklærer Strøm dem denne regelen:

> «Når vi har seks målinger, kan vi forkaste et måleresultat dersom det ligger mer enn 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet.»

b) Finn ut om måleresultatet til elev nummer 5 kan forkastes dersom vi bruker regelen ovenfor.

c) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for de fem andre måleresultatene. Hvordan har gjennomsnitt og standardavvik endret seg? Virker dette rimelig? Forklar.

E17

(Eksamen vår 2013, Del 1)

En kveld kjørte en taxisjåfør 10 turer.

Nedenfor ser du hvor mange passasjerer han hadde med på hver av turene.

1 5 3 3 5 2 1 4 1 2

a) Bestem medianen, gjennomsnittet og typetallet for dette datamaterialet.

b) Sett opp en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens for antall passasjerer på turene.

E18

(Eksamen vår 2013, Del 2)

Tabellene nedenfor viser resultatene for de åtte beste utøverne på 1500 m skøyter for menn under OL i 1968 og under OL i 2010.

OL 1968

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Kees Verkerk	Nederland	123,4
2	Ivar Eriksen	Norge	125,0
2	Ard Schenk	Nederland	125,0
4	Magne Thomassen	Norge	125,1
5	Johnny Höglin	Sverige	125,2
6	Bjørn Tveter	Norge	125,2
7	Svein-Erik Stiansen	Norge	125,5
8	Eduard Matusevitsj	Sovjetunionen	126,1

OL 2010

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Mark Tuitert	Nederland	105,57
2	Shani Davis	USA	106,10
3	Håvard Bøkko	Norge	106,13
4	Ivan Skobrev	Russland	106,42
5	Mo Tae-bum	Korea	106,47
6	Chad Hedrick	USA	106,69
7	Simon Kuipers	Nederland	106,76
8	Mikael Flygind Larsen	Norge	106,77

a) Hvor mange prosent sank vinnertiden med fra 1968 til 2010?

b) Bestem gjennomsnittstiden for de åtte beste i 1968 og for de åtte beste i 2010.

c) Bestem standardavviket for de to tallmaterialene.
Hvorfor er standardavviket større i 1968 enn i 2010?

E19

(Eksamen vår 2011, Del 1)

I en 2P-gruppe er det 10 elever. Læreren har undersøkt hvor mye tid elevene bruker på matematikkleksene i løpet av en uke.

Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Antall minutter	Antall elever
$[0,30\rangle$	1
$[30,60\rangle$	3
$[60,120\rangle$	5
$[120,240\rangle$	1

Finn gjennomsnittet for dette grupperte datamaterialet.

E20
(Eksamen høst 2012, Del 1)

Tabellen nedenfor viser hvor mye penger hver av de 10 elevene i en 2P-gruppe bruker i kantinen i løpet av en uke.

Kroner	Antall elever
$[0,50\rangle$	1
$[50,100\rangle$	5
$[100,150\rangle$	1
$[150,200\rangle$	3

Gjør beregninger og avgjør om gjennomsnittet er større enn medianen for dette datamaterialet.

E21
(Eksamen vår 2011, Del 2)

Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene.

Fartsgrense 50 km/h	50
Fart	Antall biler
$[45,50\rangle$	25
$[50,55\rangle$	26
$[55,60\rangle$	23
$[60,65\rangle$	3
$[65,70\rangle$	2
$[70,75\rangle$	1

Fartsgrense 80 km/h	80
Fart	Antall biler
$[70,75\rangle$	7
$[75,80\rangle$	43
$[80,85\rangle$	17
$[85,90\rangle$	8
$[90,95\rangle$	0
$[95,125\rangle$	5

a) Presenter dataene fra tabellene ovenfor i hvert sitt stolpediagram.

b) Hvor mange prosent av bilførerne kjører 10 % eller mer over fartsgrensen i hver av de to kontrollene?

c) Finn gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.

d) Hvor mange prosent over fartsgrensen er gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene?

e) Bruk svarene i a), b), c) og d) til å vurdere om bilførerne kjører mest lovlydig på veistrekningen med fartsgrense 50 km/h eller på veistrekningen med fartsgrense 80 km/h.

E22

(Eksamen vår 2012, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange tekstmeldinger hver av de 20 elevene i en 2P-gruppe sendte i løpet av en uke:

4 88 69 21 66 8 16 57 86 21 37 22 78 27 28 44 42 71 82 95

1) Grupper datamaterialet i klasser med bredde 20. La den første klassen starte med 0.

   I hvilken klasse ligger medianen?

2) Finn gjennomsnittet i det klassedelte materialet.

E23

(Eksamen vår 2013, Del 1)

Tabellen nedenfor viser inntektene til personene i et borettslag.

Inntekt (i 1000 kroner)	Antall personer
$[300, 400\rangle$	20
$[400, 500\rangle$	20
$[500, 700\rangle$	10

Bestem gjennomsnittsinntekten til personene i borettslaget.

E24
(Eksamen høst 2011, Del 1)

Politiet har gjennomført en fartskontroll i 30 km-sonen utenfor skolen.
Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Fart (km/h)	Antall biler
$[20,30\rangle$	20
$[30,40\rangle$	20
$[40,50\rangle$	10

Finn gjennomsnittsfarten.

E25
(Eksamen vår 2008, Del 2)

Et nytt leilighetskompleks, UTSIKTEN, er fylt opp med nye beboere. En oversikt viser følgende aldersfordeling:

Alder	0–19 år	20–39 år	40–59 år	60–79 år
Frekvens	17	29	51	23

a) Hvor mange personer bor i leilighetskomplekset?
b) Tegn et søylediagram som viser aldersfordelingen.
c) Forklar hvorfor medianen må ligge i intervallet 40–59 år.
d) Regn ut gjennomsnittsalderen ut fra det klassedelte materialet.

E26

(Eksamen 2P-Y vår 2015, Del 1)

Alder	Frekvens
[20,30⟩	10
[30,40⟩	20
[40,50⟩	30
[50,70⟩	40

Tabellen over viser aldersfordelingen for lærerne ved en skole.

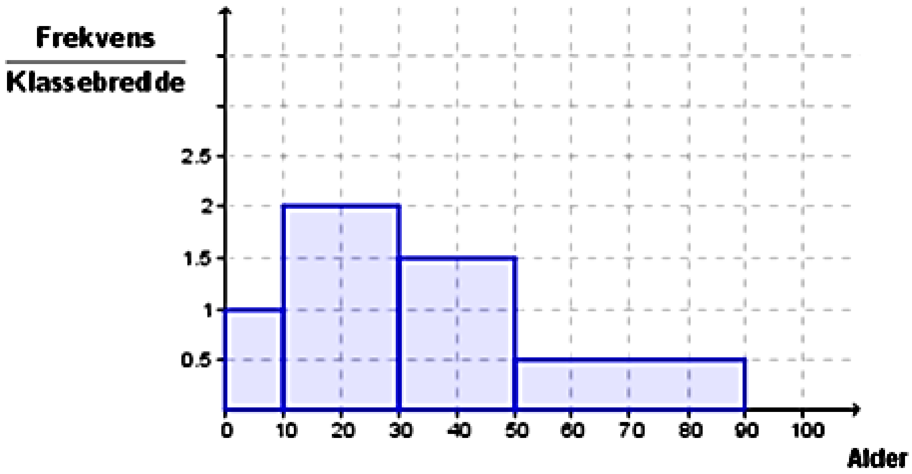
a) Bestem gjennomsnittsalderen for lærerne ved skolen.

b) Lag et histogram som viser aldersfordelingen for lærerne.

c) Utvid tabellen med en kolonne som viser relativ frekvens og en kolonne som viser kumulativ frekvens

E27

(Eksamen 2P-Y høst 2014, Del 1)



Histogrammet ovenfor viser aldersfordelingen blant de besøkende på en kinoforestilling.

a) Forklar at det var 30 besøkende mellom 30 og 50 år.

b) Hvor mange prosent av de besøkende var mellom 0 og 10 år?

c) Bestem gjennomsnittsalderen blant de besøkende.

Fasit

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 4   4,9
Oppgave 5 a) Nei b) Ja
Oppgave 6 a) 33 b) 108 c) 3,3
Oppgave 7 a) 2 b) 1,5
Oppgave 8 4
Oppgave 9 3,8

Fasit eksamensoppgaver

E1. 2) 4 3,75
E2. 1) 2,8   2,5
E3. b1) 6,6 % b2) 3,12 c) 3,29
E4. 11, 11, 12, 16
E5. 5, 4, 3,5,   3,3
E6 a) 0,28 1993
E8. a) 5,17 , 5,28 , 5,61, 5,69   b)   1,82, 0,56,   0,79, 0,22
E9. Jenter: Median 6,5 Gjennomsnitt 6,5 Variasjonsbredde 6 Standardavvik 1,6
Gutter: Median 6   Gjennomsnitt 6,5 Variasjonsbredde 11 Standardavvik 3,5
E13. a) 17312   6,14   c) 22566   4576
E14. a) 10 10,2   5,99   b) 20   20,4 11,98
E15   b) 8,275 0,082
E16 a) 0,467   0,026 b) Ja   c) 0,456 0,010
E17. a) 2,5 2,7   1
E18. a) 14,4 % b) 125,06 106,36 c) 0,71   0,39
E19. 78 min
E20. Gjennomsnitt 105 kr, median 95 kr.
E21. b) ca. 36,3 %, ca. 10,3 % c) ca. 53,4 km/h, ca. 81,2 km/h d) ca. 6,8 %, ca. 1,4 %
E22. 1) [40, 60>   2) 50
E23. 440 000 kr
E2433 km/h
E25. a) 120 d) 43,3 år
E26. a) 47 c) Relativ f: 10 %, 20 %, 30 %, 40 %. Kumulativ f: 10,30,60,100
E27. a) Arealet til søylene tilsvarer frekvensen. A = $20 \cdot 1{,}5 = 30$. b) 10 %. c) 34,5 år

Kapittel 9. Sannsynlighetsregning

Sannsynlighet handler om å finne ut hvor ofte noe vil skje i en prosess som kan gjentas mange ganger.

Kapitlet handler blant annet om dette:

- Hva *er* sannsynlighet.
- Beregne sannsynligheter ut fra forsøk.
- Beregne sannsynligheter når alle utfall er like sannsynlige; for eksempel i spill.
- Beregne sannsynligheten for at A *og* B skjer.
- Beregne sannsynligheten for at A *eller* B skjer.
- Beregne sannsynligheter ved hjelp av valgtre og krysstabell.

DINE VINNERSJANSER		
SPILL	SANNSYNLIGHET	ANTALL ÅR
Joker - onsdag (taktisk)	1 : 77.802	3 432
Joker - onsdag	1 : 92.657	4 087
Keno	1 : 107.359	4 736
Flax Million	1 : 125.000	5 514
Joker - lørdag	1 : 142.977	6 307
Lotto*	1 : 210.159	9 270
Extra	1 : 361 000	15 924
Flax Livet	1 : 500.000	22 055
Tippekupongen, søndag**	1 : 608 000	26 819
VikingLotto	1 : 613.576	27 065
Tippekupongen, lørdag**	1 : 940 000	41 464

Tabellen viser sannsynligheten for å bli millionær ved en innsats på 100 kroner.
Den viser altså sannsynligheten for å vinne toppgevinsten når denne utgjør mer enn 1 million.

1. Innledning

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.

I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er 80 % sannsynlig at Manchester United kommer til å slå Chelsea i lørdagens fotballkamp, eller at det bare er 10 % sannsynlig at Sara får 5 på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Manchester U. vil vinne, og at Sara antagelig ikke vil få 5. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotball-lagene og Sara har prestert tidligere. Hvis vi er helt sikre på at noe bestemt vil skje, sier vi ofte at "det er 100 % sikkert". Er vi sikre på at det ikke vil skje, kan vi si "det er null sannsynlighet" eller "null sjanse".
Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*. De enkleste regnemåtene skal du lære i dette kapitlet.
Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill.

2. Hva *er* sannsynlighet?

Anta at vi har undersøkt kjønn til 10 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	Antall	Antall i prosent
Gutt	5140	51,4 %
Jente	4860	48,6 %
Gutt eller jente	10000	100 %

Den andre kolonnen viser hvor mange tilfeller det er av hvert utfall.
Siste kolonne viser hvor mange prosent av forsøkene hvert av de to mulige utfallene forekommer.

Etter å ha gjort denne undersøkelsen, kan vi si at sannsynligheten for at et tilfeldig valgt barn er en gutt, er 51,4 %, eller 0,514. Sannsynligheten for at det er en jente, er 48,6 %, eller 0,486. Det skriver vi kort slik:

$$P(\text{gutt}) = 0{,}514 \,,\; P(\text{jente}) = 0{,}486.$$

Vi bruker P fordi sannsynlighet heter "probability" på engelsk.

Sannsynligheten for et bestemt utfall viser i hvor stor prosent av et forsøk dette utfallet forekommer, hvis vi gjør et forsøk *mange* ganger.
Verdien blir mer og mer nøyaktig jo flere ganger vi gjør forsøket.

Oppgave 1

På Hellerud videregående skole er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er gutt?

Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann er fargeblind?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann *ikke* er fargeblind?

3. Sannsynlighetsregning når alle utfall er like sannsynlige

3.1. Innledning

Hvis vi kaster et pengestykke har vi to mulige utfall. Vi kan få mynt, eller kron. Begge utfallene er like sannsynlige. Det betyr at P(M) = 1/2 og P(K) = 1/2. Fordi sannsynlighetene her er *nøyaktig* 50 % (0,50), bruker vi gjerne brøken ½ isteden.

Her er noen eksempler på forsøk og de mulige utfallene i hvert forsøk.

Forsøk	Mulige utfall
Kaste et pengestykke	Mynt, kron
Kaste en terning	1, 2, 3, 4, 5, 6
Trekke et kort fra en kortstokk med 52 kort	Hjerter ess, spar to, ... (tilsammen 52)
Bestemme kjønn til nyfødt barn	Gutt, jente
Bestemme antall jenter i en trebarnsfamilie	0, 1, 2, 3
Undersøke om en person er fargeblind	Fargeblind, ikke fargeblind
Undersøke fabrikkmerket på mobilen til en person	Apple, Samsung, LG, Nokia, HTC,...

3.2. Hendelser

Hva er sannsynligheten for å trekke en *hjerter* fra en kortstokk? Det er 13 hjerter i stokken slik at det er 13 av 52 mulige utfall som gir en hjerter.
Vi sier at "hjerter" er en *hendelse* som består av 13 utfall. Disse utfallene kaller vi *gunstige utfall* for hendelsen "hjerter". (Ordet "gunstig" betyr "passende" eller "bra".) Da finner vi sannsynligheten for at vi trekker et hjerterkort slik

$$P(\text{hjerter}) = \frac{13}{52} = \frac{13}{13 \cdot 4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

(her har vi skrevet sannsynligheten som både brøk, desimaltall og prosent).

Hvis alle utfallene er like sannsynlige, finner vi sannsynligheten for en *hendelse* slik:

$$P(\text{ en hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Hvis vi kaster to terninger, kan vi kalle summen av øynene for en hendelse. Summen kan variere fra 2 til 12. Det er $6 \cdot 6 = 36$ mulige utfall i dette forsøket. Hendelsen "summen av øynene er 7" har seks gunstige utfall: (1+6), (2+5), (3+4), (4+3), (5+2), (6+1). Da får vi

$$P(\text{sum øyne lik 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 3

a) Hva er sannsynligheten P(fem) for å få en *femmer* når vi kaster en terning?
b) Hva er sannsynligheten P(partall) for å få et *partall* når vi kaster en terning?
c) Hva er sannsynligheten for å trekke *hjerter ess* fra en kortstokk?
d) Hva er sannsynligheten for å trekke *ruter* fra en kortstokk?
e) Hva er sannsynligheten for å trekke *et "svart kort"* fra en kortstokk?
f) Hvordan ville du gå fram for å finne ut om alle fødselsdatoer er like sannsynlige? Anta at de faktisk er det. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person er født 1. mai? Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Oppgave 4

Finn sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger er lik
a) 5
b) 10
c) 12

3.3. Multiplikasjonsprinsippet: Hvordan finne antall mulige utfall

Anta at en restaurant tilbyr 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Du kan ikke bestemme deg og velger derfor forrett, hovedrett og dessert ved å sette ned fingeren i menyen helt tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å velge kamskjell til forrett, laks til hovedrett og sjokolademousse til dessert (hvis alle disse står på menyen)?

Vi antar at alle valg av de tre rettene er like sannsynlige, og trenger da antall mulige utfall. Hver av de tre forrettene kan vi kombinere med fem hovedretter. Det gir $3 \cdot 5 = 15$ mulige kombinasjoner. Hver av disse 15 kombinasjonene kan vi kombinere med 4 desserter. Det gir tilsammen $15 \cdot 4 = 60$ mulige treretters middager. Sannsynligheten for et bestemt treretters valg blir da 1/60.

Multiplikasjonsprinsippet: Hvis vi skal gjøre flere valg etter hverandre, finner vi antall mulige utfall ved å multiplisere antall muligheter i hvert av valgene.

Eksempel 1
Ida kan velge mellom sju sjokolader. For at det ikke skal bli for usunt, må hun også velge en av fire frukter. Hun klarer ikke å bestemme seg så hun trekker lodd for å velge. Hva er sannsynligheten for at hun trekker firkløver og pære?

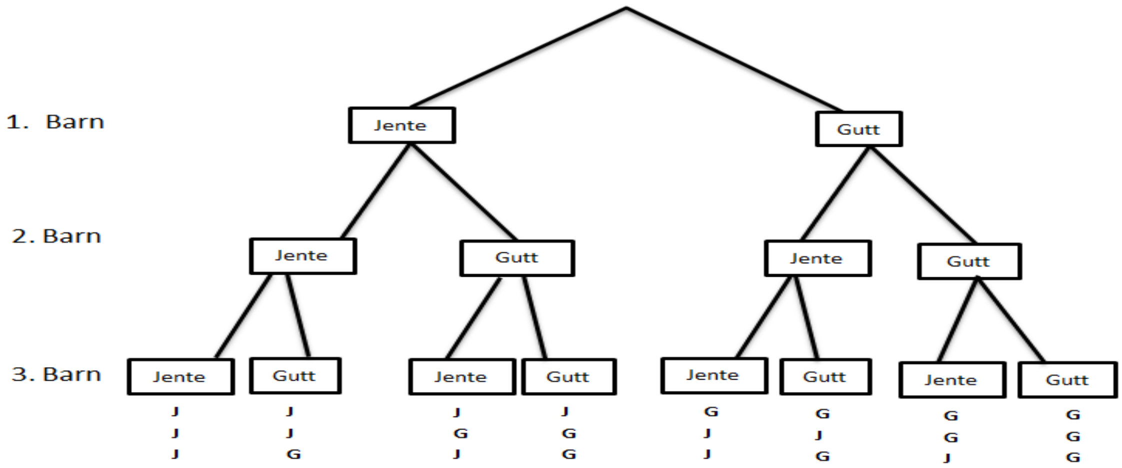
Antall mulige utfall av trekningen er $7 \cdot 4 = 28$.
Hvis hun trekker lodd, kan vi anta at alle de 28 utfallene er like sannsynlige. Derfor er

P(firkløver og pære) = $\frac{1}{28}$.

Eksempel 2
Hva er sannsynligheten for at det første barnet er en gutt, og de to neste er jenter, i en trebarnsfamilie? Anta at alle utfall er like sannsynlige.

Antall mulige utfall er her $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Derfor er P(GJJ) = $\frac{1}{8}$.

De mulige utfallene i eksempel 2 kan framstilles i et *valgtre*:



Her kan vi se at GJJ er en av åtte muligheter totalt. Slik kunne vi brukt valgtreet og funnet at $P(GJJ) = \frac{1}{8}$, akkurat som vi fant i eksempelet over.

Oppgave 5

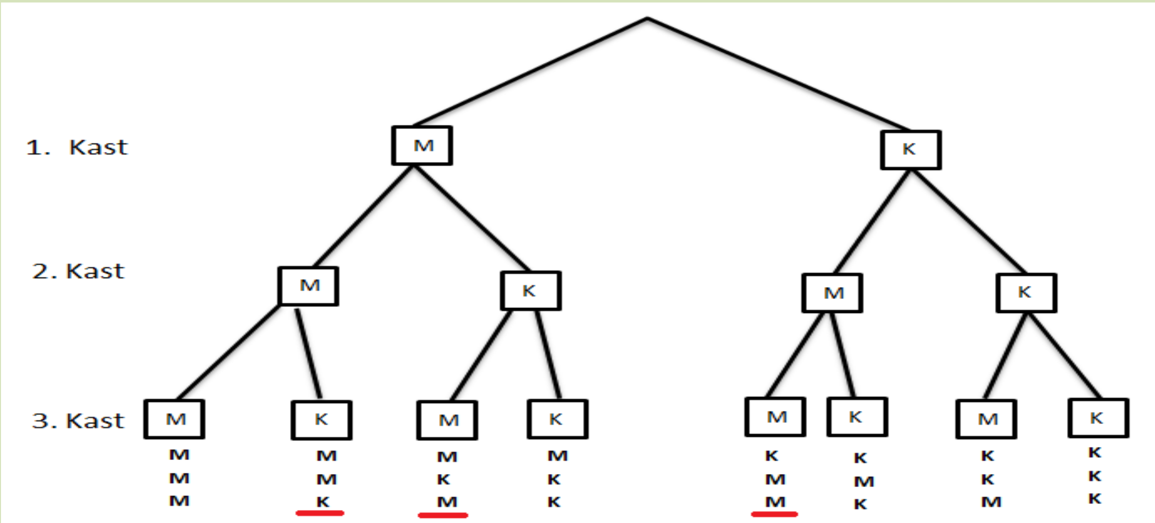
a) Hvor mange mulige utfall er det hvis vi kaster tre pengestykker?
b) Hva er sannsynligheten for at vi skal få MMK? (mynt på første pengestykke, mynt på andre og kron på tredje)?
c) Tegn et valgtre som ligner på valgtreet ovenfor, og som viser de ulike utfallene i dette forsøket.

Oppgave 6

Vi skal tippe utfallet av to fotballkamper. Hver kamp kan gi hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).
a) Hvor mange mulige utfall er det i denne tippekonkurransen?
b) Lag et valgtre som viser de mulige utfallene.
c) Hvor mange mulige utfall er det hvis man tipper resultatet av 12 kamper?

Eksempel 3
Vi kaster tre pengestykker etter hverandre.
a) Finn sannsynligheten for 2 mynt og en kron.
b) Finn sannsynligheten for 1 mynt og to kron

Tegner et valgtre som gir oss oversikt over de forskjellige utfallene.



a) Vi ser at vi har 8 forskjellige utfall. Av disse gir tre forskjellige to mynt og 1 kron. Detter er MMK, MKM og KMM som er markert i rødt. Sannsynligheter for to mynt og en kron er dermed $\frac{3}{8}$.

b) Av valgtreet ser vi at det er tre muligheter for å få 1 mynt og to kron. MKK, KMK og KKM.
Sannsynligheter for 1 mynt og to kron er dermed $\frac{3}{8}$.

Oppgave 7
Vi kaster to pengestykker etter hverandre.
a) Tegn et valgtre som viser de mulige utfallene vi kan få.
b) Finn sannsynligheten for 2 kron.
c) Finn sannsynligheten for 2 mynt.
d) Finn sannsynligheten for 1 mynt og 1 kron.

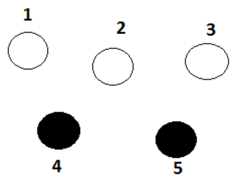
Oppgave 8
CMT er en arvelig nervesykdom. I gjennomsnitt vil halvparten av barna hvor en av foreldrene har CMT, arve sykdommen.
I en familie har mor CMT. Familien har tre barn.
a) Finn sannsynligheten for at alle tre barna har CMT.
b) Finn sannsynligheten for at to av barna har CMT.

c) Finn sannsynligheten for at ett av barna har CMT.
d) Finn sannsynligheten for at ingen av barna har CMT.

Oppgave 9
a) Finn sannsynligheten for at det er tre gutter og ei jente i en firebarnsfamilie. Vi regner alle de mulige utfallene som like sannsynlige (ikke helt riktig).
b) Vi undersøker 1000 firebarnsfamilier. I omtrent hvor mange av disse vil vi finne tre gutter?

3.4. Sammensatte forsøk. Produktsetningen.

Vi har fem nummererte kuler, tre hvite og to svarte. Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at både den første og den andre er hvite *når vi legger den første tilbake før vi trekker den andre*?



I følge multiplikasjonsprinsippet har vi $5 \cdot 5 = 25$ mulige utfall. 9 av disse, nemlig (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) gir oss hendelsen "første er hvit og andre er hvit". Da får vi :

$$P(\text{første er hvit og andre er hvit}) = \frac{9}{25}.$$

Trekningen av de to kulene er et eksempel på et *sammensatt forsøk*. Forsøket består av to *delforsøk*.

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen A i første delforsøk og hendelsen B i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for B påvirkes av at A har skjedd.

I trekningsforsøket vårt er hendelsen A "første er hvit" og hendelsen B er "andre er hvit". Det er for begge hendelsene 3 gunstige utfall av 5 mulige. Derfor har vi:

$$P(\text{første hvit og andre hvit}) = P(\text{første hvit}) \cdot P(\text{andre hvit}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

som er samme svar som vi fant på en annen måte ovenfor.

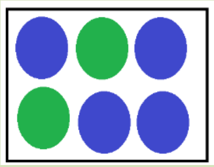
Oppgave 10
Finn sannsynligheten for å trekke to *svarte* kuler i eksemplet ovenfor (hvor vi legger den første kula tilbake før vi trekker den andre). Løs oppgaven både ved å se på antall gunstige og mulige utfall i det sammensatte forsøket, og ved å bruke produktsetningen.

Oppgave 11

Finn sannsynligheten for å trekke to svarte kuler i eksemplet ovenfor når vi *ikke* legger den første kulen tilbake før vi trekker den andre.

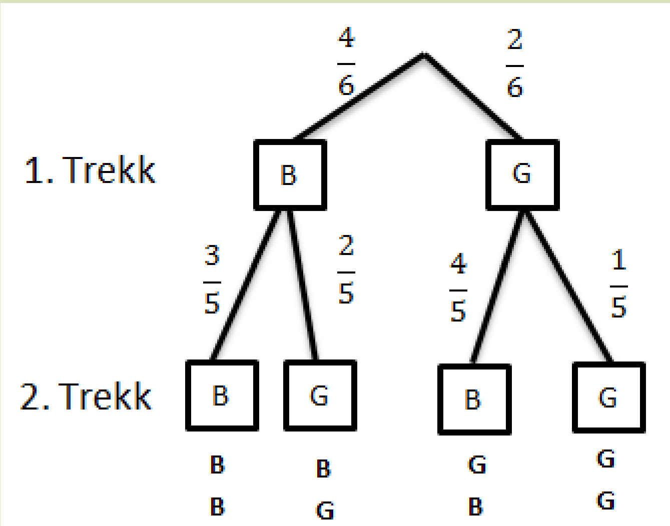
Eksempel 4

I en eske er det fire blå og to grønne kuler. Kenneth trekker tilfeldig to av kulene.



a) Bestem sannsynligheten for at han trekker to blå kuler.
b) Bestem sannsynligheten for at han trekker to grønne kuler.

Velger å tegne et valgtre først. Brøken angir sannsynligheten for hver mulighet. F.eks er det $\frac{4}{6}$ sjanse for å få blå på det første trekket. Hvis vi fikk blå på det første trekket er det kun 3 blå kuler igjen. Sannsynligheten blir da $\frac{3}{5}$ for å få blå på det andre trekket.



a) Vi bruker produksetningen:

$$P(første\ blå\ og\ andre\ blå) = P(første\ blå) * P(andre\ blå) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

Sannsynligheten for to blå er $\frac{6}{15}$

b) $(begge\ grønn) = P(første\ grønn) * P(andre\ grønn) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

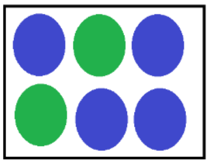
Sannsynligheten for to grønn er $\frac{1}{15}$

Oppgave 12

I en klasse arrangeres et lotteri med 40 lodd. Hver elev skal trekke to lodd, og det er gevinst på tre av de 40 loddene. Ida er den første til å trekke og hun tar to lodd.
Hva er sannsynligheten for at hun har vunnet på begge loddene?

3.5. Addisjonssetningen: En annen måte å beregne sannsynlighet for hendelser

Vi ser tilbake på eksempel 4 med kuletrekning.
Hva er sannsynligheten for å trekke én blå og grønn kule?



Produktsetningen alene kan bare gi oss sannsynlighetene for at den første er blå og den andre grønn, eller omvendt. Slik:

$$P(BG) = P(første\ blå\ og\ andre\ grønn) = P(første\ blå) \cdot P(andre\ grønn) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(GB) = P(første\ grønn\ og\ andre\ blå) = P(første\ grønn) \cdot P(andre\ blå) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for en blå og en grønn kule ved å *addere* (legge sammen) disse to sannsynlighetene:

$$P(en\ grønn\ og\ en\ blå) = P(BG) + P(GB) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Dette er et eksempel på bruk av *addisjonssetningen* for sannsynligheter.

Addisjonssetningen. Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A eller* hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

$P(A$ eller $B) = P(A) + P(B)$.

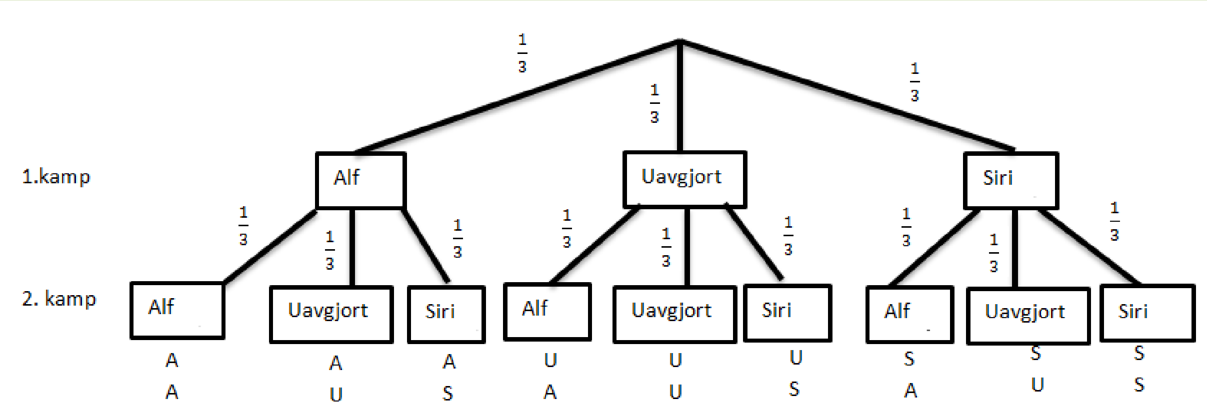
Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig.

Eksempel 5

Alf og Siri spiller "stein –papir –saks" to ganger på rad.

a) Hva er sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre?
b) Hva er sannsynligheten for at minst en av kampene blir uavgjort

Velger å tegne et valgtre først. Alf betyr at Alf vinner, Siri betyr at Siri vinner.



a) At Siri vinner første, og får uavgjort på andre tilsvarer utfallet SU, i valgtreet.

$$P(SU) = P(Siri\ vinner\ første) * P(Uavgjort\ på\ andre) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre er $\frac{1}{9}$.

b) Her kan vi bruke addisjonssetningen. Vi ser at minst en av kampene blir uavgjort betyr at vi kan få: AU, UA, UU, US eller SU. Alle disse resultatene er like sannsynlig.

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = P(AU) + P(UA) + P(UU) + P(US) + P(SU)$$

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

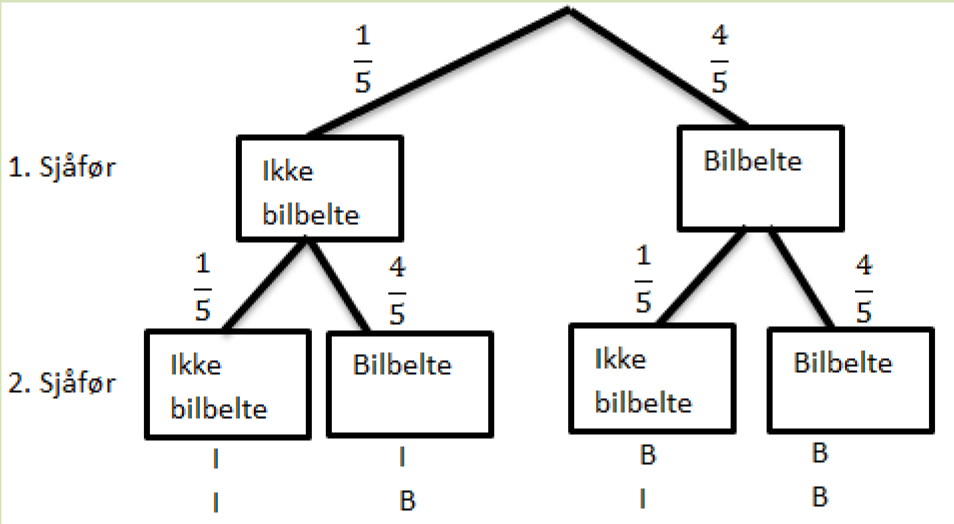
Sannsynligheten for at minst en kamp blir uavgjort er $\frac{5}{9}$.

Eksempel 6

Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere.

a) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte?
b) Hva er sannsynligheten for at *en* bruker bilbelte?

Sannsynligheten for at han ikke bruker bilbelte må være 20 %.
$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ og $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Lager et valgtre for å få oversikt.



a) At begge bruker bilbelte tilsvarer alternativet merket BB. $P(BB) =$
$P(første\ bruker\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ bilbelte) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$

Sannsynligheten for at begge bruker bilbelte er 64 %.

b) At kun *en* bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.

$$P(IB) = P(første\ bruker\ ikke\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ bilbelte) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(BI) = P(første\ bruker\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ ikke\ bilbelte) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(en\ bruker\ bilbelte) = P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 32\%$$

Sannsynligheten for at kun en bruker bilbelte er 32%.

Oppgave 13

Vi går tilbake til oppgave 12. Hva er sannsynligheten for at Ida vinner på det ene loddet, men ikke på det andre?

Oppgave 14

I en klasse er det 18 jenter og 12 gutter. Læreren trekker tilfeldig to elever til framføring.
a) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to jenter?
b) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to gutter?
c) Hva er sannsynligheten for at det trekkes ei jente og en gutt?

Eksempel 7

Vi trekker to kort fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Hva er sannsynligheten for å trekke to ess?

Det er 4 ess i stokken. Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{første er ess og andre er ess}) = P(\text{første er ess}) \cdot P(\text{andre er ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

Hva er sannsynligheten for å trekke to kort med samme verdi? Det vil si to ess, ..., to seksere, ..., to konger (13 ulike verdier).

Fordi det er fire kort av hver verdi, må sannsynlighetene for å trekke to toere, to treere osv. alle være lik 1/221. Addisjonssetningen sier at vi må legge sammen 13 sannsynligheter, hver med verdi 1/221. Vi får da

$$P(\text{to like}) = 13 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{13}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

Oppgave 15

Vi trekker tre kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at vi trekker tre spar?

De fire fargene i kortstokken er spar (♠), hjerter (♥), ruter (♦) og kløver (♣).

b) Hva er sannsynligheten for at alle tre kortene har samme farge?

3.6. Krysstabeller

Mange eksamensoppgaver handler om en gruppe mennesker som er delt i fire undergrupper. Ofte skal du finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person tilhører en eller flere av disse gruppene.

Eksempel 8
I en klasse er det 30 elever som har valgt fag for neste år.

- 9 av elevene har valgt engelsk
- 14 av elevene har valgt matematikk
- 10 elever har ikke valgt noen av disse to fagene

For å få god oversikt over disse tallene, kan vi legge dem inn i en *krysstabell* med fire rader og fire kolonner:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk			**14**
Ikke matematikk		**10**	
Sum	**9**		**30**

Legg nøye merke til hvor tallene er plassert.
Det spiller ingen rolle om du tar engelsk i 1. kolonne istedenfor i 1. rad.

Nå er det lett å fylle ut de tomme rutene:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk	3	11	**14**
Ikke matematikk	6	**10**	16
Sum	**9**	21	**30**

Kontroller at alle de seks summene stemmer.

Vi trekker en tilfeldig elev fra klassen. Da kan vi bruke tabellen til å finne noen sannsynligheter:

Sannsynligheten for at eleven har valgt både matematikk og engelsk: $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

Sannsynligheten for at eleven har engelsk, men ikke matematikk: $P = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

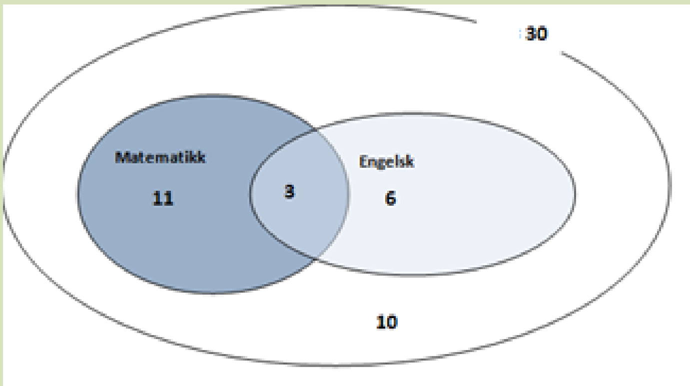
Sannsynligheten for at en elev som har valgt matematikk også har valgt engelsk: $P = \frac{3}{14}$.

Sannsynligheten for at en elev har valgt matematikk eller engelsk:

$$P = \frac{6 + 11 + 3}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Vi legger altså sammen de som bare har engelsk, de som bare har matematikk og de som har begge deler. "**Matematikk eller engelsk**" **betyr enten matematikk eller engelsk *eller begge deler!***

Eksempel 9
Opplysningene i forrige eksempel kan også framstilles i et *Venn-diagram*:



Et Venndiagram er kanskje vanskeligere å lage enn en krysstabell, men kan være lettere å forstå. Her ser vi for eksempel tydelig at det er 11+3+6 = 20 elever som har valgt matematikk eller engelsk.

Oppgave 16

En klasse har 28 elever. Av dem har 12 elever biologi og 8 har kjemi. 4 elever har både biologi og kjemi.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.
b) Systematiser opplysningene ovenfor i et Venn-diagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra denne klassen.

c) Finn sannsynligheten for at denne eleven har biologi.
d) Finn sannsynligheten for at eleven har biologi eller kjemi. (Se siste linje i eksempel 4.)
e) Det viser seg at den valgte eleven har biologi. Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har kjemi?

Eksempel 10

Klasserommet til 1STB skal males, og rommet skal få nye gardiner. Elevene blir enige om at rommet skal males hvitt eller lysegult, mens gardinene skal være grå eller røde. De skriver valgene sine på to lapper og putter lappene i to krukker. Tabellene viser ønskene til de 30 elevene i klassen:

Rommet	
Hvitt	18
Lysegult	12

Gardinene	
Grå	16
Røde	14

For å bestemme fargen på malingen og gardinene, trekkes det en lapp fra hver krukke. Sannsynligheten for at det blir hvit maling blir da $P(\text{hvit maling}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Vi bruker produktsetningen for å finne sannsynligheten for at det blir hvit maling og røde gardiner: $P(\text{hvit maling og røde gardiner}) = \frac{18}{30} \cdot \frac{14}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15} = \frac{21}{75} = 0,28$.

Det viser seg at 5 elever ønsker lysegul maling og røde gardiner.

Vi vil ved hjelp av denne opplysningen finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ønsker hvit maling og grå gardiner. Da lager vi først en krysstabell:

	Hvit maling	Lysegul maling	Sum
Grå gardiner	9	7	**16**
Røde gardiner	9	**5**	**14**
Sum	**18**	**12**	**30**

Nå er det lett å se at $P(\text{hvit maling og grå gardiner}) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$.

4. Sannsynlighetsregning når utfallene ikke er like sannsynlige

4.1. Innledning

Svært ofte i praktisk sannsynlighetsregning er alle utfallene ikke like sannsynlige. I noen tilfelle må vi da selv finne sannsynligheter for utfall ved å regne ut relative frekvenser. I andre tilfelle får vi *oppgitt* slike sannsynligheter som er funnet ved forsøk. Disse sannsynlighetene skal så gjerne brukes til å regne ut sannsynligheter for ulike hendelser.

4.2. Bruk av produktsetningen og addisjonssetningen

Eksempel 11

Hvis mor og far begge har brune øyne, er sannsynligheten for at et barn har brune øyne lik 0,75. Sannsynligheten for at øynene er blå, er 0,25. Paret får fire barn.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fire barna får brune øyne?

Ifølge produktsetningen har vi:

$P(\text{alle fire har brune øyne}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}75^4 = 0{,}316$.

Dette betyr at hvis vi undersøker mange firebarnsfamilier med brunøyde foreldre, vil alle fire barna ha brune øyne i omtrent 31,6 % av familiene.

b) Hva er sannsynligheten for at de to første er brunøyde og de to siste er blåøyde?

Sannsynligheten for at de to første barna er brunøyde og de to siste er blåøyde, er

$$P(\text{brun, brun, blå, blå}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}035$$

De to utfallene (brun, brun, brun, brun) og (brun, brun, blå, blå) av det sammensatte forsøket er altså ikke like sannsynlige.

Oppgave 17

Det har vist seg at sannsynligheten for at et nyfødt barn er en gutt ikke er helt den samme som sannsynligheten for at det er ei jente. Sannsynlighetene er $P(\text{gutt})=0{,}514$ og $P(\text{jente}) = 0{,}486$.
a) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er gutter.
b) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er jenter.

Oppgave 18

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,8. Vi sår fem frø.
a) Hva er sannsynligheten for at alle fem frøene spirer?
b) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem spirer?

Eksempel 12
Jonas sykler til skolen. På veien passerer han to lyskryss. Etter mange passeringer har han funnet ut at sannsynligheten for at han får grønt lys i første krysset er 0,6, og sannsynligheten for at han får grønt lys i andre krysset er 0,3.
a) Hva er sannsynligheten for at han får *rødt* lys i første krysset?

Fordi det bare er to mulige utfall må vi ha at P(grønt) + P(rødt) = 1.
Da er P(rødt) = 1 – P(grønt) = 1 – 0,6 = 0,4.

b) Hva er sannsynligheten for å få rødt i begge kryssene?

Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{rødt i første og rødt i andre}) = P(\text{rødt i første}) \cdot P(\text{rødt i andre}) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$$

c) Hva er sannsynligheten for å få grønt i begge kryssene?

$$P(\text{grønt i første og grønt i andre}) = P(\text{grønt i første}) \cdot P(\text{grønt i andre}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$$

d) Hva er sannsynligheten for å få rødt i nøyaktig ett av kryssene?

Her må vi bruke både addisjonssetningen og produktsetningen.

P(ett grønt og ett rødt) = P(rødt i første og grønt i andre *eller* grønt i første og rødt i andre) =
P(rødt i første og grønt i andre) + P(grønt i første og rødt i andre) =
$0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$.

Legg merke til at summen av sannsynlighetene i b, c og d er lik 1. Hvorfor må det være slik?

Oppgave 19

Per og Kari kommer ofte for sent til første time. Etter at det har gått noen måneder av skoleåret, har klassens ekspert i sannsynlighetsregning funnet ut at sannsynligheten for at Per kommer for sent er 0,23, og sannsynligheten for at Kari kommer for sent er 0,18. Per og Kari kjenner ikke hverandre, og kommer ikke med samme buss, slik at det at Per kommer for sent ikke påvirker sannsynligheten for at Kari kommer for sent.
a) Hva er sannsynligheten for at Per kommer *tidsnok* en bestemt dag?
b) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en bestemt dag?
c) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem kommer tidsnok en bestemt dag?
d) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en hel skoleuke (fem dager)?

4.3. Oppgaver med sannsynlighet for “minst én“

Eksempel 13
Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,7. Vi sår fem frø.
a) Hva er sannsynligheten for at ingen av frøene spirer?

Sannsynligheten for at et bestemt frø ikke skal spire blir 1 – 0,7 = 0,3.
Produktsetningen gir da

P(ingen spirer) = $0,3^5 = 0,002$.

b) Hva er sannsynligheten for at minst ett av frøene spirer?

At “minst ett“ spirer betyr at ett eller flere frø spirer. Denne sannsynligheten kan vi regne ut ved å legge sammen de fem sannsynlighetene for at 1, 2, 3, 4 og 5 spirer, men dette er mye arbeid og vanskelig. Det er mye lettere hvis vi deler alle mulige utfall i *to* hendelser istedenfor i seks, nemlig “ingen frø spirer“ og “minst ett frø spirer“. Fordi disse to hendelsene dekker alle muligheter, må vi ha

P(ingen frø spirer) + P(minst ett frø spirer) = 1

Derfor har vi

P(minst ett frø spirer) = 1 – P(ingen frø spirer) = 1 – 0,002 = 0,998 = 99,8 %.

Oppgave 20

Sannsynligheten for at Per kommer for sent til skolen en tilfeldig dag er 0,23.
a) Hva er sannsynligheten for at han kommer for sent både onsdag, torsdag og fredag?
b) Hva er sannsynligheten for at han kommer *tidsnok* minst én av disse tre dagene?

Oppgave 21

I en kommune stemte 48 % på et av de “rødgrønne“ partiene. Vi velger tilfeldig ut fem av de som stemte. Hva er sannsynligheten for at minst én av disse velgerne stemte “rødgrønt“?

Eksamensoppgaver

E1
(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

I en twistpose er det 30 twistbiter. Per liker 18 av disse. Vi trekker tilfeldig én twistbit fra posen.

1) Finn sannsynligheten for at Per liker denne twistbiten.

Sannsynligheten for at Ola liker en tilfeldig valgt twistbit fra posen, er 0,4.

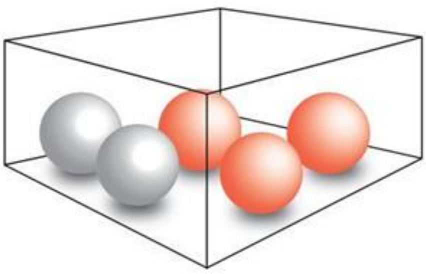
2) Hvor mange av twistbitene i posen liker Ola?

E2
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

Hva er mest sannsynlig å få?

- en sekser når du kaster én terning
- to like når du kaster to terninger

E3
(Eksamen 1P vår 2013, Del 1)



I en eske er det tre røde og to blå kuler. Sondre trekker tilfeldig to av kulene.

a) Bestem sannsynligheten for at han trekker to røde kuler.

b) Bestem sannsynligheten for at de to kulene han trekker, har samme farge.

E4
(Eksamen 1P høst 2011, Del 1)

Eva har én pakke blåbærgelé, to pakker kiwigelé, to pakker sitrongelé og tre pakker bringebærgelé.

Hun tar tilfeldig to pakker gelé.

1) Hva er sannsynligheten for at den første pakken hun tar, er kiwigelé?

2) Hva er sannsynligheten for at hun tar to pakker kiwigelé?

3) Hva er sannsynligheten for at hun tar én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé?

E5
(Eksamen 1P vår 2012, Del 2)

Karen har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker i en skuff. En dag tar hun tilfeldig to sokker fra skuffen.

a) Bestem sannsynligheten for at hun tar to rosa sokker.

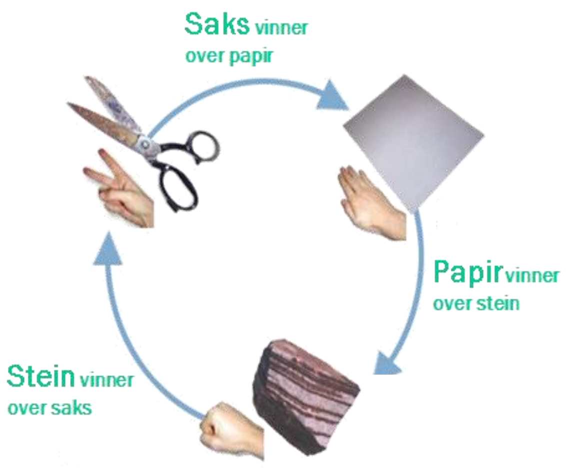
b) Bestem sannsynligheten for at hun tar én rosa sokk og én sokk i en annen farge.

c) Bestem sannsynligheten for at hun tar to sokker med samme farge.

E6

(Eksamen 1P vår 2011, Del 2)

"Stein – saks- papir" er en konkurranse mellom to personer. Hver person bestemmer seg for enten stein, saks eller papir, og begge viser så samtidig, ved å bruke den ene hånden, hva de har valgt. Se figuren nedenfor.



Reglene er slik:

- Saks vinner over papir.
- Papir vinner over stein.
- Stein vinner over saks.

Dersom begge velger det samme (for eksempel stein), blir det uavgjort.

Bård og Lars skal spille "Stein- saks- papir". Ett mulig utfall kan da for eksempel bli at Bård velger Stein og Lars velger papir.

a) Lag en oversikt som viser alle de ni mulige utfallene når Bård og Lars spiller "Stein- saks- papir" en gang.

La B betyr seier til Bård, U avgjort og L seier til Lars.

b) Forklar at sannsynligheten for at Bård vinner, $P(B)$, er 1/3.

Bård og Lars skal spille "Stein- saks- papir" tre ganger. Et mulig resultat er da BUL, som betyr at Lars vinner første gang, at det blir uavgjort andre gang, og at Lars vinner tredje gang.

c) Hvor mange ulike resultater kan vi få når Bård og Lars spiller tre ganger?

d) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner minst to av de tre gangene?

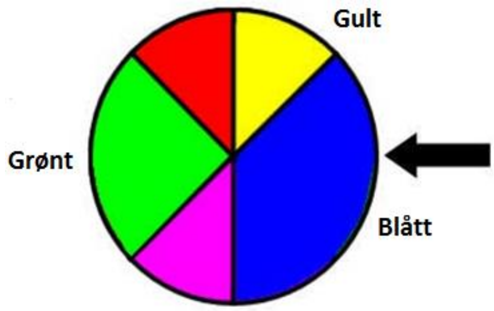
Når to personer spiller "Stein- saks- papir", er vinneren den som vinner flest av tre ganger. Dersom begge vinner like mange ganger, blir det uavgjort.

e) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner?

E7
(Eksamen vår 2010, Del 1)

Figuren til høyre viser et lykkehjul.

1) Lise snurrer hjulet én gang. Hva er sannsynligheten for at pilen peker på enten blått eller grønt felt når hjulet stopper?



2) Lotte snurrer hjulet to ganger. Hva er sannsynligheten for at pilen peker én gang på gult felt og én gang på grønt felt?

E8
(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

En undersøkelse har vist at 20 % av alle syklister i en by sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig to syklister fra denne byen.

a) Bestem sannsynligheten for at begge sykler uten lys i mørket.

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig én av dem sykler uten lys i mørket.

E9
(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 2)

I en klasse er det 22 elever. 12 av elevene har førerkort. 14 av elevene har bil. 4 elever har bil, men ikke førerkort.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har førerkort og bil.

Vi velger tilfeldig en elev som har førerkort.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har bil.

E10
(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. Én av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tall i de hvite rutene.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum			

Siv tar tilfeldig én bukse fra skapet.

b) Bestem sannsynligheten for at buksen passer.

Siv har tatt en bukse som passer.

c) Bestem sannsynligheten for at denne buksen er blå.

E11
(Eksamen 2P-Y høsten 2013, Del 2)

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tallene i de hvite rutene.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven drikker kaffe.

En elev fra klassen drikker kaffe.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven er ei jente.

E12
(Eksamen 2P-Y vår 2013)

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller i Spania.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et Venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har vært både i USA og Spania.

Vi velger tilfeldig en elev som ikke har vært i USA.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven har vært i Spania.

E13
(Eksamen 1P høst 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 25 elever. 12 av elevene har valgt internasjonal engelsk neste skoleår.

14 av elevene har valgt sosialkunnskap. 4 elever har verken valgt internasjonal engelsk eller sosialkunnskap.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har valgt både internasjonal engelsk og sosialkunnskap.

Vi velger tilfeldig en elev som har valgt sosialkunnskap.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har valgt internasjonal engelsk.

E14
(Eksamen 1P vår 2011, Del 1)

De 20 elevene i klasse 1A planlegger sommerferien.

- 16 elever har fått sommerjobb.
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

1) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

2) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klasse 1A skal på ferie.

E15
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 20 elever. 15 av elevene spiller fotball, og 10 spiller håndball. Én elev spiller verken fotball eller håndball.

1) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Fra klassen velger vi tilfeldig én av elevene som spiller fotball.

2) Bestem sannsynligheten for at denne eleven i tillegg spiller håndball.

E16
(Eksamen 1P vår 2010, Del 2)

En kommune har kartlagt utdanningsnivået blant innbyggerne i aldersgruppen 30–39 år. Tabellen viser høyeste fullførte utdanning for disse innbyggerne.

	Kvinner	Menn	Totalt
Grunnskole	166	253	419
Videregående skole	385	654	1039
Universitet eller høyskole	517	493	1010
Totalt	1068	1400	2468

a) Hvor mange personer i aldersgruppen 30–39 år bor det i kommunen?

b) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person i gruppen bare har fullført grunnskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

c) Hvor stor er sannsynligheten for at han ikke har fullført universitets- eller høyskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt kvinne og en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

d) Hva er sannsynligheten for at begge to bare har fullført grunnskoleutdanning?

E17
(Eksamen 1P høst 2010, Del 2)

Fotballgruppa i et idrettslag ønsker seg en ny ballbinge. De gjennomfører en spørreundersøkelse for å finne ut hva medlemmene i idrettslaget mener om dette.

- Alle de 240 medlemmene i idrettslaget blir spurt.
- 45 % av medlemmene er kvinner.
- 63 av mennene ønsker ballbinge.
- Til sammen 110 av medlemmene ønsker ikke ballbinge.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk opplysningene ovenfor og fyll inn tallene som skal stå i de hvite feltene.

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge			
Ønsker ikke ballbinge			
Totalt			

b) Finn sannsynligheten for at et tilfeldig valgt medlem i idrettslaget ønsker ballbinge.

Et medlem blir valgt tilfeldig. Det viser seg at dette medlemmet ønsker ballbinge.

c) Finn sannsynligheten for at dette medlemmet er en mann.

E18
(Eksamen 1P høst 2011, Del 2)

I klasse 1B er det 12 jenter og 15 gutter. 8 av jentene og 9 av guttene kjører moped til skolen.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi trekker tilfeldig en elev fra klassen.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke kjører moped?

Vi trekker tilfeldig en av elevene fra klassen som kjører moped.

c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en gutt?

Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer for sent til første time, er 10 %.
Sannsynligheten for at en elev som ikke kjører moped kommer for sent til første time, er 5 %.
Vi antar at elevene kommer for sent uavhengig av hverandre.

d) Forklar at sannsynligheten for at alle jentene i klassen kommer presis til første time, er $0{,}9^8 \cdot 0{,}95^4$.

e) Hva er sannsynligheten for at minst én elev i klassen kommer for sent til første time?

E19

(Eksamen vår 2013, Del 2)

I en klasse er det 30 elever. Klassen skal arrangere fest. Elevene må bestemme seg for om de vil ha taco eller pizza til middag, og om de vil ha sjokoladekake eller marsipankake til dessert.

Hver elev legger en lapp med hvilken middag de ønsker, i én krukke og en lapp med hvilken kake de ønsker, i en annen krukke.

Nedenfor ser du hvordan ønskene fordeler seg.

Taco	18
Pizza	12

Sjokoladekake	6
Marsipankake	24

For å avgjøre hva menyen skal være, trekker læreren tilfeldig en lapp fra hver krukke.

a) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag.

b) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag og marsipankake til dessert.

4 elever vil ha pizza og sjokoladekake.

Vi trekker tilfeldig ut en elev.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven vil ha taco og marsipankake.

E20

(Eksamen 1P høst 2012, Del 2)

En dag fikk elevene ved en skole servert lunsj. De fikk velge mellom pizza og pølser.

3/4 av elevene valgte pizza. Resten valgte pølser.

I tillegg fikk alle tilbud om salat. Halvparten av elevene som valgte pizza, ønsket også salat, mens bare 1/5 av elevene som valgte pølser, ønsket salat.

Vi velger tilfeldig en elev ved skolen.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven valgte pølser, men ikke ønsket salat.

Anta at det er 200 elever ved skolen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket salat?

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen ønsket salat?

E21

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 1)

En kveld gikk alle elevene i klasse 3A ut for å spise på restaurant. 2/5 av elevene bestilte pasta. Resten bestilte pizza. Halvparten av elevene som bestilte pasta, ønsket også dessert, mens bare 1/3 av elevene som bestilte pizza, ønsket dessert.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven bestilte pizza, men ikke ønsket dessert.

Anta at det er 30 elever i klassen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket dessert?
Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klassen ønsket dessert?

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a)

UTFALL	ANTALL	ANTALL I %
Jente	300	46 %
Gutt	350	54 %
SUM	650	100%

b) 0,46
c) 0,54

Oppgave 2 a)

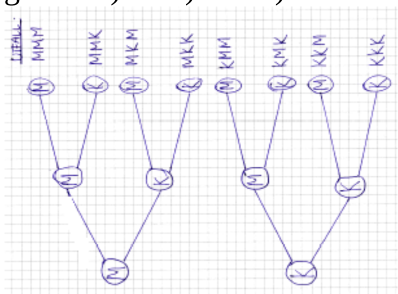
UTFALL	ANTALL	ANTALL I %
Fargeblind	437	%
Normal	5423	9 %
SUM	5460	100%

b) 0,08
c) 0,92

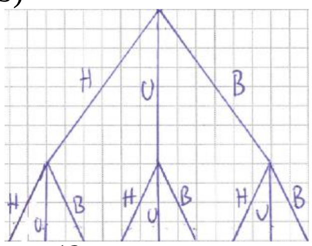
Oppgave 3a) 1/6 b) 1/2 c) 1/52 d) 1/4 e) 1/2
f) Undersøke hvor mange som er født på de ulike datoene over lengre tid, f.eks. ti år. 1/365

Oppgave 4 a) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ b) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{36}$

Oppgave 5 a) 8 b) 1/8 c)

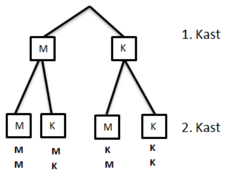


Oppgave 6 a) 9
b)



c) $3^{12} = 531441$

Oppgave 7a)



b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Oppgave 8 a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{8}$

Oppgave 9 a) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ b) 250

Oppgave 10. $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

Oppgave 11. $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Oppgave 12. $\frac{6}{1560} = \frac{1}{260} \approx 0{,}004$

Oppgave 13. $2 \cdot \frac{37}{520} = \frac{37}{260} \approx 0{,}142$

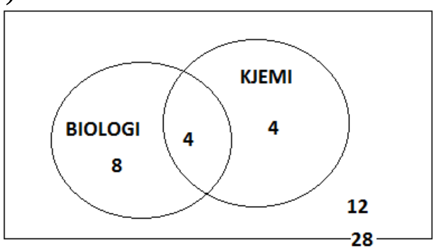
Oppgave 14. a) $\frac{51}{145} \approx 0{,}352$ b) $\frac{22}{145} \approx 0{,}152$ c) $\frac{72}{145} \approx 0{,}497$

Oppgave 15. a) $\frac{11}{850} \approx 0{,}013$ b) $\frac{44}{850} = \frac{22}{425} \approx 0{,}052$

Oppgave 16a)

	Bi logi	Ikke bio ogi	SUM
Kj mi	4	4	8
Ikke kjemi	8	12	20
SUM	12	1	28

b)



c) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ d) $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ e) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Oppgave 17. a) 0,0698 b) 0,0558

Oppgave 18. a) 0,328 b) 0,00032

Oppgave 19. a) $1 - 0{,}23 = 0{,}77$ b) 0,63 c) 0,33 d) 0,10

Oppgave 20 a) 0,012 b) 0,988

Oppgave 21. 0,96

Fasit eksamensoppgaver:

E1. 1)P (Per liker twistbiten) = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 2) 12

E2. P(sekser)=$\frac{1}{6}$,P(to like)=6 · $\frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Sannsynligheten er altså lik.

E3. a) P(to rød) = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ b) P(to rød eller to blå) = $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

E4. 1) P(kiwigele) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 2) P(to kiwigele) = $\frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

3) P(én kiwigele og én blåbæregele) = $\frac{4}{56} = \frac{1}{14}$

E5. a) P(to rosa) = $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$ b) P(en rosa og en annen) = $\frac{32}{90} = \frac{8}{45}$

c) P(to like) = 5 · $\frac{1}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

E6. a)

UTFAll nr	Bård	Lars
1	Stein	Stein
2	Stein	Saks
3	Stein	Papir
4	Saks	Stein
5	Saks	Saks
6	Saks	Papir
7	Papir	Stein
8	Papir	Saks
9	Papir	Papir

b) Av tabellen i a) ser vi at utfallene 2, 6 og 7 gir seier til Bård. Dvs P (B) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

c) $3^3 = 27$ d) 7/27 e) 10/27

E7. 1) P(blått eller grønt) = $\frac{5}{8}$ 2) P(gult og grønt) = $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

E8. a) P(begge uten lys) = $0{,}2^2 = 0{,}04$ b) P(en uten lys) = 0,32

E9. a)

	Førerkort	Ikke førerkort	SUM
Bil	10	4	14
Ikke bil	2	6	8
SUM	12	10	22

b) P(førerkort og bil) = $\frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

c) P(bil, hvis førerkort) = $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

E10. a)

	Blå bukser	Svarte bukser	SUM
Bukser som passer	3	3	6
Busker som ikke passer	1	3	4
SUM	4	6	10

b) P(buksen passer) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) P(blå, hvis buksen passer) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

E11. a)

	Jenter	Gutter	SUM
Drikker kaffe	5	5	10
Drikker ikke kaffe	10	5	15
SUM	15	10	25

b) P (eleven drikker kaffe) = $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

c) P (jente, hvis eleven drikker kaffe) = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

E12. a)

	Spania	Ikke Spania	SUM
USA	4	4	8
Ikke USA	7	5	12
SUM	11	9	20

b) P (USA og Spania) = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) P (Spania, hvis ikke USA) = $\frac{7}{12}$

E13. a)

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	SUM
Internasjonal engelsk	5	7	12
Ikke internasjonal engelsk	9	4	13
SUM	14	11	25

b) P (Int. engelsk og sos.kunnskap) = $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

c) P (Int. engelsk, hvis sos.kunnskap) = $\frac{5}{14}$

E14.1)

	Jobb	Ikke jobb	SUM
Ferie	10	2	12
Ikke ferie	6	2	8
SUM	16	4	20

2) P (ferie) = $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

E15. 1)

	Fotball	Ikke fotball	SUM
Håndball	6	4	10
Ikke håndball	9	1	10
SUM	15	5	20

2) P (håndball, hvis fotball) = $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

E16a) 2468

b) P (grunnskole) = $\frac{419}{2468} \approx 0{,}17$

c) P (ikke universitet/høyskole) = $\frac{907}{1400} = 0{,}65$

d) P (begge grunnskole) = $\frac{166}{1068} \cdot \frac{253}{1400} \approx 0{,}026$

E17. a)

	Mann	Kvinne	SUM
Ønsker ballbinge	63	67	130
Ønsker ikke ballbinge	69	41	110
SUM	132	108	240

b) P (medlemmet ønsker ballbinge) = $\frac{130}{240} = 0{,}54$

c) P (mann, hvis medlemmet ønsker ballbinge) = $\frac{63}{130} = 0{,}49$

E18. a)

	Jenter	Gutter	SUM
Kjører moped	8	9	17
Kjører ikke moped	4	6	10
SUM	12	15	27

b) P (kjører ikke moped) = $\frac{10}{27} \approx 0{,}37$

c) P (gutt, hvis eleven kjører moped) = $\frac{9}{17} \approx 0{,}53$

d) Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer presis til første time er $1 - 0{,}10 = 0{,}90$. 8 jenter kjører moped, samlet er sannsynligheten for at disse kommer presis $0{,}90^8$. Tilsvarende tankegang for jentene som ikke kjører moped gir sannsynligheten $0{,}95^4$. Totalt gir dette $0{,}90^8 \cdot 0{,}95^4$

e) P (minst en elev kommer for sent) = 1 – P (alle kommer tidsnok) = $1 - (0{,}90^{17} \cdot 0{,}95^{10}) = 0{,}90$

E19a) P (taco) = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

b) P (taco og marsipankake) = $\frac{18}{30} \cdot \frac{24}{30}$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$

c) Lager en krysstabell til hjelp:

	Taco	Pizza	SUM
Sjokoladekake	2	4	6
Marsipankake	16	8	24
SUM	18	12	30

P (taco og marsipankake) = $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

E20. a) P (pølser, ikke salat) = $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

b) $200 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = 85$

c) P (salat) = $\frac{85}{200} = 0{,}485$

E21. a) P (pizza, ikke dessert) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $30 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{60}{5} = 12$

P (dessert) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Stikkordregister