

# Matematikk 2P



*Hellerud videregående  
skole*

## Noen formler det er lurt å kunne...


Rektangel	$A = g \cdot h$	
Trekant	$A = \frac{g \cdot h}{2}$	
Parallelogram	$A = g \cdot h$	
Trapes	$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$	
Sirkel	$A = \pi \cdot r^2$	
Prisme	$V = G \cdot h$	
Sylinder	$V = \pi r^2 h$	
Pytagoras setning	$c^2 = b^2 + a^2$ , der $c$ er hypotenusen, $a$ og $b$ er katetene i en rettvinklet trekant	
Proporsjonalitet	Proporsjonale størrelser: $y = ax$	
	Omvendt proporsjonale størrelser: $y = \frac{k}{x}$	
Lineære funksjoner	$y = ax + b$	
Eksponentielle funksjoner	$y = a \cdot b^x$	
Polynom funksjoner	$y = ax^2 + bx + c$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
Potensfunksjoner	$y = a \cdot b^x$	
Vekstfaktor	$1 + \frac{p}{100}$	
	$1 - \frac{p}{100}$	
Potenser	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$a^0 = 1$
	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	

# Forord

Denne boka dekker læreplanen i Matematikk 2P. Stoffet og oppgavene er valgt ut med tanke på den type oppgaver som har vist seg å være ganske vanlige til eksamen i 2P.

Teorien er ganske kortfattet og er avbrutt av mange eksempler. Disse bør du studere nøye. Like etter et eksempel kommer som regel en eller flere øvingsoppgaver hvor du trenger den teorien som er brukt i dette eksemplet.

Til slutt i de fleste kapitlene er det eksamensoppgaver som kan løses hvis du behersker stoffet i dette og tidligere kapitler. Det er fasit på oppgavene helt til slutt i kapitlet.

Noe av teoristoffet og noen av oppgavene er merket med en “tenke-smiley”:  .

Dette stoffet vil kanskje mange synes er spesielt vanskelig. Hvis du vil ha karakter 3 eller bedre, må du også kunne løse en del oppgaver av en slik vanskegrad.

## Forord til 3. utgave:

I tillegg til normalt vedlikehold (oppdatering av teori og oppgaver) har vi satt inn et stikkordregister for de vanligste matematiske begrepene.

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole  
Juni 2016

## Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?

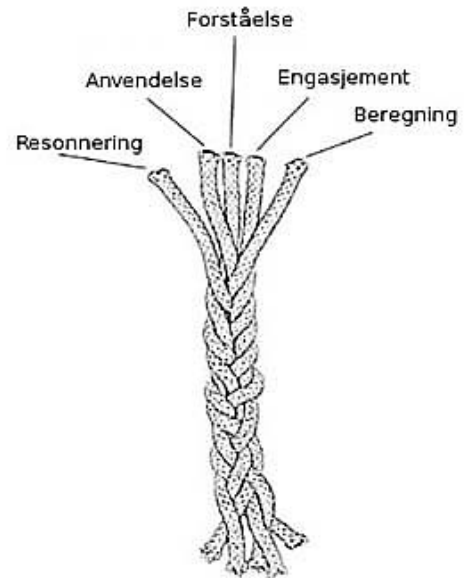
1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner

2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk



**Figur 1:** Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

(Kilde: <http://www.matematikkenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk>)

## Jo Boaler's 7 bud

### **1. Alle kan lære matematikk på høyeste nivå.**

- Det er ikke sann at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

### **2. Å gjøre feil er verdifullt**

- Feil gjør at hjernen din vokser.  
Det er bra å streve og gjøre feil

### **3. Å stille spørsmål er viktig**

- Spør om det du lurer på, og svar på andre sine spørsmål.  
Spør deg selv: Hvorfor er dette riktig?

### **4. Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**

- Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre

### **5. Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**

- I matematikk kan det samme sies på ulike måter, f.eks. ord, bilde, graf, funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

### **6. Matematikktimene handler om å lære, ikke prestere**

- Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats

### **7. Det er viktigere å tenke grundig enn fort.**

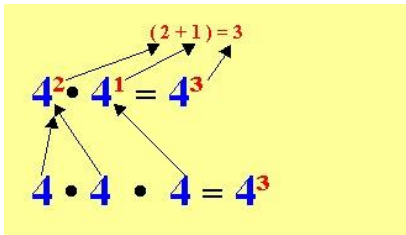
- Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

## Innhold

Forord .....	2
Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk? .....	3
Jo Boaler's 7 bud .....	4
Innhold .....	5
Kapittel 1. Potensregning .....	6
Blandede oppgaver .....	16
Fasit .....	19
Kapittel 2. Tall på standardform .....	20
Blandede oppgaver .....	26
Fasit .....	28
Kapittel 3. Prosentregning .....	29
Blandede oppgaver .....	45
Fasit .....	50
Kapittel 4. Statistikk .....	51
Eksamensoppgaver .....	67
Fasit .....	82
Kapittel 5. Funksjoner .....	83
Eksamensoppgaver .....	108
Fasit øvingsoppgaver .....	112
Fasit eksamensoppgaver .....	113
Kapittel 6. Matematiske modeller .....	114
Eksamensoppgaver .....	133
Fasit .....	144
Stikkordregister .....	145

# Kapittel 1. Potensregning



I potensregning skriver vi tall som potenser og forenkler uttrykk som inneholder potenser.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Betydningen av potenser som har negativ eksponent eller eksponent lik null.
- Hvordan vi raskt kan multiplisere og dividere potenser med samme grunntall.
- Hvordan vi beregner en potens med en annen potens som grunntall.

$2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$	$2^4 \cdot 2^{-3} = 2^1$	$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^0$
$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$	$16 \cdot \frac{1}{8} = 2$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
$2^{-2} \cdot 2^5 = 2^3$	$2^0 \cdot 2^3 = 2^3$	$2^5 \cdot 2^0 = 2^5$
$\frac{1}{4} \cdot 32 = 8$	$1 \cdot 8 = 8$	$32 \cdot 1 = 32$

## 1. Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

### Eksempel 1

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

$$x \cdot x = x^2$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*.

I potensen  $3^2$  kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.

Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på  $3^2$  og 32!

**Advarsel:** Du må ikke blande sammen  $3^2$ , som betyr  $3 \cdot 3$  og er lik 9, med  $3 \cdot 2$ , som er lik 6!

### Oppgave 1

Regn ut potensene uten kalkulator:

$$4^2, 2^3, 5^2, (-3)^2, 5^1$$

### Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$$2,5^2, 12^3$$

## 2. Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks.  $3^2 \cdot 3^4$ ?

Det er ikke meningen at du skal regne ut hvilket tall dette blir, men skrive svaret som en ny potens.

Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli  $2 + 4 = 6$  tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.



### Eksempel 2

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$

$$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$$

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

### **Oppgave 3**

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.

a)  $6^2 \cdot 6^3$    b)  $2^6 \cdot 2^4$    c)  $10 \cdot 10^3$    d)  $a^4 \cdot a^2$

### **3. Dividere potenser med samme grunntall**

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

### Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen  $5 - 2 = 3$  firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

#### Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

#### **Oppgave 4**

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a)  $\frac{8^5}{8^3}$    b)  $\frac{6^5}{6}$    c)  $\frac{5^4}{5^3}$    d)  $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

#### Eksempel 5

$$\frac{4^2 \cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

#### **Oppgave 5**

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a)  $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^4}$    b)  $\frac{3^6}{3^4 \cdot 3}$    c)  $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^2}$

#### 4. Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$(10^2)^3$  er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva  $(10^2)^3$  egentlig betyr, ser vi at

$$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen  $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$  og  $(10^2)^3 = 10^6$ !

#### Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a)  $(6^3)^4$    b)  $(8^5)^2$    c)  $(x^3)^2$    d)  $(a^2)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

#### Eksempel 6

$$(3^4)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{(2^3)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

#### Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a)  $(4^2)^3 \cdot 4$    b)  $\frac{(5^2)^3}{5^2}$    c)  $\frac{(a^2)^3 \cdot a^2}{a^5}$

## 5. Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken  $\frac{5^4}{5^4}$  er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar  $5^0$  bety 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

$$a^0 = 1 \text{ for alle tall } a.$$

**Advarsel:** Du må heretter aldri tro at  $2^0$  er lik 0!!  $2^0 = 1!$  Derimot er  $2 \cdot 0$  lik 0.

### Oppgave 8

Hvor mye er a)  $10^0$  b)  $6^0$  c)  $(-1)^0$  ?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken  $\frac{5^4}{5^6}$ ? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} \quad (\text{du er vel klar over at } 4 - 6 = -2 \text{ og ikke } 2?)$$

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken  $\frac{5^4}{5^6}$  kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at  $5^{-2}$  skal bety  $\frac{1}{5^2}$ . På samme måte har vi også:

### Eksempel 7

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a^{-n}$  betyr  $\frac{1}{a^n}$  for alle verdier av  $a$  (unntatt 0) og  $n$ .

**Advarsel:** Du må heretter aldri tro at  $10^{-2} = -20$  eller at  $2^{-3} = -6$  eller  $-8!!$

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.



### Eksempel 8

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$$

$$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$$

$$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = (2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

### Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.



a)  $\frac{1}{10^{-2}}$    b)  $\frac{2^6}{5^{-3}}$    c)  $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$    d)  $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

### Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$

$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$

$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{-2 \cdot 3} = 10^{-6}$$

$$(x^3)^{-4} = x^{3 \cdot (-4)} = x^{-12}$$

### **Oppgave 10**

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a)  $\frac{3^6}{3^0}$    b)  $5^{-1} \cdot 5^4$    c)  $\frac{10^{-4}}{10^3}$    d)  $\frac{10^4}{10^{-3}}$    e)  $(2^{-4})^3$



## 6. Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

### 1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

#### Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$

$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

### Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a)  $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$     b)  $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

### 2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

#### Eksempel 11

Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket  $4 \cdot 2^3$  kan skrives som én potens.

Men fordi  $4 = 2^2$  går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at  $4 = 2^2$ ,  $8 = 2^3$ ,  $16 = 2^4$ ,  $9 = 3^2$  og  $27 = 3^3$ .

### Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.

a)  $2^4 \cdot 4$     b)  $8 \cdot 2^{-2}$     c)  $\frac{4}{2^{-3}}$     d)  $9 \cdot 3^2$     e)  $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivninger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

## 7. Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

### Eksempel 12

I potensen  $(2x)^3$  er grunntallet et produkt av faktorene 2 og  $x$ . Dette kan vi skrive uten parenteser slik:


$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3 x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

### Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a)  $(3a)^4$    b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$    c)  $(a^2b^{-1})^3$    d)   $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$



## Blandede oppgaver

### B1

(Eksamen 2P høst 2008, Del 1)

Skriv uttrykkene så enkelt som mulig:

a)  $3 \cdot (31 - 29)^2 - (5 - 3^2)$

b)  $(2^3)^3 \cdot (2^{-1})^3$

### B2

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig:  $\frac{2^8 \cdot 2^{-4}}{2^5}$ .

### B3

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut  $5 - 2^4 \cdot (4 - 3)^3 \cdot 2^{-3}$

### B4

(Eksamen 2P vår 2011, Del 1)

Regn ut

a)  $a^4 \cdot (a^2)^{-3} \cdot a^0$

b) 🤔  $\frac{2^{-3} \cdot 4^3}{8^2}$

### B5

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Regn ut

a)  $8 \cdot 2^{-2}$

b)  $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

### B6

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{(a^3)^{-2} \cdot a^5}{a^{-3} \cdot a^0}$$

**B7**

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret som et helt tall

a)  $(2^3)^2 \cdot 2^0$

b) 🤔  $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^2$

**B8**

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Hvilken av de to brøkene A og B nedenfor har størst verdi?

A:  $\frac{15 \cdot 5^{-1}}{2^2}$

B:  $\frac{1}{6^{-2} \cdot 3 \cdot 15}$

**B9**

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 3}{2 \cdot 3^{-1}}$

b)  $a^3 + \frac{a^2 \cdot a^{-1}}{a^{-2}}$

**B10**

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Ordne disse brøkene i stigende rekkefølge (slik at den minste står først osv.).

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2, \frac{3^2}{2}, \frac{2}{3^{-2}}, \frac{2}{\sqrt{25}}$$

## B11

(Eksamen 2P vår 2013, Del 2)



Petter vil sende en epost med en matematikkoppgave til to personer 1. januar. Anta at hver av personene sender e-posten videre til to nye personer dagen etter, at hver av de fire som da får den, også sender den videre til to nye personer dagen etter at de mottok den, og at eposten fortsetter å spres på samme måte i dagene framover.

- a) Hvor mange personer vil motta e-posten 6. januar?
- b) På hvilken dato vil antall mottatte eposter på én dag for første gang bli større enn en milliard?

## Fasit

### Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1

16, 8, 25, 9, 5

Oppgave 2

6,25 1728

Oppgave 3

a)  $6^5$  b)  $2^{10}$  c)  $10^4$  d)  $a^6$

Oppgave 4

a)  $8^2$  b)  $6^4$  c) 5 d)  $z^3$

Oppgave 5

a)  $2^7$  b) 3 c)  $a^5$

Oppgave 6

a)  $6^{12}$  b)  $8^{10}$  c)  $x^6$  d)  $a^8$

Oppgave 7

a)  $4^7$  b)  $5^4$  c)  $a^3$

Oppgave 8

a) 1 b) 1 c) 1

Oppgave 9

a)  $10^2$  b)  $2^6 \cdot 5^3$  c)  $\frac{5 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{6}$  d)  $4^{15}$

Oppgave 10

a)  $3^6$  b)  $5^3$  c)  $10^{-7}$  d)  $10^7$  e)  $2^{-12}$

Oppgave 11

a)  $4 \cdot 5^{-2}$  b)  $6^4 \cdot 10^{-5}$

Oppgave 12

a)  $2^6$  b) 2 c)  $2^5$  d)  $3^4$  e)  $2^7$

Oppgave 13

a)  $3^4 a^4$  b)  $\frac{3^2}{2^2}$  c)  $a^6 b^{-3}$  d) 16

### Fasit blandede oppgaver

B1

a) 16 b)  $2^6 = 64$

B2

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

B3

3

B4

a)  $a^{-2}$  b)  $2^{-3} = \frac{1}{8}$

B5

a) 2 b) 18

B6

$a^2$

B7

a) 64 b) 81

B8

B (  $A = \frac{3}{4}$   $B = \frac{4}{5}$  )

B9

a) 1 b)  $2a^3$

B10

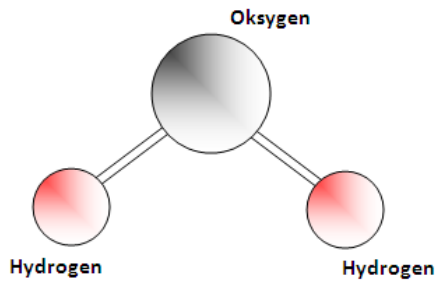
$$\frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} \quad \frac{2}{3^{-2}} = 18$$

B11

a) 64 b) 30. januar

## Kapittel 2. Tall på standardform

Vannmolekyl  $H_2O$



Massen til et vannmolekyl:

0,000 000 000 000 000 000 000 03 kg

Standardform er en metode som er nyttig for raskt å kunne skrive tall som er mye større enn 1 eller mye mindre enn 1. Du må kunne potensregning for å forstå regning med standardform.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hva er standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra vanlig form til standardform.
- Hvordan vi skriver om tall fra standardform til vanlig form.
- Eksempler på praktisk regning med tall på standardform.

Tre plasser

$$0,0064 = 6,4 \cdot 0,001 =$$

$$\frac{6,4}{10^3} = 6,4 \cdot 10^{-3} \quad \leftarrow \text{Tre plasser } 10 \text{ i - tredje potens}$$



### Eksempel 2

$$6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 1000 = 6000$$

$$6,7 \cdot 10^3 = 6,7 \cdot 1000 = 6700$$

$$8,01 \cdot 10^5 = 8,01 \cdot 100000 = 801000$$

### **Oppgave 3**

Skriv disse tallene på vanlig form.

a)  $2 \cdot 10^4$  b)  $2,5 \cdot 10^4$  c)  $6,8 \cdot 10^6$

### **1.2 Tall som er mindre enn 1**

Du husker vel fra potensregningen at  $10^{-2}$  betyr  $\frac{1}{10^2}$ ?

Men  $\frac{1}{10^2}$  kan vi også skrive som desimaltall:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

På samme måte har vi

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ (en null i desimaltallet)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \text{ (tre nuller i desimaltallet)}$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001 \text{ (seks nuller i desimaltallet)}$$

Derfor kan vi også skrive tall som er *mindre* enn 1 på standardform ved å bruke tierpotenser med *negativ* eksponent:

### Eksempel 3

$$0,004 = 4 \cdot 10^{-3}$$

$$0,0046 = 4,6 \cdot 10^{-3}$$

$$0,00000582 = 5,82 \cdot 10^{-6}$$

$$0,5 = 5 \cdot 10^{-1}$$

Hvis du teller nullene i massen til vannmolekylet i starten av kapittelet vil du finne 1 null foran komma og 25 bak. Da kan vi skrive dette *veldig* lite tallet mye mer oversiktlig:

$$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 03 = 3 \cdot 10^{-26}$$

#### Oppgave 4

Skriv disse tallene på standardform.

- a) 0,06   b) 0,067   c) 0,00005   d) 0,0000563   e) 0,25

Tallet  $35 \cdot 10^{-4}$  er ikke skrevet på standardform fordi 35 er større enn 10. Skal det være på standardform, må det stå 3,5 foran tierpotensen. Vi kan skrive om tallet slik at det blir på standardform:

$$35 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 3,5 \cdot 10^{1+(-4)} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

Her er et annet eksempel:

$$0,4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-1+(-5)} = 4 \cdot 10^{-6}$$

#### Oppgave 5

Skriv disse tallene på standardform.

- a)  $64 \cdot 10^{-3}$    b)  $250 \cdot 10^{-8}$    c)  $0,6 \cdot 10^{-4}$    d)  $0,07 \cdot 10^{-10}$

## 2. Multiplikasjon og divisjon av tall på standardform

### 2.1 Multiplikasjon

#### Eksempel 4

Hvis vi skal regne ut  $4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7}$  kan vi multiplisere 4 med 3 og  $10^4$  med  $10^{-7}$ , slik:

$$4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} = 12 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

Legg merke til at vi til slutt skrev svaret på standardform.

#### Oppgave 6

Regn ut og skriv svaret på standardform.

- a)  $2,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$    b)  $2,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$    c)  $2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4}$    d)  $0,00008 \cdot 5000000$

### 2.2 Divisjon

#### Eksempel 5

Hvis vi skal regne ut  $\frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}}$  må vi dividere 8 med 2 og  $10^4$  med  $10^{-3}$ , slik:



$$\frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{4-(-3)} = 4 \cdot 10^{4+3} = 4 \cdot 10^7$$

To eksempler til:

$$\frac{2,4 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^6} = 0,8 \cdot 10^{8-6} = 0,8 \cdot 10^8 = 800$$

(2,4 : 3,0 er 0,8 fordi 24 : 3 = 8.)

$$\frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{2,0 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \cdot 10^{-3-(-4)} = 0,9 \cdot 10^{-3+4} = 0,9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = 0,9 \cdot 10^{-1+1} = 0,9 \cdot 10^0 = 0,9$$

### 3. Praktisk regning med tall på standardform

Her er noen eksempler på praktisk regning hvor det er lurt å regne med tallene på standardform.

#### Eksempel 6

Det årlige forbruket av vann på jorda er ca.  $4,2 \cdot 10^{15}$  liter. Det er ca.  $7 \cdot 10^9$  mennesker på jorda. Hvor mange liter vann blir dette per menneske? Skriv svaret på standardform.

$$\frac{4,2 \cdot 10^{15} \text{ L}}{7 \cdot 10^9 \text{ mennesker}} = 0,6 \cdot 10^{15-9} \text{ L/menneske} = 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 \text{ L/menneske} = 6 \cdot 10^5 \text{ L/menneske}$$

#### Eksempel 7

Et atom har en diameter på ca.  $10^{-7}$  mm. Hvor mange atomer kan ligge etter hverandre på 1 mm?

$$\text{Svar: } \frac{1 \text{ mm}}{10^{-7} \text{ mm}} = 10^7 \text{ (ti millioner)}$$

#### Eksempel 8

Massen til et vannmolekyl er ca.  $3 \cdot 10^{-26}$  kg. 1 liter vann har en masse på omtrent 1 kg. Hvor mange vannmolekyler er det i 1 liter vann?

$$\frac{1 \text{ kg}}{3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \approx 0,3 \cdot 10^{26} = 3 \cdot 10^{25}$$

### Oppgave 7

De største harddiskene til en vanlig PC var i 2014 på 4 TB. 1TB = 1 Terabyte =  $10^{12}$  byte. En lang bok uten bilder krever ca. 2 MB når den lagres som tekst. 1MB = 1 Megabyte =  $10^6$  byte. Hvor mange bøker er det plass til på den store harddisken?

### Oppgave 8

- a) DNA-molekylene i en menneskecelle har en samlet lengde på ca. 0,05 m hvis de tenkes strukket helt ut. I et menneske er det ca. 10 000 milliarder celler. Hva blir den samlede lengden av alle DNA-molekylene i et menneske?
- b) Sammenlign svaret med avstanden fra jorda til sola, som er 150 millioner km.

## Blandede oppgaver

### B1

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1)

Skriv disse tallene på standardform: 1) 27 000 000 2) 0,000290

### B2

(Eksamen 2P vår 2008, Del 1)

Skriv tallet  $2,46 \cdot 10^{-4}$  som desimaltall.

### B3

(Eksamen 2P vår 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig:  $2,0 \cdot 10^6 \cdot 8,4 \cdot 10^4$

### B4

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv tallene 32 000 000 og 0,000 678 på standardform.

### B5

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{2,7 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^4}$$

### B6

(Eksamen 2P høst 2010, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform:  $6,0 \cdot 10^7 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}$

### B7

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Skriv på standardform

1) 533 milliarder

2) 0,000 533

### B8

(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{5,0 \cdot 10^5 \cdot 6,0 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^{-4}}$$

### B9

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform:  $0,0003 \cdot 0,00000015$

**B10**

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1)

Regn ut og skriv svaret på standardform:  $0,075 \cdot 2000000$

**B11**

Regn ut  $(4 \cdot 10^{-3})^2$  og skriv svaret på standardform.

**B12**

(Eksamen 2P vår 2012, Del 1)

I Norge er det ca 5 millioner innbyggere. Det norske oljefondet er på ca 3000 milliarder kroner.

Tenk deg at oljefondet blir delt likt mellom innbyggerne i Norge.

Omtrent hvor mye ville hver innbygger fått?

Skriv svaret på standardform.

**B13**

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1) 🤔



En fotball har en diameter på ca. 20 cm. Omkretsen til jorda ved ekvator er ca. 40 000 km.

Vi tenker oss at vi legger fotballer langs ekvator rundt hele jorda.

Omtrent hvor mange fotballer er det plass til?

Skriv svaret på standardform.

**B14**

(Eksamen 2P vår 2016, del 1)

Det er ca. 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 liter drikkevann hver dag.

Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret i standardform.

## Fasit

### Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1

- a)  $1 \cdot 10^2$     b)  $1 \cdot 10^4$     c)  $2 \cdot 10^4$     d)  $2,1 \cdot 10^4$     e)  $2,164 \cdot 10^4$     f)  $8,2 \cdot 10^8$   
g)  $4 \cdot 10^6$     h)  $7,5 \cdot 10^{10}$     i)  $1,2 \cdot 10^1$     j)  $1 \cdot 10^0$     k)  $6,4 \cdot 10^0$

Oppgave 2

- a)  $6 \cdot 10^6$     b)  $4,6 \cdot 10^4$     c)  $4,5 \cdot 10^8$     d)  $6 \cdot 10^4$     e)  $5,5 \cdot 10^5$

Oppgave 3

- a) 20 000                      b) 25 000    c) 6 800 000

Oppgave 4

- a)  $6 \cdot 10^{-2}$     b)  $6,7 \cdot 10^{-2}$     c)  $5 \cdot 10^{-5}$     d)  $5,63 \cdot 10^{-5}$     e)  $2,5 \cdot 10^{-1}$

Oppgave 5

- a)  $6,4 \cdot 10^{-2}$     b)  $2,5 \cdot 10^{-6}$     c)  $6 \cdot 10^{-5}$     d)  $7 \cdot 10^{-12}$

Oppgave 6

- a)  $5 \cdot 10^3$     b)  $1 \cdot 10^4$     c)  $1,5 \cdot 10^{-6}$     d)  $4 \cdot 10^2$

Oppgave 7

$2 \cdot 10^6$  bøker

Oppgave 8

- a)  $5 \cdot 10^{11}$  m    b) 3,3 ganger avstanden til sola!

### Fasit Blandede oppgaver

B1    1)  $2,7 \cdot 10^7$     2)  $2,90 \cdot 10^{-4}$

B2    0,000246

B3     $1,68 \cdot 10^{11}$  = 168 milliarder = 168 000 000 000

B4    1)  $3,2 \cdot 10^7$     2)  $6,78 \cdot 10^{-4}$

B5     $9 \cdot 10^3$

B6     $1,5 \cdot 10^5$

B7    1)  $5,33 \cdot 10^{11}$     2)  $5,33 \cdot 10^{-4}$

B8     $1,2 \cdot 10^{16}$

B9     $4,5 \cdot 10^{-11}$

B10     $1,5 \cdot 10^5$

B11     $1,6 \cdot 10^{-5}$

B12     $6 \cdot 10^5$

B13     $2 \cdot 10^8$

B14     $4,5 \cdot 10^{11}$

## Kapittel 3. Prosentregning



I dette kapitlet skal vi repetere og utvide prosentregningen fra grunnskolen.

Hovedemnene er:

- Forstå hva prosent er.
- Regne ut hvor mange prosent noe er av noe annet (finne prosenttallet).
- Regne ut hvor mye en bestemt prosent av noe er (prosenttallet er oppgitt).
- Regne ut hvilket tall en startet med hvis prosenttallet og prosenten er oppgitt.
- Bruke vekstfaktor for å finne ny verdi hvis noe øker eller minker med et bestemt prosenttall.
- Prosentpoeng.

Du får også bruk for prosentregning i de fleste av de andre kapitlene i boka.



## 1. Å regne ut en prosent

Alle har hørt om prosent, men ikke alle har forstått hva det egentlig er.

Her er et eksempel hvor det er naturlig å bruke prosentregning. Figuren under skal forestille en liten klasse på 10 elever. 4 av disse elevene fikk karakteren 5 i matematikk.

5	5	5	5						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Dette er en annen klasse på 30 elever. Her fikk 6 elever karakteren 5.

5	5	5	5	5	5				

Den største klassen har flest femmere, men alle vil vel likevel si at den minste klassen har best resultater i toppen fordi den største klassen har 3 ganger så mange elever, men bare 1,5 ganger så mange femmer-elever ( $6 : 4 = 1,5$ ).

I slike situasjoner er det naturlig å regne ut *brøkdelen* av femmer-elever i hver klasse og sammenligne størrelsen av brøkene .

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen:  $\frac{4}{10}$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen:  $\frac{6}{30}$

Det er vanlig å gjøre om brøkene til *hundredeler* for å sammenligne dem. Dette gjør vi lettest ved å dividere teller med nevner i hodet eller på kalkulator. Så kan vi skrive svaret som desimaltall, hundredeler eller *prosenttall*:

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen:  $\frac{4}{10} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\%$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen:  $\frac{6}{30} = 0,2 = \frac{20}{100} = 20\%$

Vi sier at 40 % av elevene i den minste klassen fikk 5, og 20 % av elevene i den største klassen fikk 5.

Prosent er bare en kortere måte å skrive *hundredeler* på.

25 % betyr  $\frac{25}{100}$ , som er lik 0,25 med desimaltall. 0,25 kaller vi *prosentfaktor*, og 25 kaller vi *prosenttallet*.

### Eksempel 1

En sofa koster 6000 kr. Selgeren gir 600 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt gir han?

Vi finner ut hvor stor del 600 er av 6000 ved å regne ut brøken  $\frac{600}{6000}$

$$\frac{600}{6000} = 0,1 = 10 \%$$

Han gir 10 % rabatt.

### **Oppgave 1**

Jonas skal kjøpe en bukse til 500 kroner. Han oppdager en liten flekk på buksen og blir derfor tilbudt 100 kr i avslag. Hvor mange prosent avslag blir han tilbudt? **Uten kalkulator!**

### **Oppgave 2**

Aisha hadde en timelønn på 150 kr. Hun fikk en lønnsøkning på 30 kr timen. Hvor mange prosent utgjorde dette? **Uten kalkulator!**

### Eksempel 2

I en klasse på 25 elever kom 8 elever for sent til 1. time.

- Hvor mange prosent kom for sent?
- Hvor mange prosent kom tidsnok?

Vi regner ut forholdet  $\frac{8}{25}$ . Disse tallene kan vi regne uten kalkulator:

$$\frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32 \%$$

- 32 % kom for sent.
- Resten kom tidsnok:  $100 \% - 32 \% = 68 \%$

### **Oppgave 3**

I en klasse på 20 elever var det 14 jenter. Hvor mange prosent av elevene var jenter? Hvor mange var gutter? **Uten kalkulator**

### Eksempel 3

2817 av 11 200 velgere stemte på AP i et kommunevalg. Hvor mange prosent stemte AP?

Vi gjør om til desimaltall:  $\frac{2817}{11200} = 0,252 = 25,2 \%$

25,2 % av velgerne stemte AP.



#### Oppgave 4

I 2010 var det ca. 4 860 000 innbyggere i Norge. Av disse var 637 356 mellom 10 og 19 år. Hvor stor prosent av befolkningen var mellom 10 og 19 år?

Ofte skal vi finne hvor mange prosent noe *forandrer* seg. Det gir samme type regning som i eksemplene ovenfor

##### Eksempel 4

Ei bukse kostet 600 kr og ble satt ned 200 kr. Hvor mange prosent ble buksa satt ned?

Her skal vi finne ut hvor mye 200 kr er av 600 kr.

Vi gjør om til desimaltall: Prosentforandring =  $\frac{200}{600} = \frac{1}{3} = 0,333$

Buksa ble satt ned med 33,3 %.

Fordi  $\frac{200}{600} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  vil også mange si at den ble satt ned med 1/3 av opprinnelig pris.

#### Oppgave 5

Ei skjorte koster 300 kr. Tre skjorter koster da egentlig 900 kr, men du betaler bare for to, og får derfor 300 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du kjøper tre skjorter?

**Uten kalkulator!**

##### Eksempel 5

Jonas veide 80 kg. Etter en periode med mye usunn mat hadde vekten økt til 88 kg. Hvor mange prosent hadde vekten økt?

Vi finner først økningen i kg. Den er 88 kg – 80 kg = 8 kg. Førverdien var 80 kg.

Vi regner ut:  $\frac{8}{80} = 0,1 = 10 \%$

Vekten har økt 10 %. Denne utregningen gjør vi uten kalkulator!

#### Oppgave 6

Timelønnen til Tahir økte fra 160 kr til 176 kr. Hvor mange prosent økte lønnen?

**Uten kalkulator!**

### Eksempel 6

Etter en mageinfeksjon sank vekten til Emma fra 64 kg til 60 kg. Hvor mange prosent minket vekten hennes?

Hun mistet  $64 \text{ kg} - 60 \text{ kg} = 4 \text{ kg}$

Vi finner forandringen i prosent ved å gjøre om til desimaltall

$$\frac{4}{64} = 0,0625 = 6,25 \%$$

Vekten minket 6,25 %.

### **Oppgave 7**

I 1960 var verdensrekorden på 500 m skøyter for menn 40,20 s. I 2013 var den 34,03 s. Hvor mange prosent sank rekorden fra 1960 til 2013? **Bruk kalkulator**

## 2. Prosentregning når prosenttallet er oppgitt

I oppgavene over har vi brukt desimaltall i utregningen. Det kan vi fortsatt gjøre når prosenttallet er oppgitt.

En annen metode som kanskje er lettere å forstå, er først å finne ut hvor mye 1 % tilsvarer.

Deretter kan vi finne ut hvor mye prosenttallet som er oppgitt tilsvarer.

Denne metoden kalles ofte "Veien om 1" og kan også brukes til å løse andre problemer som omhandler forhold mellom to tall.

I eksemplene under viser vi begge metodene. Du velger selv hvilken du vil bruke.

### Eksempel 7

På en skole er det 600 elever. 20 % av elevene går på yrkesfag. Hvor mange elever går på yrkesfag?

#### Metode 1:

Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{600}{100} = 6 \text{ elever}$$

$$20 \% : 20 \cdot 6 = 120$$

120 elever går på yrkesfag.

#### Metode 2:

Vi gjør om til desimaltall:

$$20 \% = \frac{20}{100} = 0,20$$

$$600 \cdot 0,20 = 120$$

### Oppgave 8

I en klasse på 30 elever hadde 60 % valgt 1P. Hvor mange elever hadde valgt 1P? Ikke bruk kalkulator!

### Eksempel 8

I en klasse på 25 elever kom 32 % av elevene for sent. Hvor mange elever kom for sent?

#### Metode 1:

Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{25}{100} = 0,25 \text{ elever}$$

$$32 \% : 32 \cdot 0,25 = 8$$

#### Metode 2:

Vi gjør om til desimaltall:

$$32 \% = \frac{32}{100} = 0,32$$

$$0,32 \cdot 25 = 8$$

8 elever kom for sent. Sammenlign med eksempel 2.

### Oppgave 9

På en skole med 548 elever gikk 31 % av elevene på Vg1. Hvor mange elever gikk på Vg1? Fordi prosenttallet ikke er helt nøyaktig, vil svaret ikke bli et helt tall. Da må du her runde det av til nærmeste heltall!

#### Eksempel 9

Under et salg er det 40 % rabatt på en bluse. Vanlig pris er 400 kr. Hvor mange kroner blir det gitt i rabatt?

#### **Metode 1:**

Vi finner ut hvor mange kroner 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{400}{100} = 4 \text{ kr}$$

$$40 \% : 40 \cdot 4 \text{ kr} = 160 \text{ kr}$$

Rabatten er 160 kr.

#### **Metode 2:**

Vi gjør om til desimaltall:

$$40 \% = \frac{40}{100} = 0,40$$

$$0,40 \cdot 400 \text{ kr} = 160 \text{ kr}$$

### Oppgave 10

I en klasse på 30 elever sluttet 13,3 % i løpet av skoleåret. Hvor mange av elevene i klassen sluttet?

### Oppgave 11

I en bestemt type kunstgjødsel er det 17 % nitrogen, 13 % kalium og 5 % fosfor. Hvor mange kilogram nitrogen, kalium og fosfor er det i en sekk med 40 kg gjødsel?

### Oppgave 12

På de fleste matvarer unntatt mat betales en merverdiavgift (mva) på 25 %. Hvor stor er merverdiavgiften på en vare som koster 90 kr uten mva?

### 3. Finne "førverdien" i prosentregning

#### Eksempel 10

Hvis prisen øker 10 % på en vare som koster 500 kr, regner vi ut prisøkningen i kroner slik:

$$500 \cdot 0,10 = 50$$

Hva om vi isteden får vite at 10 % økning tilsvarer 50 kr, og ut fra dette skal beregne prisen før økningen?

Her viser vi bare metode 1, vi finner først hvor mange kroner 1 % utgjør, så 100 %:

$$1\%: \frac{50}{10} = 5 \text{ kr}$$

$$100\%: 100 \cdot 5 \text{ kr} = 500 \text{ kr}$$

Prisen før økningen var 500 kr

#### **Oppgave 13**

En TV ble satt ned med 20 %. Da ble den 1000 kr billigere. Hvor mye kostet den før den ble satt ned? Ikke bruk kalkulator!

#### Eksempel 11

15 % av elevene på en skole er dagligrykere. Dette utgjør 60 elever. Hvor mange elever er det på skolen?

Vi finner først ut hvor mange elever 1 % utgjør, så 100 %:

$$1\%: \frac{60}{15} = 4 \text{ elever}$$

$$100\%: 100 \cdot 4 \text{ elever} = 400 \text{ elever.}$$

Det er 400 elever på skolen. Sjekk gjerne at 15 % av 400 virkelig er lik 60!

#### **Oppgave 14**

Marius jobbet 4 timer overtid en bestemt uke. Dette utgjorde 12,5 % av arbeidstimene hans. Hvor mange timer jobbet han denne uka?

#### 4. Vekstfaktor: Finne ny verdi.

Mye prosentregning handler om å finne en ny verdi når vi kjenner førverdien og vet hvor mange prosent førverdien øker eller minker. Da er begrepet **vekstfaktor** svært nyttig.

Vekstfaktoren er **desimaltallet** som forteller oss hvor mange prosent den nye verdien er av den gamle verdien etter en endring.

**Hvis verdien øker er vekstfaktoren større enn 1**

##### Eksempel 12

a) Prisen på en bukse stiger med 13 %.

1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?

Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er  $100 \% + 13 \% = 113 \%$  av den gamle prisen.

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $113 \% = \frac{113}{100} = 1,13$ , er vekstfaktoren 1,13

b) Årslønna til Tina økte med 4 %

1) Hvor mange prosent er den nye lønna av den gamle lønna?

Den gamle lønna er 100 %. Den nye lønna er  $100 \% + 4 \% = 104 \%$  av den gamle lønna.

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $104\% = \frac{104}{100} = 1,04$ , er vekstfaktoren 1,04.

##### Eksempel 13

Hva er vekstfaktorene som svarer til en økning på 16 %? På 30 %? På 3 %? På 2,5 %? På 100 % ?

16 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 16 \% = 116 \% = 1,16$ .

30 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 30 \% = 130 \% = 1,30$  (eller 1,3).

3 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 3 \% = 103 \% = 1,03$ .

2,5 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = 1,025$ .

100 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 100 \% = 200 \% = 2,00$  (eller 2).

100 % økning er altså en *fordobling*.

##### **Oppgave 15**

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en økning på 17 %, 60 %, 6 %, 7,5 %, 0,5 % og 200 %.

**Ny verdi = førverdi · vekstfaktor**

### Eksempel 14

På de fleste varer vi kjøper, er noe av prisen vi betaler en såkalt merverdiavgift (mva) til staten. På mange varer er mva 25 % av prisen uten mva, som er den prisen butikken egentlig tar for varen.

Prisen *uten* mva på en mobiltelefon er 3040 kr. Hva er prisen *med* mva?

Vekstfaktoren som svarer til 25 % økning er  $100 \% + 25 \% = 125 \% = 1,25$ .

Prisen med mva =  $3040 \text{ kr} \cdot 1,25 = 3800 \text{ kr}$ .

(Det er altså denne prisen vi må betale i butikken.)

### Oppgave 16

På mat er merverdiavgiften (mva) 15 %. Et brød koster 23,13 kr *uten* mva. Hva er prisen *med* mva?

### Hvis verdien synker er vekstfaktoren mindre enn 1

### Eksempel 15

a) En T-skjorte blir satt ned 30 %.

1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?

Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er  $100 \% - 30 \% = 70 \%$  av den gamle prisen

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $70 \% = \frac{70}{100} = 0,70$ , er vekstfaktoren 0,70.

b) Verdien av en bil sank med 6 % i løpet av et halvt år.

1) Hvor mange prosent er den nye verdien av den gamle verdien?

Den gamle verdien er 100 %. Den nye verdien er  $100 \% - 6 \% = 94 \%$  av den gamle .

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $94 \% = \frac{94}{100} = 0,94$ , er vekstfaktoren 0,94

### Oppgave 17

Ei bukse koster 500 kr i butikk A. I butikk B koster den 20 % *mindre*. Regn med vekstfaktor på samme måte som tidligere og finn hvor mye buksa koster i butikk B

Verdt å merke seg: Når noe blir mindre, kan det i oppgaver stå at det *minsker, minsker, blir lavere, avtar, settes ned* eller *reduseres*.

### Eksempel 16

Hva er vekstfaktorene som svarer til en minking på 38 %? På 5 %? På 1,5 %? På 95 %?

38 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 38 \% = 62 \% = 0,62$ .

5 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 5 \% = 95 \% = 0,95$ .

1,5 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 1,5 \% = 98,5 \% = 0,985$ .

95 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 95 \% = 5 \% = 0,05$ .

### **Oppgave 18**

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en minking på 17 %, 50 %, 6 %, 7,5 % og 0,5 %.

### **Oppgave 19**

Hvor stor blir den nye verdien i forhold til den gamle hvis noe minker med 50 %?

Med 100 %?



### **Oppgave 20**

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Bruk vekstfaktor og regn ut verdien til bilen etter ett år



## 5. Flere prosentvise forandringer etter hverandre

### Eksempel 17

I en frisørsalong kostet en hårklipp 400 kr. Ett år senere hadde prisen økt med 5 %, og etter enda ett år hadde den økt med 10 % til. Hva var prisen til slutt? Hvor mange prosent hadde prisen økt i løpet av disse to årene?

Vi bruker vekstfaktor og finner:

$$\text{Pris etter ett år: } 400 \text{ kr} \cdot 1,05 = 420 \text{ kr}$$

$$\text{Pris etter to år: } 420 \text{ kr} \cdot 1,10 = 462 \text{ kr}$$

$$\frac{462 \text{ kr}}{400 \text{ kr}} = 1,155 = 115,5\%$$

Prisen har økt med  $115,5\% - 100\% = 15,5\%$ .

Legg merke til at den samlede prisøkningen er *mer* enn  $5\% + 10\% = 15\%$ !

Det er ikke nødvendig å regne ut prisen etter ett år. Vi kan heller regne slik:

$$\text{Pris etter to år: } 400 \text{ kr} \cdot 1,05 \cdot 1,10 = 462 \text{ kr}$$

### **Oppgave 21**

I 2010 var timeprisen på et bilverksted 900 kr. Den økte med 6 % i 2011 og 8 % i 2012. Hva var timeprisen i 2012? Hvor mange prosent steg timeprisen fra 2010 til 2012?

Løs helst oppgaven uten å regne ut timeprisen i 2011 (se eksempel 18).

### Eksempel 18

Prisen på et klesplagg er 500 kr. Prisen minker først med 30 % og etter en stund øker den igjen med 30 %. Hva er prisen til slutt?

$$\text{Prisen til slutt: } 500 \text{ kr} \cdot 0,70 \cdot 1,30 = 455 \text{ kr}$$

Hvorfor kommer ikke prisen tilbake til 500 kr i **eksempel 19**?

1. 30 % avslag på 500 kr blir 150 kr, slik at ny pris blir 350 kr.
2. Økningen på 30 % skal regnes av 350 kr, ikke 500 kr, slik at økningen blir bare 105 kr.
3. Sluttprisen blir da 455 kr.

### Oppgave 22

Prisen på en vare var 200 kr. Den ble satt opp med 20 %. Salget gikk dårlig, så etter en stund ble prisen satt ned med 20 %. Hva ble da prisen til slutt? Hvorfor ble ikke denne prisen 200 kr?

### Oppgave 23

Spiller det noen rolle for sluttprisen på en vare om den først stiger 30 % og så synker 20 %, eller om den først synker 20 % og så stiger 30 %? 🤔

### Eksempel 19

Sparing av penger på en bankkonto er en vanlig anvendelse av flere prosentvise tillegg. Hvis vi setter for eksempel 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en viss prosent av det beløpet vi har på kontoen. Renteprocenten forandrer seg ofte, men her antar vi at prosenten holder seg fast på 3 % gjennom mange år. Da regner vi slik:

Etter ett år har vi i banken:  $10000 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10300 \text{ kr}$ .

Etter to år har vi i banken:  $10300 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10609 \text{ kr}$ .

Etter tre år har vi i banken:  $10609 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10927,27 \text{ kr}$ .

Vi ser at beløpet øker mer og mer for hvert år, fordi vi får rente også av de forrige års rente.

Hvis vi vil regne ut hvor mye vi har etter 10 år, kan vi regne ut det direkte ved å legge merke til at vi ganger med 1,03 for hvert år som går. 1,03 multiplisert med seg selv ti ganger kan vi skrive som potensen  $1,03^{10}$ , som er lik 1,343916.

Etter ti år har vi i banken:  $10000 \text{ kr} \cdot 1,03^{10} = 13439,16 \text{ kr}$ .

Legg merke til at penger i banken alltid regnes nøyaktig på øret, altså med to desimaler, selv om minste mynten som brukes nå er 1 krone.

### Oppgave 24

Finn først ut hvordan du regner ut en potens på kalkulatoren din, for eksempel  $1,035^{10}$ .

Du setter 5000 kr i banken til 3,5 % årlig fast rente. Hvor mye har du i banken etter 5 år? Etter 10 år? Etter 20 år?

### Eksempel 20

Det er vanlig å anta at verdien av en bil avtar med en fast prosent hvert år, inntil den blir vraket. En bil koster 380 000 kr som ny. Verdien minker 15 % i året i 10 år. Hvor mye er bilen verdt etter 10 år?

15 % minking svarer til vekstfaktoren  $100 \% - 15 \% = 85 \% = 0,85$ . For hvert år som går, finner vi verdien ved å multiplisere forrige års verdi med 0,85. Etter 10 år har vi multiplisert nybilverdien med 0,85 10 ganger. Da får vi:

Verdien etter 10 år:  $380000 \text{ kr} \cdot 0,85^{10} = 74800 \text{ kr}$  (litt avrundet).

### Oppgave 25

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året, inntil ingen vil ha den lenger når den blir mer enn fem år. Hvor mye er PCen verdt etter 5 år?



### Eksempel 21

Årslønna til Mona var 389 500 kr i 2012. Den hadde økt med 2,5 % siden 2011. Hva var årslønna hennes i 2011?


Husk at 2,5 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = 1,025$ .

$$x \cdot 1,025 = 389500$$

$$x = \frac{389500}{1,025} = 380000$$

Årslønna til Mona var 380 000 kr i 2011.

### Oppgave 26

Tina veide 5150 g da hun var 7 uker gammel. Da hadde hun lagt på seg 12 % siden hun var 5 uker. Hvor mye veide hun da hun var 5 uker gammel? 



### Eksempel 22

Prisen på en mobiltelefon er 3990 kr medregnet 25 % merverdiavgift (mva). Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften?

$$x \cdot 1,25 = 3990$$

$$x = \frac{3990}{1,25} = 3192$$

Prisen uten mva er 3192 kr.

Merverdiavgiften er  $3990 \text{ kr} - 3192 \text{ kr} = 798 \text{ kr}$ .

### Oppgave 27



Prisen på et brød er 26,60 kr, medregnet 15 % mva. Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften på brødet?



### Eksempel 23

Elevtallet i en klasse ved skoleslutt var 27. Det var 10 % *lavere* enn ved skolestart. Hvor mange elever var det ved skolestart?

Her er det så enkle tall at mange sikkert vil se svaret med en gang, men regnemåten er slik:

Her har elevtallet *minket* så vekstfaktoren må være mindre enn 1.


Vekstfaktoren er  $100 \% - 10 \% = 90 \% = 0,90$ .

$$x \cdot 0,90 = 27$$

$$x = \frac{27}{0,90} = 30$$

Det var 30 elever ved skolestart.

### Oppgave 28

Etter at Jostein hadde vært på en ukes fottur, veide han 76 kg. Dette var 5 % mindre enn han veide like før turen. Hvor mye veide han før turen? 

### Oppgave 29

Hassan tjener 138 kr timen. Dette er 8 % mindre enn Saras timelønn. Hva er Saras timelønn?



### Oppgave 30

I juni og juli 2013 ble det i Oslo anmeldt 88 innbrudd i villaer. Dette var en nedgang på

42,5 % fra året før. Hvor mange innbrudd ble anmeldt i 2012?



### Eksempel 24

Prisen på en vare er satt opp med 5 % fire ganger. Nå koster den 243 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

Vekstfaktoren er  $100\% + 5\% = 105\% = 1,05$ . Vi kaller den opprinnelige verdien for  $x$ . Da kan vi sette opp likningen

$$x \cdot 1,05^4 = 243$$

$$x \cdot 1,2155 = 243$$

$$x = \frac{243}{1,2155} = 200$$

Varen kostet opprinnelig 200 kr.

### Oppgave 31

Verdien til en aksje har sunket 3 % fem ganger på rad. Nå er den verdt 89 kr. Hva var den

verdt opprinnelig?



## Blandede oppgaver

### B1

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)

Tidligere kostet en vare 50 kroner. Nå koster varen 90 kroner.  
Hvor mange prosent har prisen økt med?

### B2

Tidligere kostet en vare 90 kroner. Nå koster varen 50 kroner.  
Hvor mange prosent har prisen minket med?

### B3

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)

I løpet av noen år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time.  
Hvor mange prosent steg timelønnen?

### B4

(Eksamen 1P våren 2015, Del 1)

Skriv som prosent

- a) 0,451
- b)  $\frac{5}{25}$

### B5

(Eksamen 2P våren 2015, Del 1)

En vare koster i dag 240 kr. Prisen er da satt ned med 20 %.

Hvor mye kostet varen **før** prisen ble satt ned?

### B6

(Eksamen 2P våren 2016, del 1)

I butikk A koster en vare 150 kroner. I butikk B koster den samme varen 120 kroner.

- a) Hvor mange prosent høyere er prisen i butikken A sammenlignet med prisen i butikk B?
- b) Hvor mange prosent lavere er prisen i butikk B sammenlignet med prisen i butikk A?

## B7



- I et borettslag ble det stemt over et forslag som krevde  $\frac{2}{3}$  flertall for å bli vedtatt. 46 av 74 stemte for forslaget. Ble forslaget vedtatt?
- I et annet borettslag stemte 81 for og 39 mot et forslag som også krevde  $\frac{2}{3}$  flertall. Ble dette forslaget vedtatt?

## B8


(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

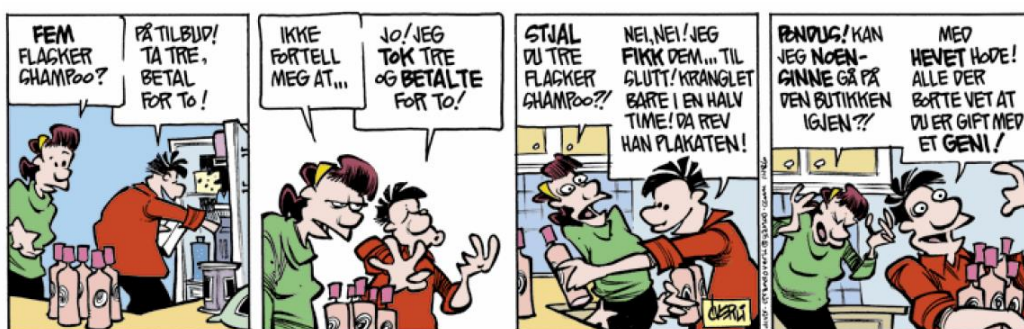
Det bor ca. 7,2 milliarder mennesker på jorda. 15 % har ikke tilgang til rent vann. Omtrent hvor mange mennesker har ikke tilgang på rent vann?

## B9

(Eksamen 2P våren 2008, Del 2)

I butikker ser en ofte tilbud av typen ”Ta tre, betal for to”. Du får altså tre varer til prisen for to.

- En klesbutikk hadde et slikt tilbud på T-skjorter. Der kostet én T-skjorte 129 kroner. Hvor mange prosent avslag vil du få ved å benytte deg av tilbudet ”Ta tre, betal for to”?
-  I tegneseriestripen nedenfor har Pondus tolket tilbudet annerledes. Hvor mange prosent avslag fikk han?



**B10**

Hos en frisør betaler du full pris for de fire første klippene, men får 50 % rabatt på det femte. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du ser på disse fem klippene samlet?


**B11**

(Eksamen 2P våren 2011, Del 1)

Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din og fyll inn det som mangler.

Prosentvis endring	Vekstfaktor
+ 2 %	
- 68 %	
	0,25
	2

**B12**

- a) I følge Aftenposten 20. juni 2013 har antall leverte brev per postkasse gått ned fra 750 i år 2000 til 450 i 2012. Hvor mange prosent har antall brev per postkasse minket?
- b)  Posten antar at i 2020 vil antall brev ha falt til 230 per postkasse i året. De sier at da har to tredjedeler av posten forsvunnet på 20 år. Undersøk om denne påstanden er riktig.

**B13**

(Eksamen våren 2013, Del 1)



En vare koster nå 210 kr. Prisen er da satt ned med 30 %. Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

**B14**

I mai 2013 eksporterte norske bedrifter varer og tjenester for 72,9 milliarder kroner. Dette var 11,2 % mindre enn i mai 2012. Hvor stor var eksporten i mai 2012?



**B15**

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 2)

Siri setter inn 12 000 kroner på en ny bankkonto. Hun lar pengene stå urørt og får 4,5 % rente per år.

Hvor mye vil hun ha på kontoen etter 15 år?


**B16**

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Stian har en bil som i dag er verdt 270 000 kroner. Verdien til bilen har avtatt med 10 % det siste året. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 10 % hvert år i årene framover.

- 1) Hvor mye vil bilen være verdt om ett år?
- 2) Hvor mye var bilen verdt for ett år siden?

**B17**

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1) 

En vare selges i to forskjellige butikker. Prisen er den samme i begge butikkene. I butikk A settes prisen opp med 20 %. I butikk B settes prisen først opp med 10 % og så etter noen dager med 10 % til. Marit påstår at prisen da fremdeles er den samme i begge butikkene.

Forklar Marit hvorfor dette ikke er riktig. Bruk gjerne et eksempel når du forklarer.

**B18**

(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)

En bil koster 250 000 kroner. Bilens verdi avtar med 15 % per år.

Forklar hvilket av regnestykkene nedenfor som kan brukes for å finne hvor mye bilen er verd etter 10 år.

- 1)  $250\,000 - 10 \cdot \frac{250\,000 \cdot 15}{100}$
- 2)  $250\,000 \cdot 0,15^{10}$
- 3)  $250\,000 \cdot 0,85^{10}$

**B19**

Fra 2009 til 2012 steg norske boligpriser i gjennomsnitt med 8,3 % hvert år. Hvor mange prosent steg boligprisene totalt fra 2009 til 2012? (Nei, svaret er ikke 24,9 %!)

**B20**

(Eksamen 1P våren 2010, Del 2) 

Ola skal bygge hus. Huset vil koste 2 300 000 kroner. Han har 150 000 kroner i banken. Resten må han låne. I Husbanken får han låne 80 % av det huset vil koste. Renten i Husbanken er 4 % per år. Resten av pengene må han låne i en privat bank til 6 % rente per år.

- Hvor mye penger får Ola låne i Husbanken, og hvor mye må han låne i den private banken?
- Hvor mange kroner må han til sammen betale i renter i Husbanken og den private banken det første året?

Ola kan trekke fra 28 % av rentekostnadene på skatten. Dette kalles et skattefradrag.

- Hvor store blir renteutgiftene til Ola det første året, dersom vi tar hensyn til skattefradraget?

**B21**

En bensinstasjon reklamerer for bilvask: "Kjøp kupongkort med 5 vask, betal for 3. Spar 40 %." Stemmer dette?


**B22**

(Eksamen 1P våren 2014, Del 2)

Prisen på en vare er satt opp 10 % fem ganger. Opprinnelig kostet varen 246 kroner.

- Hvor mye koster varen nå?
- Hvor mange prosent er prisen totalt satt opp?

Prisen på en annen vare også satt opp 10 % fem ganger. Nå koster varen 550 kroner.

-  Hva kostet denne varen opprinnelig?

## Fasit

### Fasit øvingsoppgaver

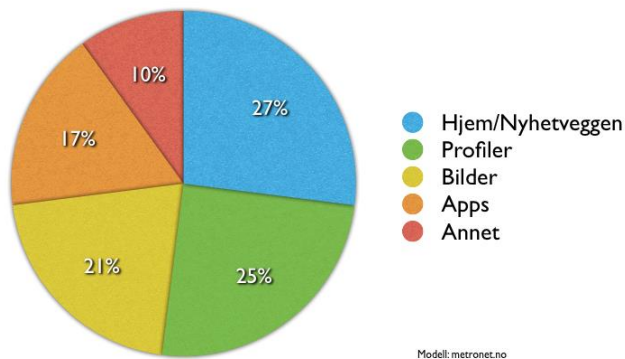
Oppgave 1 20 %  
Oppgave 2 20 %  
Oppgave 3 70 % , 30 %  
Oppgave 4 13,1 %  
Oppgave 5 33,3 %  
Oppgave 6 10 %  
Oppgave 7 15,3 %  
Oppgave 8 18  
Oppgave 9 170  
Oppgave 10 4  
Oppgave 11 6,8 kg 5,2 kg 2,0 kg  
Oppgave 12 22,50 kr  
Oppgave 13 5000 kr  
Oppgave 14 32 timer  
Oppgave 15 1,17 1,60 1,06 1,075  
1,005, 3  
Oppgave 16 26,60 kr  
Oppgave 17 400 kr  
Oppgave 18 0,83 0,50 0,94 0,925 0,995  
Oppgave 19 Halvparten, null  
Oppgave 20 357 000 kr  
Oppgave 21 1030 kr 14,48 %  
Oppgave 22 192 kr. Fordi grunnlaget før  
nedgangen er større enn før økningen.  
Oppgave 23 Nei  
Oppgave 24 5938,43 kr, 7052,99 kr,  
9948,94 kr  
Oppgave 25 2326 kr  
Oppgave 26 4105 g  
Oppgave 27 23,13 kr, MVA er 3,47 kr.  
Oppgave 28 80 kg  
Oppgave 29 150 kr  
Oppgave 30 153  
Oppgave 31 104 kr

### Fasit blandede oppgaver

B1 80 %  
B2 44,4%  
B3 15 %  
B4 a) 45,1 % b) 20  
B5 300 kr  
B6 a) 25 % b) 20 %  
B7 a) Nei b) Ja  
B8 1,08 milliarder  
B9 a) 33,3 % b) 60 %  
B10 10 %  
B11 1,02 0,32 -75% +100%  
B12 a) 40 % b) Ja, omtrent  
B13 300 kr  
B14 82,1 milliarder  
B15 23223,39 kr B16 1) 243 000 kr 2)  
300 000 kr  
B18 Alternativ 3  
B19 27,0 %  
B20 a) 1 840 000 kr, 310 000 kr b)  
92 200 kr c) 66384 kr  
B21 Ja  
B22a) 396 kr b) 61 % c) 341 kr

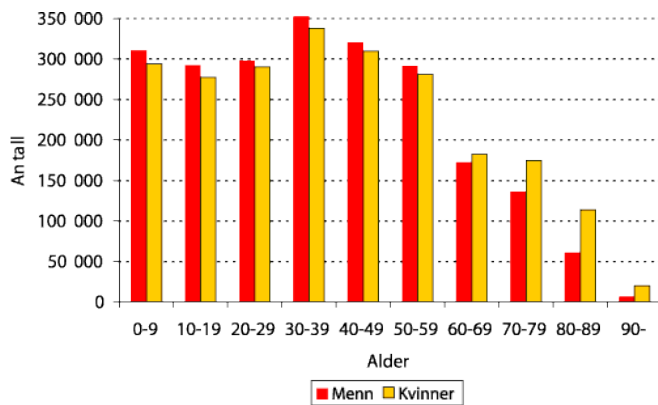
# Kapittel 4. Statistikk

Tid brukt på Facebook: fordelt på Innhold



Dette kapitlet handler blant annet om:

- Beregne gjennomsnitt og andre sentralmål.
- Framstille data i frekvenstabeller.
- Beregne standardavvik og andre spredningsmål.
- Framstille data i søyle-, sektor- og andre typer diagrammer.
- Bruke Excel til å gjøre statistiske beregninger.



## 1. Hva er statistikk?

Statistikk handler om å trekke informasjon ut av et *datamateriale* og å framstille materialet på oversiktlige måter. Et datamateriale består av mange tall, og hvert tall kaller vi gjerne en *observasjon*. Eksempler på datamateriale:

- Standpunktkarakterene til alle elevene i 2P som var oppe til eksamen
- Høydene til alle som er på militærseksjon et år
- Antall mål en bestemt fotballspiller har scoret i hver kamp han har spilt
- Maksimumstemperaturen på Blindern hver dag i 2013

Vi bruker karakterene i to 2P-grupper med tilsammen 50 elever som eksempel:

2 3 1 3 3   5 1 2 2 4   6 2 2 1 2   3 1 2 4 4   5 2 2 3 3   1 2 4 2 5   4 4 1 2 3   2 2 3 1 5   4 2 1 5 2  
3 2 4 3 1

Dette ser uoversiktlig ut. Vi framstiller derfor tallene i en *frekvenstabell* og som et *diagram*.

## 2. Frekvenstabeller

En *frekvenstabell* viser hvor mange ganger hver dataverdi forekommer. I datamaterialet ovenfor er det seks dataverdier (de seks mulige karakterene), og det er 10 elever som har fått karakteren 3. Vi sier at *frekvensen* til karakteren 3 er lik 10. Et annet ord for frekvens er *hyppighet*.

Frekvenstabellen blir slik:

Karakter	Frekvens
1	9
2	17
3	10
4	8
5	5
6	1

Vi bør regne ut summen av alle seks frekvensene og sjekke at den blir lik antall observasjoner (her 50).

Ofte er det mer opplysende å finne ut hvor stor *del* av datamaterialet hver frekvens utgjør. Det oppgir vi i prosent og kaller det *relativ frekvens*. Her er et eksempel på utregning:

$$\text{Relativ frekvens for karakteren 4: } \frac{8}{50} = 0,16 = 16 \%$$

Her er tabellen en gang til hvor vi har tatt med relative frekvenser:

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens
1	9	18 %
2	17	34 %
3	10	20 %
4	8	16 %
5	5	10 %
6	1	2 %

Sjekk at summen av de relative frekvensene blir 100 %.

Tabellen under er utvidet slik at den også viser *kumulativ frekvens* og *relativ kumulativ frekvens*. Ordet kumulativ betyr “oppsamlet”.

Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	18 %	9	18 %
2	17	34 %	26	52 %
3	10	20 %	36	72 %
4	8	16 %	44	88 %
5	5	10 %	49	98 %
6	1	2 %	50	100 %

Dette betyr for eksempel at 36 av de 50 elevene fikk 3 eller dårligere og at dette utgjør 72 % av elevene.

### Oppgave 1

Løs denne oppgaven uten kalkulator.

Noen elever ble spurt om hvor mange PCer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Framstill disse dataene i en tabell som viser frekvenser, kumulative frekvenser, relative frekvenser og relative kumulative frekvenser.

### 3. Diagrammer

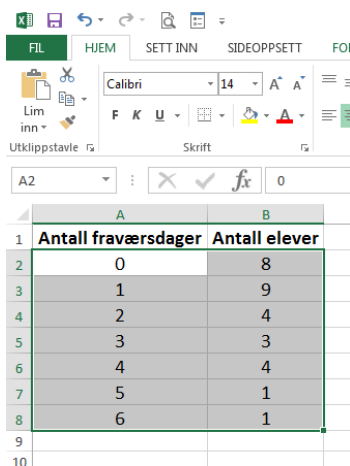
#### 3.1 Søylediagram (stolpediagram)

Tallene i en frekvenstabell kan vi også framstille i et *diagram*. Det er mest aktuelt å gjøre dette i del 2 - oppgaver, og da kan vi bruke regnearket Excel. Men du bør også kunne tegne et diagram på papir i del 1.

Det er noen små forskjeller på menyer og kommandoer mellom Excel på Windows og Excel på Mac. Teksten beskriver Windows-versjonen. Hvis du bruker Mac får du et ark av læreren som beskriver forskjellene på de to versjonene.

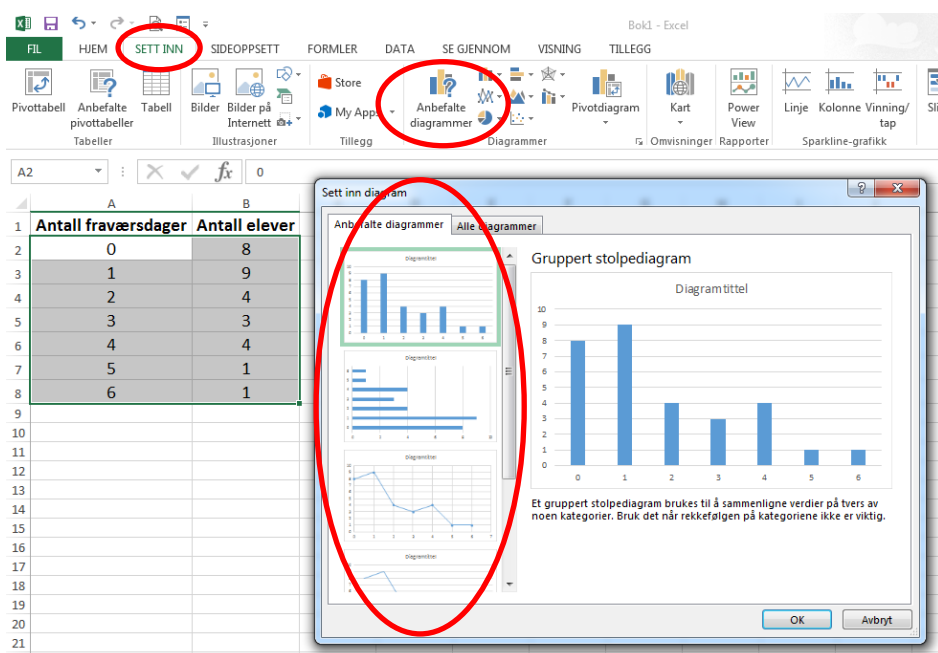
Vi bruker en tabell over elevfravær som eksempel:

Legg inn dataene som du vil lage søylediagram av i Excel. Merk ut med pekeplate eller mus dataområdet. Ikke ta med eventuell overskrift.



	A	B
1	Antall fraværsdager	Antall elever
2	0	8
3	1	9
4	2	4
5	3	3
6	4	4
7	5	1
8	6	1

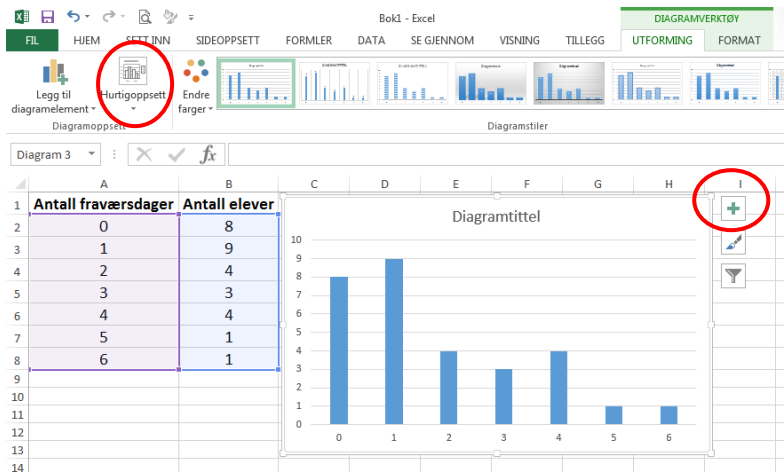
Velg fanen *Sett inn* og *Anbefalte diagrammer*. I nytt vindu velg ønsket diagram og klikk ok:



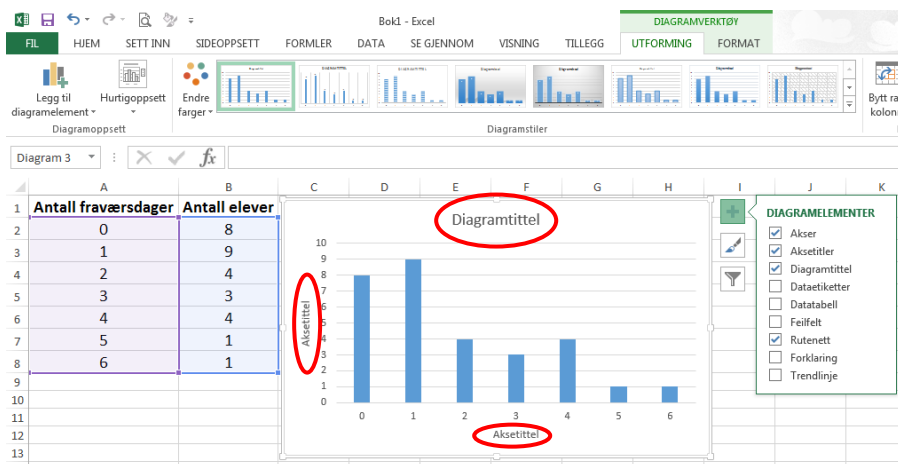
The screenshot shows the Excel interface with the 'Sett inn diagram' dialog box open. The 'Anbefalte diagrammer' tab is selected, and a 'Gruppert stolpediagram' is chosen. The dialog box shows a preview of the grouped bar chart. The 'OK' button is highlighted.

## Formatering av diagrammet, diagramtittel og aksetitler:

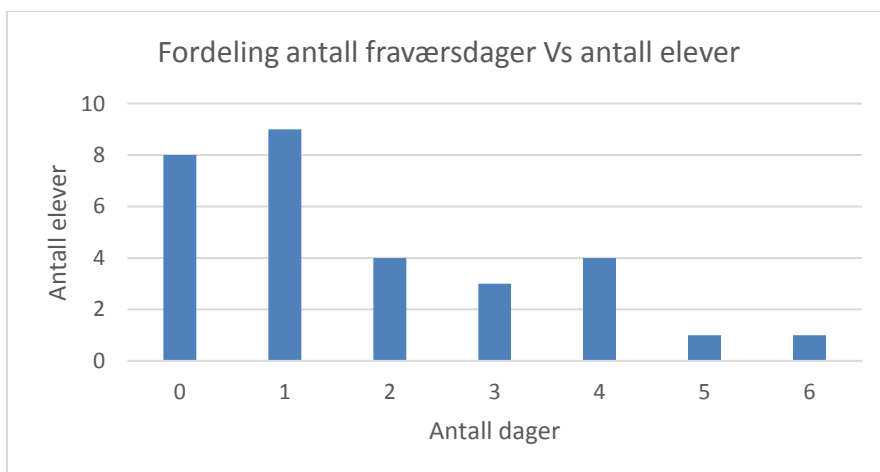
Velg enten fanen *hurtigoppsett* eller + tegnet til høyre på diagram vinduet.



Skriv inn ønsket tekst inn i feltene *diagramtittel* og *aksetittel*:



Diagrammet ferdig:

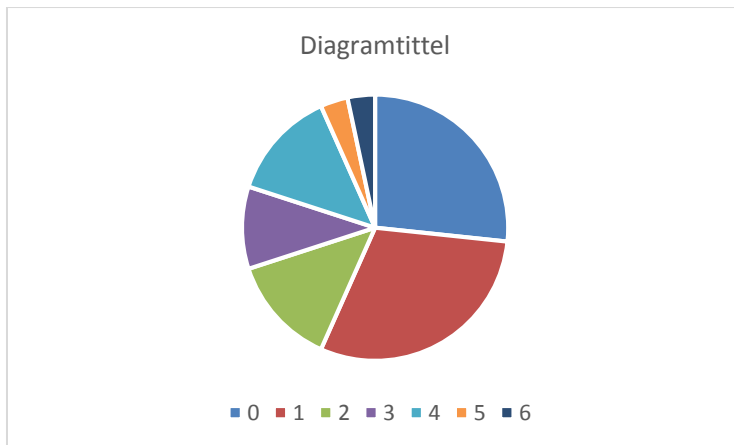




Av og til vil du lage diagrammer hvor det er mer enn en kolonne for hver dataverdi. Et eksempel kan være fraværet i flere klasser som skal sammenlignes. Da merker du bare ut alle kolonnene det skal lages søyler av. Resten blir som før.

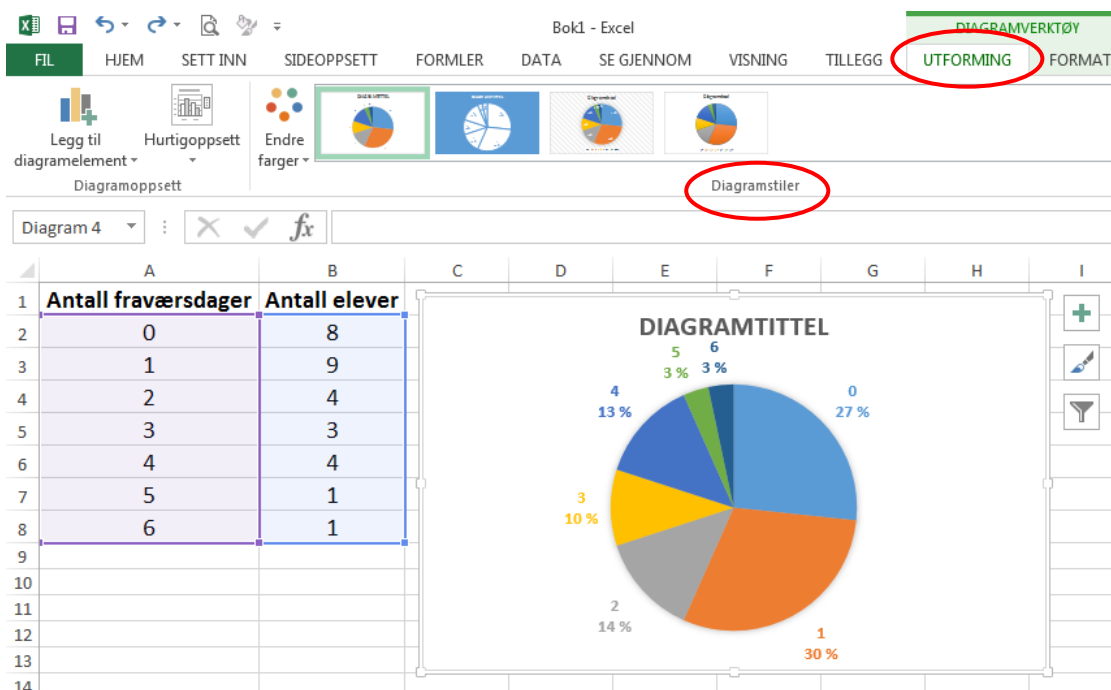
### 3.2 Sektordiagram

I mange tilfelle hvor man ikke har for mange dataverdier, er det vanlig å lage et *sektor-diagram* (populært kalt “kakediagram”). Vi går fram på samme måte som for et stolpediagram, men velger *Sektor* istedenfor *Stolpe*. Med tallene fra forrige eksempel får vi da dette diagrammet:

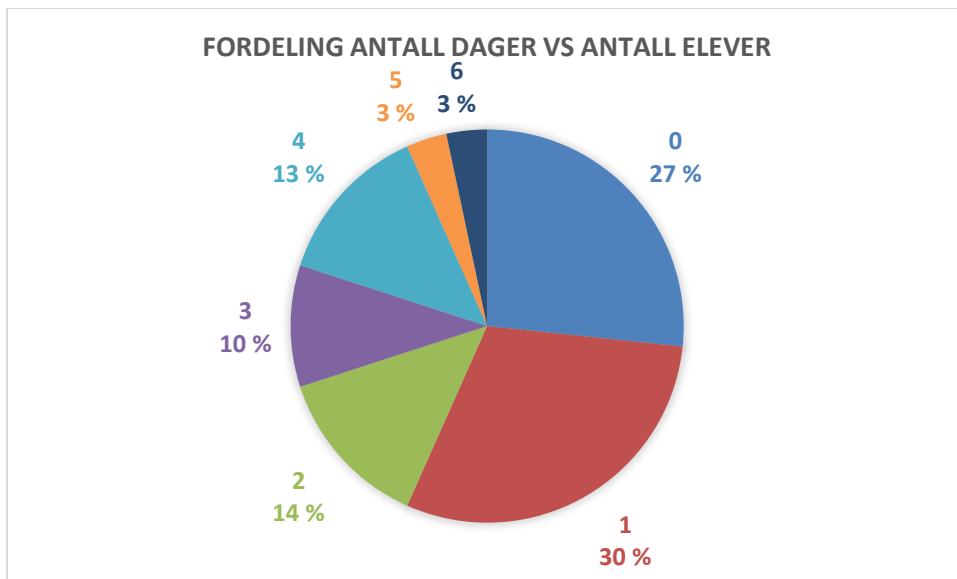


Det er en sektor for hver av de sju verdiene til antall fraværsdager. Disse verdiene er fargekodet, og koden står til høyre. I svart-hvitt er det vanskelig å se hva som er hva.

Vise den relative frekvensen i prosent for hver av sektorene. Velg fanen *utforming* og velg et av *diagramstilene*:



Til slutt kan du skrive en passende diagramtittel.



Det er mulig å lage mye “pynt” på diagrammene. Ikke bruk tid på det, i hvert fall ikke på prøver!

Et diagram skriver du ut på vanlig måte etter å ha klikket på det. Da får du bare med diagrammet, ikke hele regnearket.

## Oppgave 2

Framstill frekvenstabellen i oppgave 1 som et søylediagram og som et sektordiagram.

### 3.3 Linjediagram

Linjediagrammer brukes nesten bare for å vise hvordan noe utvikler seg over tid. Det betyr at på vannrett akse har vi som regel timer, dager, uker, måneder eller år.

I Excel lager du et linjediagram på samme måte som et stolpediagram.



### 3.4 Tegne sektordiagram for hånd

I del 1 kan du hende at du blir bedt om å tegne et sektordiagram på papir. Da vil det bare være noen få sektorer, og det vil være tall som skal være mulig å håndtere uten å være veldig god i hoderegning.

*For å tegne et bra sektordiagram trenger du passer, gradskive og linjal.*

#### Eksempel 1

En del mennesker ble spurt om de var fornøyd med regjeringen. 60 % svarte “ja”, 30 % svarte “nei” og 10 % svarte “vet ikke”. (Dette er altså de relative frekvensene for dataverdiene.)

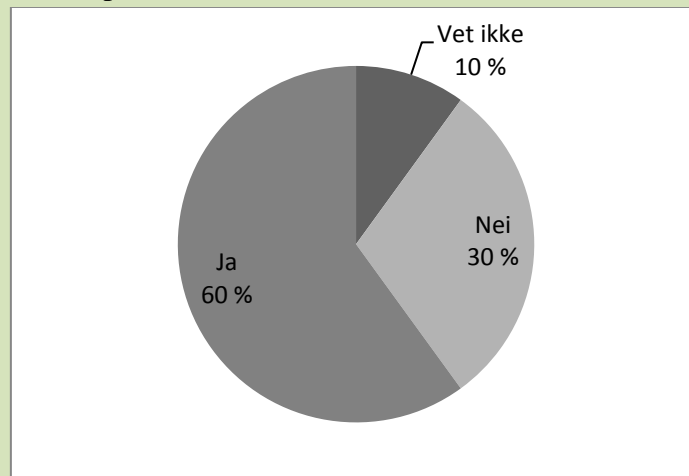
Vi vil lage et sektordiagram som illustrerer svarene. Vi regner da ut hvor mange grader hver av de tre sektorene må fylle. Hele sirkelen utgjør  $360^\circ$ .

Ja-sektoren må fylle  $360^\circ \cdot 0,6 = 216^\circ$ .

Nei-sektoren må fylle  $360^\circ \cdot 0,3 = 108^\circ$ .

Vet ikke-sektoren må fylle  $360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$ .

Vi lager en litt stor sirkel med passer og bruker gradskive til å lage de tre sektorene med riktig gradtall. Til slutt skriver vi passende tekst i hver sektor. Resultatet skal være omtrent slik:



#### Oppgave 3

To klasser på 60 elever skal ha aktivitetsdag. 12 elever ønsker langrenn, 22 slalåm, 18 aking og 8 fottur. Lag et sektordiagram på papir (og uten kalkulator) som illustrerer denne svarfordelingen.

Tips: Legg merke til at  $360/60 = 6$ . En elev svarer altså til 6 grader.

## 4. Sentralmål

Et *sentralmål* er et tall som viser hovedtendensen i et datamateriale. De vanligste sentralmålene er *gjennomsnitt*, *median* og *typetall*.

### 4.1 Gjennomsnitt

Vi finner *gjennomsnittet* av et datamateriale ved å legge sammen alle observasjonene og dividere med antall observasjoner.

#### Eksempel 2

Høydene til 10 gutter (i cm) er 187, 182, 175, 184, 173, 180, 182, 177, 171, 186.

Vi regner ut summen av høydene:  $187 + 182 + 175 + 184 + 173 + 180 + 182 + 177 + 171 + 186 = 1797$ .

Gjennomsnittet er  $1797 \text{ cm} / 10 = 179,7 \text{ cm}$ .

#### Oppgave 4

Noen elever ble spurt om hvor mange PCer, nettbrett og mobiler det til sammen var i familien. De ga følgende svar:

3 5 6 4 4 7 4 4 7 5

Finn gjennomsnittlig antall “datadingser” i disse familiene.

#### Oppgave 5



- Kan en gjennomsnittshøyde være større enn *alle* høydene som er brukt for å regne ut gjennomsnittet?
- Kan *alle* høydene være lik gjennomsnittshøyden?

### Eksempel 3

Hvis datamaterialet er satt i en frekvenstabell, finner vi gjennomsnittet slik:

Karakter	Frekvens	Karakter * Frekvens
1	9	9
2	17	34
3	10	30
4	8	32
5	5	25
6	1	6
	<b>Sum = 50</b>	<b>Sum = 136</b>

Dette viser at summen av alle 50 karakterene er 136.

Gjennomsnittskarakteren er  $136 / 50 = 2,72$

### Oppgave 6

Taiba spiller håndball. Hun har laget en tabell som viser antall mål hun har scoret i kampene. Tabellen viser for eksempel at i 5 av kampene har hun scoret 2 mål i hver kamp. Frekvensene er her antall kamper hvor hun har scoret 0 mål, 1 mål, osv.

Antall mål	Antall kamper
0	2
1	3
2	5
3	7
4	8
5	6
6	2

- Hvor mange kamper har hun spilt?
- Lag en ekstra kolonne og finn ut hvor mange mål hun har scoret tilsammen på disse kampene.
- Hvor mange mål har hun scoret i gjennomsnitt per kamp?

## 4. 2 Median

*Medianen* i et datamateriale er den midterste verdien når materialet er sortert i stigende rekkefølge.

### Eksempel 4

Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5 og 1?

Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2**, 4, 5. Da ser vi at medianen er 2.

### Eksempel 5

Hva er medianen for karakterene 4, 2, 2, 5, 1 og 3?

Vi ordner dem i stigende rekkefølge: 1, 2, **2**, **3**, 4, 5. Da ser vi at det er ikke noe tall nøyaktig i midten. I slike tilfelle er medianen definert som gjennomsnittet av de to verdiene nærmest midten. Derfor er medianen  $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ .

### Oppgave 7

- a) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall bøker noen tilfeldige elever hadde lest i 2012: 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3.
- b) Finn medianen i dette datamaterialet, som viser antall fraværsdager for noen elever: 2, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2, 0.

Hvis datamaterialet er ordnet i en frekvenstabell, er medianen den minste dataverdien hvor den relative kumulative frekvensen er større enn eller lik 50 %.

Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ kum. fr.
1	9	9	18 %
2	17	26	<b>52 %</b>
3	10	36	72 %
4	8	44	88 %
5	5	49	98 %
6	1	50	100 %

Her er medianen lik 2.

### 4.3 Typetall

*Typetallet* i et datamateriale er den dataverdien som forekommer flest ganger (“er typisk for”) i datamaterialet.

#### Eksempel 6

Typetallet i karaktereksemplet ovenfor er 2, fordi det er flest elever som har fått 2 (17 elever).

### Oppgave 8

Finn typetallet i datamaterialet i oppgave 1.

## 5. Spredningsmål

Et *spredningsmål* er et tall som sier noe om hvor stor spredning det er på tallene i et datamateriale.

### 5.1 Variasjonsbredde

Det enkleste spredningsmålet er *variasjonsbredde*.

*Variasjonsbredden* i et datamateriale er forskjellen mellom største og minste verdi i materialet.

#### Eksempel 7

I oppgave 7a hadde vi tallene 6, 2, 1, 0, 4, 1, 7, 0, 3, som var antall leste bøker i 2012. Største verdien er 7 bøker og minste er 0 bøker. Variasjonsbredden er 7 bøker – 0 bøker = 7 bøker.

#### **Oppgave 9**

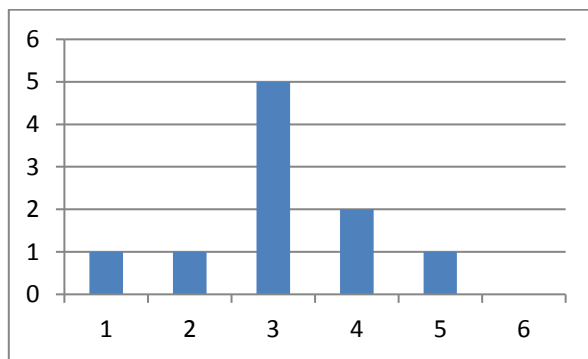
Åtte jenter løper 100 m. Tidene i sekunder er 15,6 17,8 14,4 18,2 16,3 14,9 15,8 17,1.  
Finn variasjonsbredden.

## 5.2 Standardavvik

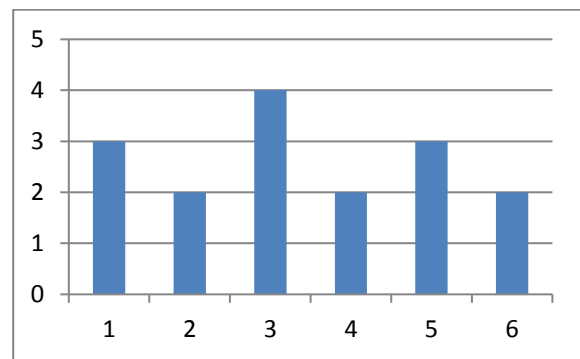
Ofte gir ikke variasjonsbredden et godt bilde av spredningen. For eksempel kan vi tenke oss en 2P-gruppe hvor nesten alle elevene fikk karakter 3, mens en elev fikk 1 og en fikk 6. I en annen gruppe fikk to elever 1, fire fikk 2, fem fikk 3, fire fikk 4, tre fikk 5 og to fikk 6. Variasjonsbredden er 5 i begge gruppene, men det er likevel naturlig å si at det er mer spredning i karakterene i den andre gruppen.

*Standardavvik* er et spredningsmål som sier noe om hvor “bred” en fordeling er. Det venstre diagrammet nedenfor viser et datamateriale med lite standardavvik og det høyre et med stort standardavvik.

Den nøyaktige definisjonen av standardavvik er litt vanskelig, så vi tar den ikke med her. Heldigvis er det bare aktuelt å beregne standardavvik i del 2-oppgaver, og da kan vi gjøre det ved å bruke regnearket Excel slik det er forklart i neste delkapittel.



Lite standardavvik.



Stort standardavvik.

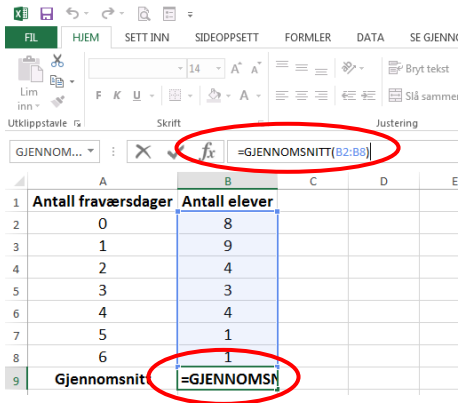
## 6. Beregning av sentralmål og spredningsmål i Excel

De sentral- og spredningsmål i 2P som kan være aktuelle å beregne i Excel er gjennomsnitt, median, typetall og standardavvik. Men husk at gjennomsnitt og median med enkle tall må du også kunne beregne uten hjelpemidler.

*Viktig:* alle formler og kommandoer må begynne med likhetstegn (=).

- I. Klikk på cellen som skal inneholde sentralmålet og sett inn et likhetstegn (=).
- II. Skriv inn ønsket kommando med parentestegn: **Gjennomsnitt(dataområde)** eller **Median(dataområde)** eller **Modus(dataområde)**, modus er det samme som typetall eller **STDAV.P.(dataområde)**, standardavvik.
- III. Bruk musepekeren og marker dataområdet til kommandoen og trykk *Enter*.





- Ikonet  $f_x$  på verktøylinjen er en hurtigfunksjon. Da får du likhetstegn inn i cellen. Og tilgang på alle Excel kommandoer i et nytt vindu.
- Vi kan bytte mellom å se formler og beregninger i Excel ved å taste (**Ctrl** + `). Apostrofe = (Shift + tasten bak pluss) **eller** Velg *fane-formler* deretter *verktøyikon-Vise formel*.
- På en prøve må du legge ved utskrift av både resultater og formler med navn på rader og på kolonner.

### Eksempel 8

Vi har målt høyden til 7 jenter. Høydene i cm er: 177,164, 170, 168, 172, 161, 169.

Bildet under viser hvordan vi finner medianen, gjennomsnittet og standardavviket til disse høydene i Excel. Til venstre ser vi formlene som må skrives inn og til høyre hvordan resultatene blir.

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	= ANTALL(B3:B9)
12	Gjennomsnitt:	=GJENNOMSNIITT(B3:B9)
13	Standardavvik:	=STDAV.P(B3:B9)
14	Median:	=MEDIAN(B3:B9)

	A	B
1		
2		Høyde i cm
3		177
4		164
5		170
6		168
7		172
8		161
9		169
10		
11	Antall:	7
12	Gjennomsnitt:	168,7
13	Standardavvik:	4,8
14	Median:	169

Formelen for antall i B11 trenger vi egentlig ikke her. Den er bare tatt med for å vise at Excel lett kan telle opp antall celler i et område; her antall høyder.

## 7. 🧠 **Klassedelt (gruppedelt) materiale**

Når det er mange ulike dataverdier er det upraktisk å ta med alle i en frekvenstabell. Et eksempel er inntektsstatistikk hvor inntekten kan ha tusenvis av forskjellige verdier. Da grupperer vi verdiene i *klasser (grupper)* og finner frekvensen for hver klasse.

Her er et eksempel på en klassedelt frekvenstabell som viser inntekten til lønsmottakerne i en tenkt kommune. Inntektene er oppgitt i tusener av kroner.

<b>Inntekt</b>	<b>Frekvens</b>
[0, 100>	467
[100, 200>	678
[200, 300>	1490
[300, 400>	2653
[400, 500>	3785
[500, 750>	4106
[750, 1000>	987
[1000, 5000>	45
	$N = 14211$

Dette betyr for eksempel at det var 678 lønsmottakere som hadde en inntekt *fra og med* 100 000 kr og *inntil* 200 000. En inntekt på nøyaktig 200 000 kr faller i neste klasse, nemlig [200, 300>. Nederst i frekvenstabellen har vi regnet ut det totale antall lønsmottagere ( $N$ ).

Legg merke til alle klassene ikke behøver å ha samme bredde. Bredden til klassen [300, 400> er 100, mens klassebredden til [1000, 5000> er 4000.

### 7.1 Gjennomsnitt i klassedelt materiale

Fordi vi ikke kjenner alle verdiene i et klassedelt materiale, går det ikke an å finne en *nøyaktig* verdi for gjennomsnittet. Det beste vi kan gjøre er å anta at *alle* verdiene i en klasse er lik verdien *midt i klassen*. Da utvider vi tabellen og regner slik:

<b>Inntekt</b>	<b>Frekvens <math>f</math></b>	<b>Midtpunkt <math>x_m</math></b>	$x_m \cdot f$
[0, 100>	467	50	23350
[100, 200>	678	150	101700
[200, 300>	1490	250	372500
[300, 400>	2653	350	928550
[400, 500>	3785	450	1703250
[500, 750>	4106	625	2566250
[750, 1000>	987	875	863625
[1000, 5000>	45	3000	135000
	$N = 14211$		Sum = 6694225

Gjennomsnittet blir da  $6694225 : 14211 = 471$ , som tilsvarer 471 000 kr.



## 7.2 Median i klassedelt materiale

Heller ikke medianen er det mulig å finne nøyaktig i et klassedelt materiale. For å finne en tilnærmet verdi lager vi først en tabell som viser kumulativ frekvens:

Inntekt	Frekvens	Kumulativ frekvens
[0, 100>	467	467
[100, 200>	678	1145
[200, 300>	1490	2635
[300, 400>	2653	5288
[400, 500>	3785	9073
[500, 750>	4106	13179
[750, 1000>	987	14166
[1000, 5000>	45	14211
	$N = 14211$	

Hvis alle inntektene var ordnet i stigende rekkefølge, ville medianen være inntekten på plass nr.  $14212 : 2 = 7106$ . Vi ser av kolonnen med kumulativ frekvens at denne inntekten ligger i klassen [400,500>. For å beregne en best mulig verdi for medianen må vi anta at alle de 3785 inntektene i denne klassen ligger *jevnt fordelt* innenfor klassen.

## Eksamensoppgaver

### E1

(Eksamen vår 2010, Del 1)

I fjor kom alle elevene i en matematikkgruppe opp til eksamen i 2P. De oppnådde disse resultatene:

1, 6, 5, 4, 3, 2, 5, 5, 2, 4, 2, 2, 6, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 5

- 1) Lag en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens.
- 2) Finn medianen og gjennomsnittet for datamaterialet.

### E2

(Eksamen vår 2011, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange mål som ble scoret i fotballkampene mellom Rosenborg og Brann i Eliteserien i årene fra 2005 til 2009:

5 5 0 4 3 5 2 0 2 2

- 1) Finn gjennomsnittet og medianen for dette datamaterialet.
- 2) Sett opp resultatene i en tabell. Tabellen skal vise frekvens og kumulativ frekvens.
- 3) Hva er den kumulative frekvensen for to mål, og hva betyr dette?

### E3

(Eksamen vår 2016, Del 1)

Dato	Temperatur
01.03	2 °C
02.03	0 °C
03.03	-4 °C
04.03	-6 °C
05.03	2 °C
06.03	6 °C

Guro målte temperaturen utenfor hytta de første seks dagene i mars. Se tabellen ovenfor.

Bestem variasjonsbredden, gjennomsnittet og medianen for temperaturmålingene.

**E4**

(Eksamen høst 2012, Del 1)

Alle som går på tur til Pollfjell, skriver navnet sitt i boka som ligger i postkassen på toppen av fjellet. Nedenfor ser du hvor mange som har skrevet seg inn i boka hver uke de 12 siste ukene.

6 12 20 4 10 15 5 12 8 12 18 10

Bestem gjennomsnittet, medianen, typetallet og variasjonsbredden for dette datamaterialet.

**E5**

(Eksamen vår 2012, Del 1)

Antall datamaskiner	Antall elever
1	3
2	4
3	3
4	6
5	2
6	2

20 elever blir spurt om hvor mange datamaskiner de har hjemme. Se tabellen ovenfor. Finn variasjonsbredden, typetallet, medianen og gjennomsnittet.

**E6**

(Eksamen høst 2012, Del 2)

År	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Antall kamper per år	1	2	4	10	9	6	4	9	11	11	4
Antall mål per år	0	0	2	3	3	2	0	5	1	4	0

Tabellen ovenfor viser hvor mange landskamper Jan Åge Fjørtoft spilte, og hvor mange mål han skåret per år i perioden 1986–1996.

- Hvor mange mål skåret Fjørtoft i gjennomsnitt per kamp i denne perioden?  
I hvilket år skåret han flest mål per kamp?
- Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din, og fyll inn tallene som mangler.

Hva er den kumulative frekvensen for to mål per år, og hva forteller dette svaret?

Antall mål per år	Frekvens	Kumulativ frekvens
0		
1		
2		
3		
4		
5		

### E7

(Eksamen vår 2013, Del 2)

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013	
Parti	Antall representanter
Arbeiderpartiet	64
Fremskrittspartiet	41
Høyre	30
Sosialistisk Venstreparti	11
Senterpartiet	11
Kristelig Folkeparti	10
Venstre	2

a) Lag et sektordiagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

Stortinget ved starten av perioden 2009–2013		
Parti	Antall kvinner	Antall menn
Arbeiderpartiet	32	32
Fremskrittspartiet	10	31
Høyre	9	21
Sosialistisk Venstreparti	3	8
Senterpartiet	7	4
Kristelig Folkeparti	4	6
Venstre	2	0

b) Lag et passende diagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.


### E8

(Eksamen høst 2008, Del 2)

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

- Finns gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.
- Finns variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.
-  Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

### E9

(Eksamen høst 2010, Del 2)

I klasse 1A er det 12 jenter og 12 gutter. Nedenfor ser du hvor mange timer de bruker på lekser hver uke.

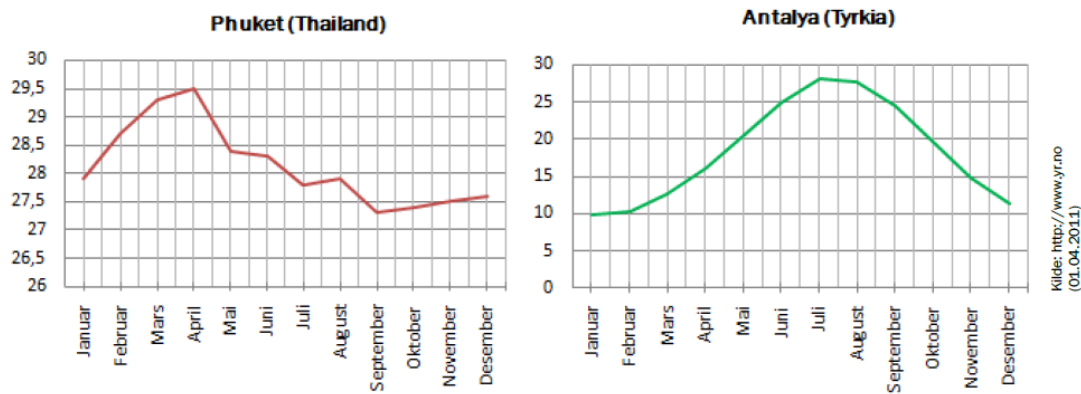
Jentene: 7, 5, 5, 7, 7, 6, 8, 8, 5, 4, 6, 10

Guttene: 2, 5, 6, 7, 9, 6, 4, 9, 12, 2, 13, 3

Bruk ulike sentral- og spredningsmål og gjør rede for hva dette datamaterialet viser om jentenes og guttenes arbeidsvaner i denne klassen.

### E10

(Eksamen vår 2012, Del 2)



Ovenfor ser du linjediagram som viser gjennomsnittstemperaturen per måned ved to kjente feriesteder.

- a) Bruk diagrammene og lag en tabell som viser gjennomsnittstemperaturen per måned for hvert av de to stedene Phuket og Antalya.
- b)
  - 1) Finn gjennomsnittstemperaturen per år for hvert av de to stedene.
  - 2) Finn standardavviket for temperatuene i a) for hvert av de to stedene.

Jon påstår at det er godt samsvar mellom diagrammene og resultatene fra b).

Asbjørn er enig, men mener at diagrammene lett kan tolkes feil.

- c) 🤔 Forklar hvorfor diagrammene lett kan tolkes feil.  
Hvordan kunne diagrammene vært laget for å unngå dette?



### E11

(Eksamen vår 2011, Del 1)

Ved en skole er det 120 elever. Elevrådet skal arrangere aktivitetsdag, og elevene kan melde seg på én av fire turer.

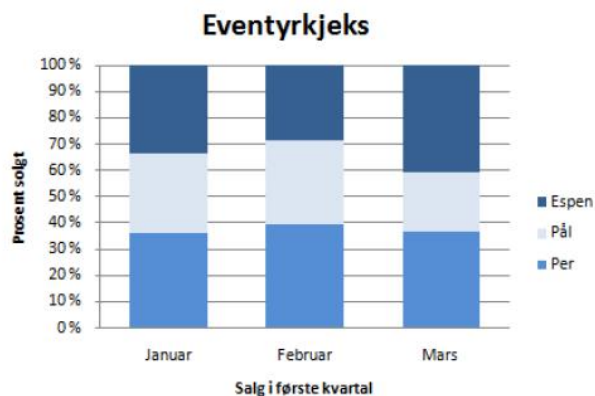
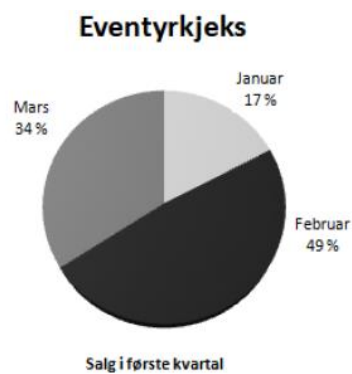
Elevene fordeler seg slik:

Tur	Antall elever
Tur 1 (Robåt)	15
Tur 2 (Sykkel)	30
Tur 3 (Høgfjell, kort løype)	40
Tur 4 (Høgfjell, lang løype)	35

Gjør beregninger og lag et sektordiagram som viser fordelingen. Det skal gå klart fram hvor mange grader hver av sektorene i diagrammet er på.

### E12

(Eksamen høst 2011, Del 1)



Per, Pål og Espen selger pakker med Eventyrkjeks. Diagrammene ovenfor viser resultater fra

første kvartal 2011.

- a) Bruk opplysningene i tabellen nedenfor til å lage tilsvarende diagrammer for andre kvartal 2011.

Salg i andre kvartal			
	April	Mai	Juni
Per	225	90	450
Pål	675	180	450
Espen	0	630	900

- b) Lag et diagram for andre kvartal som viser hvor mange pakker med Eventyrkjeks hver av de tre guttene solgte hver måned.

### E13

(Eksamen vår 2010, Del 2)

År	Antall laks	Totalvekten av laksen (kg)	Gjennomsnittsvekten for laksen (kg)
2000	3447	14550	4,22
2001	5694	24218	4,25
2002	3142	1)	5,51
2003	4401	22425	5,10
2004	2928	17979	2)
2005	5783	28144	4,87
2006	6507	26695	4,10
2007	3555	21074	5,93
2008	4782	28903	6,04
2009	3916	24361	6,22

Tabellen ovenfor viser hvor mange laks, totalvekten av laksen og gjennomsnittsvekten for

laksen som er fanget i elva Gaula i Sør-Trøndelag de siste ti årene.

- Hvilke tall skal stå i tabellfeltene som er merket 1) og 2)?
- Lag et passende diagram som viser hvor mange laks som er fanget i Gaula per år de siste ti årene.
- Finn gjennomsnittet av og standardavviket for totalvekten av laksen fanget i Gaula per år de siste ti årene.

### E14

(Eksamen høst 2011, Del 2)

- Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for tallmengden:

2 5 21 15 17 5 9 19 10 14 7 3 2 11 13

Vi dobler alle tallene i tallmengden og får:

4 10 42 30 34 10 18 38 20 28 14 6 4 22 26


- Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for denne tallmengden. Sammenlikn med resultatene fra a) og kommenter.

Berit får en idé og setter opp tabellen nedenfor.

Tallmengde 1 15 tall	2	5	21	15	17	5	9	19	10	14	7	3	2	11	13
Tallmengde 2 De 15 tallene doblet	4	10	42	30	34	10	18	38	20	28	14	6	4	22	26
Tallmengde 3 De 15 tallene tredoblet	6	15	63	45	51	15	27	57	30	42	21	9	6	33	39
Tallmengde 4 De 15 tallene firedoblet	8	20	84	60	68	20	36	76	40	56	28	12	8	44	52





















Hun beregner median, gjennomsnitt og standardavvik for hver av tallmengdene og påstår at hun har funnet regler som sier noe om hvordan medianen, gjennomsnittet og standardavviket

endrer seg når tallene i en tallmengde doubles, tredobles, firedobles osv.

- c)  Formuler disse reglene, og gi en begrunnelse for at de er riktige.

## E15


(Eksamen høst 2012, Del 2)

Nr	Resultat	Utøver	Land	Verdensdel
1	8,47	Christian Reif	 Tyskland	Europa
2	8,46	Dwight Phillips	 USA	Nord-Amerika
3	8,40	Fabrice Lapierre	 Australia	Oceania
4	8,35	Alain Bailey	 Jamaica	Sør-Amerika
5	8,33	Chris Noffke	 Australia	Oceania
6	8,30	Irving Saladino	 Panama	Sør-Amerika
7	8,27	Ndiss Kaba Badji	 Senegal	Afrika
8	8,27	Eusebio Cáceres	 Spania	Europa
9	8,25	Pavel Shalin	 Russland	Europa
10	8,24	Salim Sdiri	 Frankrike	Europa
11	8,24	Kafétien Gomis	 Frankrike	Europa
12	8,23	Godfrey Khotso Mokoena	 Sør-Afrika	Afrika
13	8,23	Christopher Tomlinson	 England	Europa
14	8,22	Tommi Evilä	 Finland	Europa
15	8,22	Tyrone Smith	 Bermuda	Sør-Amerika
16	8,22	Greg Rutherford	 England	Europa
17	8,21	Morten Jensen	 Danmark	Europa
18	8,20	Wilfredo Martínez	 Cuba	Sør-Amerika
19	8,20	Trevell Quinley	 USA	Nord-Amerika
20	8,19	Christian Taylor	 USA	Nord-Amerika

Ovenfor ser du verdensstatistikken fra 2010 for øvelsen lengdehopp for menn.

- Lag et sektordiagram som viser hvordan de 20 utøverne fordeler seg mellom de ulike verdensdelene.
- Finn gjennomsnittslengden og standardavviket for resultatene til de 20 utøverne.

Sondre har funnet resultatene for utøverne som står som nummer 21–40 på verdensstatistikken. Standardavviket for resultatene til disse 20 utøverne er tilnærmet lik 0,0258.

- c)  Hva forteller dette om resultatene til utøverne som står som nummer 21–40, i forhold til resultatene til de 20 beste utøverne?

## E16

Eksamen vår 2012, Del 2)

En dag gjorde klasse 1A et forsøk i naturfagtimen. Seks elever slapp hver sin stålkule fra 1 m høyde og målte tiden det tok før kule traff bakken. Resultatene ser du i tabellen nedenfor.

Elev	1	2	3	4	5	6
Tid (sekunder)	0,46	0,45	0,47	0,44	0,52	0,46

a) Bestem gjennomsnittet og standardavviket for måleresultatene.

Klassen la merke til at elev nummer 5 målte en større falltid enn de andre. Mange mente at dette resultatet måtte skyldes målefeil, og at det derfor burde forkastes.

Da ga fysikklærer Strøm dem denne regelen:

«Når vi har seks målinger, kan vi forkaste et måleresultat dersom det ligger mer enn 1,4 standardavvik fra gjennomsnittet.»

- b) 🤔 Finn ut om måleresultatet til elev nummer 5 kan forkastes dersom vi bruker regelen ovenfor.
- c) 🤔 Bestem gjennomsnittet og standardavviket for de fem andre måleresultatene. Hvordan har gjennomsnitt og standardavvik endret seg? Virker dette rimelig? Forklar.

## E17

(Eksamen vår 2013, Del 1)

En kveld kjørte en taxisjåfør 10 turer.

Nedenfor ser du hvor mange passasjerer han hadde med på hver av turene.

1 5 3 3 5 2 1 4 1 2

- a) Bestem medianen, gjennomsnittet og typetallet for dette datamaterialet.
- b) Sett opp en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens for antall passasjerer på turene.

## E18

(Eksamen vår 2013, Del 2)

Tabellene nedenfor viser resultatene for de åtte beste utøverne på 1500 m skøyter for menn under OL i 1968 og under OL i 2010.

OL 1968

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Kees Verkerk	 Nederland	123,4
2	Ivar Eriksen	 Norge	125,0
2	Ard Schenk	 Nederland	125,0
4	Magne Thomassen	 Norge	125,1
5	Johnny Höglin	 Sverige	125,2
6	Bjørn Tveter	 Norge	125,2
7	Svein-Erik Stiansen	 Norge	125,5
8	Eduard Matusevitsj	 Sovjetunionen	126,1

OL 2010

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Mark Tuitert	 Nederland	105,57
2	Shani Davis	 USA	106,10
3	Håvard Bøkko	 Norge	106,13
4	Ivan Skobrev	 Russland	106,42
5	Mo Tae-bum	 Korea	106,47
6	Chad Hedrick	 USA	106,69
7	Simon Kuipers	 Nederland	106,76
8	Mikael Flygind Larsen	 Norge	106,77

- Hvor mange prosent sank vinnertiden med fra 1968 til 2010?
- Bestem gjennomsnittstiden for de åtte beste i 1968 og for de åtte beste i 2010.
- Bestem standardavviket for de to tallmaterialene.  
Hvorfor er standardavviket større i 1968 enn i 2010?

## E19

(Eksamen vår 2011, Del 1)

I en 2P-gruppe er det 10 elever. Læreren har undersøkt hvor mye tid elevene bruker på matematikkleksene i løpet av en uke.

Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Antall minutter	Antall elever
$[0,30)$	1
$[30,60)$	3
$[60,120)$	5
$[120,240)$	1

Finn gjennomsnittet for dette grupperte datamaterialet.

### E20

(Eksamen høst 2012, Del 1)

Tabellen nedenfor viser hvor mye penger hver av de 10 elevene i en 2P-gruppe bruker i kantinen i løpet av en uke.


Kroner	Antall elever
$[0,50)$	1
$[50,100)$	5
$[100,150)$	1
$[150,200)$	3


Gjør beregninger og avgjør om gjennomsnittet er større enn medianen for dette datamaterialet.

### E21

(Eksamen vår 2011, Del 2)

Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene.

Fartsgrense 50 km/h 	
Fart	Antall biler
$[45,50)$	25
$[50,55)$	26
$[55,60)$	23
$[60,65)$	3
$[65,70)$	2
$[70,75)$	1

Fartsgrense 80 km/h 	
Fart	Antall biler
$[70,75)$	7
$[75,80)$	43
$[80,85)$	17
$[85,90)$	8
$[90,95)$	0
$[95,125)$	5

a) Presenter dataene fra tabellene ovenfor i hvert sitt stolpediagram.

- b) 🤔 Hvor mange prosent av bilførerne kjører 10 % eller mer over fartsgrensen i hver av de to kontrollene?
- c) Finn gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.
- d) Hvor mange prosent over fartsgrensen er gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene?
- e) 🤔 Bruk svarene i a), b), c) og d) til å vurdere om bilførerne kjører mest lovlydig på veistrekningen med fartsgrense 50 km/h eller på veistrekningen med fartsgrense 80 km/h.

### E22

(Eksamen vår 2012, Del 1)

Nedenfor ser du hvor mange tekstmeldinger hver av de 20 elevene i en 2P-gruppe sendte i løpet av en uke:

4 88 69 21 66 8 16 57 86 21 37 22 78 27 28 44 42 71 82 95

- 1) Grupper datamaterialet i klasser med bredde 20. La den første klassen starte med 0.

I hvilken klasse ligger medianen?

- 2) Finn gjennomsnittet i det klassesdelte materialet.

### E23

(Eksamen vår 2013, Del 1)

Tabellen nedenfor viser inntektene til personene i et borettslag.

Inntekt (i 1000 kroner)	Antall personer
[300, 400)	20
[400, 500)	20
[500, 700)	10

Bestem gjennomsnittsinntekten til personene i borettslaget.



**E24**

(Eksamen høst 2011, Del 1)

Politiet har gjennomført en fartskontroll i 30 km-sonen utenfor skolen.

Resultatene er gitt i tabellen nedenfor.

Fart (km/h)	Antall biler
$[20,30)$	20
$[30,40)$	20
$[40,50)$	10



Finn gjennomsnittsfarten.

**E25**

(Eksamen vår 2008, Del 2)

Et nytt leilighetskompleks, UTSIKTEN, er fylt opp med nye beboere. En oversikt viser følgende aldersfordeling:

Alder	0–19 år	20–39 år	40–59 år	60–79 år
Frekvens	17	29	51	23

- Hvor mange personer bor i leilighetskomplekset?
- Tegn et søylediagram som viser aldersfordelingen.
- Forklar hvorfor medianen må ligge i intervallet 40–59 år.
- Regn ut gjennomsnittsalderen ut fra det klassesdelte materialet.

**E26**

(Eksamen 2P-Y vår 2015, Del 1)

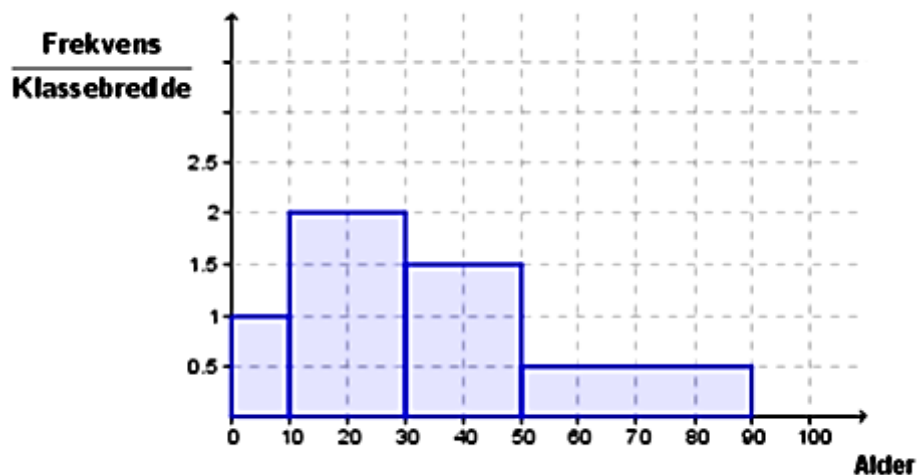
Alder	Frekvens
[20,30)	10
[30,40)	20
[40,50)	30
[50,70)	40

Tabellen over viser aldersfordelingen for lærerne ved en skole.

- Bestem gjennomsnittsalderen for lærerne ved skolen.
- Lag et histogram som viser aldersfordelingen for lærerne.
- Utvid tabellen med en kolonne som viser relativ frekvens og en kolonne som viser kumulativ frekvens

**E27**

(Eksamen 2P-Y høst 2014, Del 1)



Histogrammet ovenfor viser aldersfordelingen blant de besøkende på en kinoforestilling.

- Forklar at det var 30 besøkende mellom 30 og 50 år.
- Hvor mange prosent av de besøkende var mellom 0 og 10 år?
- Bestem gjennomsnittsalderen blant de besøkende.

## Fasit

### Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 4 4,9

Oppgave 5 a) Nei b) Ja

Oppgave 6 a) 33 b) 108 c) 3,3

Oppgave 7 a) 2 b) 1,5

Oppgave 8 4

Oppgave 9 3,8

### Fasit eksamensoppgaver

E1. 2) 4 3,75

E2. 1) 2,8 2,5

E3. Variasjonsbredde: 12 °C Gjennomsnitt: 0 °C Median: 1 °C

E4. 11, 11, 12, 16

E5. 5, 4, 3,5, 3,3

E6 a) 0,28 1993

E8. a) 5,17, 5,28, 5,61, 5,69 b) 1,82, 0,56, 0,79, 0,22

E9. Jenter: Median 6,5 Gjennomsnitt 6,5 Variasjonsbredde 6 Standardavvik 1,6

Gutter: Median 6 Gjennomsnitt 6,5 Variasjonsbredde 11 Standardavvik 3,5

E13. a) 17312 6,14 c) 22566 4576

E14. a) 10 10,2 5,99 b) 20 20,4 11,98

E15. b) 8,275 0,082

E16 a) 0,467 0,026 b) Ja c) 0,456 0,010

E17. a) 2,5 2,7 1

E18. a) 14,4 % b) 125,06 106,36 c) 0,71 0,39

E19. 78 min

E20. Gjennomsnitt 105 kr, median 95 kr.

E21. b) ca. 36,3 %, ca. 10,3 % c) ca. 53,4 km/h, ca. 81,2 km/h d) ca. 6,8 %, ca. 1,4 %

E22. 1) [40, 60> 2) 50

E23. 440 000 kr

E24 33 km/h

E25. a) 120 d) 43,3 år

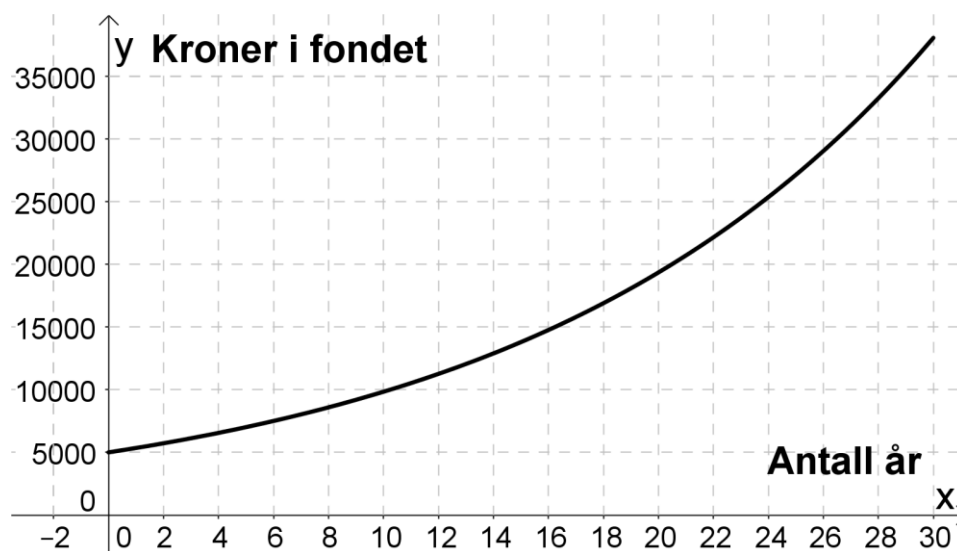
E26. a) 47 c) Relativ f: 10 %, 20 %, 30 %, 40 %. Kumulativ f: 10,30,60,100

E27. a) Arealet til søylene tilsvarer frekvensen.  $A = 20 \cdot 1,5 = 30$ . b) 10 %. c) 34,5 år

## Kapittel 5. Funksjoner

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser. I dette kapitlet skal vi se nærmere på to typer funksjoner, lineære og eksponentielle.

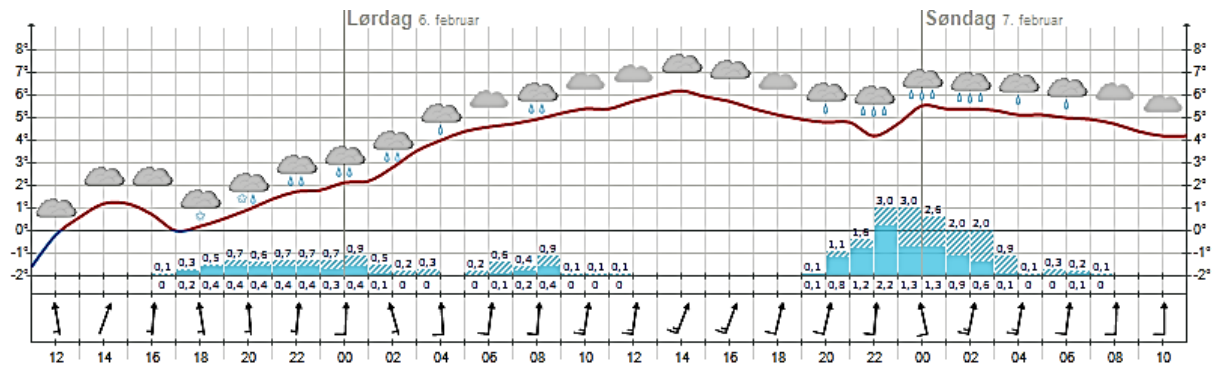
- Hvordan vi skal tolke grafer
- Hva som kjennetegner lineær vekst
- Hva som kjennetegner eksponentiell vekst
- Framstille funksjoner ved hjelp av tekst, formel, verditabell og graf.
- Finne gjennomsnittlig og momentan vekstfart
- Tolke svarene i praktiske situasjoner



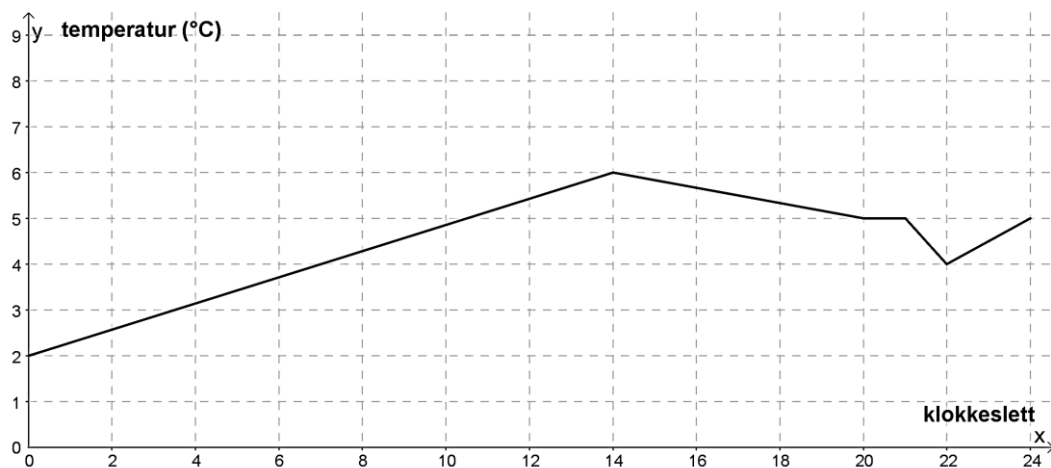
# 1. Graftolkning

En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.

Under ser du en grafisk fremstilling av været på Tveita noen dager i februar, hentet fra yr.no. Hvilken informasjon kan denne gi oss?



Vi tar et utsnitt av grafen og lager en **forenklet** fremstilling av temperaturutviklingen den 6. februar.



a) Når er temperaturen på sitt høyeste? \_\_\_\_\_

Hva er temperaturen da? \_\_\_\_\_

b) Når er temperaturen på sitt laveste? \_\_\_\_\_

Hva er temperaturen da? \_\_\_\_\_

c) Hva er temperaturen kl. 20? \_\_\_\_\_

d) Når avtar (synker) temperaturen *raskest* per time? Hvordan ser vi det?

\_\_\_\_\_

## 2. Lineære funksjoner

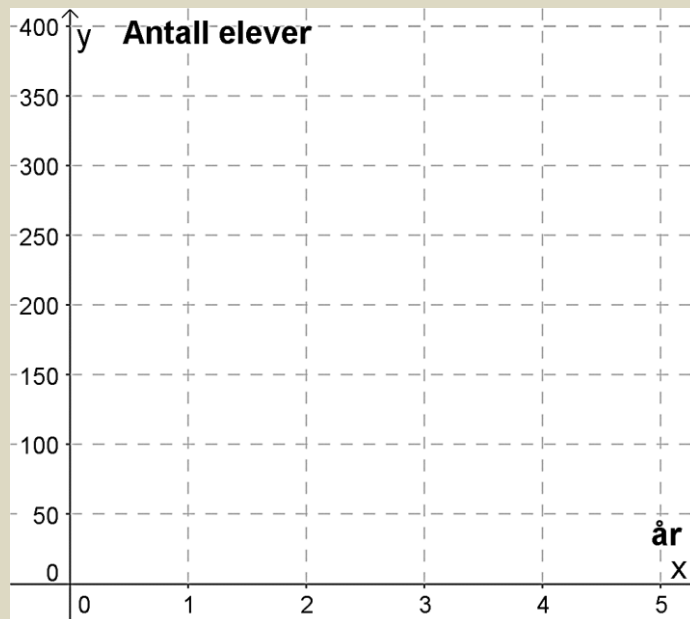
I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

### Oppgave 1

Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

- a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? \_\_\_\_\_
- b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? \_\_\_\_\_
- c) Hvor mange elever er det ved skolen om 4 år? \_\_\_\_\_
- d) Merk av elevtallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet under:

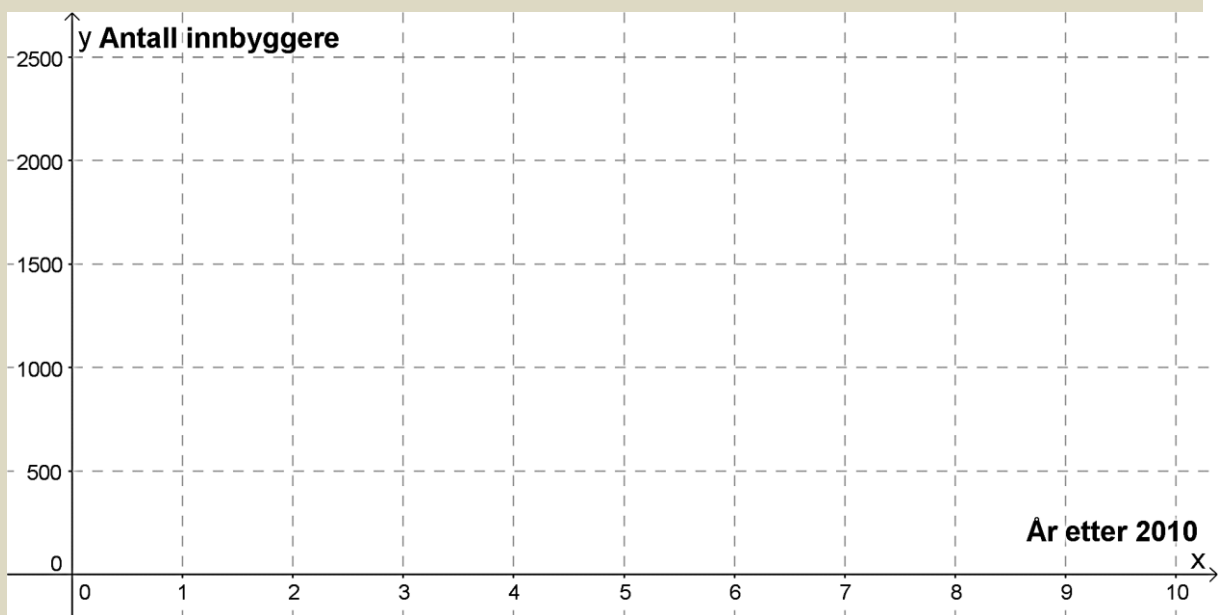


- e) Legg merke til at de tre punktene ligger på en rett linje, og tegn linja som går gjennom punktene.
- f) Når vil elevtallet ved skolen passere 300 dersom denne utviklingen fortsetter?

## Oppgave 2

I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Årene etterpå har antall innbyggere avtatt (gått ned) med 250 per år.

- Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2012? \_\_\_\_\_
- Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2015? \_\_\_\_\_
- Hvis vi regner med at utviklingen vil fortsette, hvor mange innbyggere vil det være i bygda i 2020? \_\_\_\_\_
- Merk av innbyggertallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet



- Legg merke til at de tre punktene ligger langs en rett linje og tegn linja gjennom punktene.

Grafene i oppgave 1 og oppgave 2 viser begge lineær vekst.

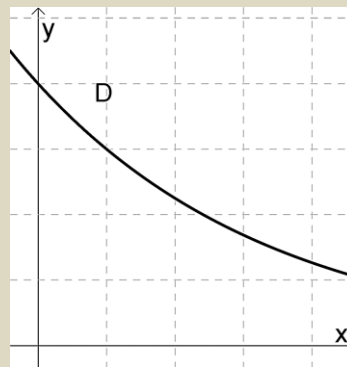
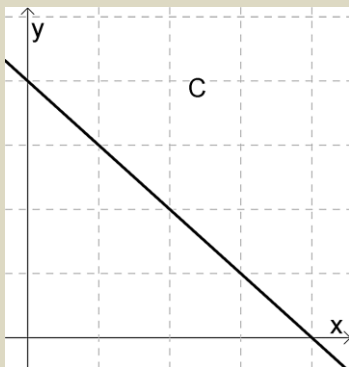
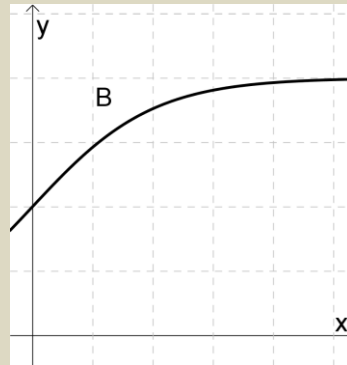
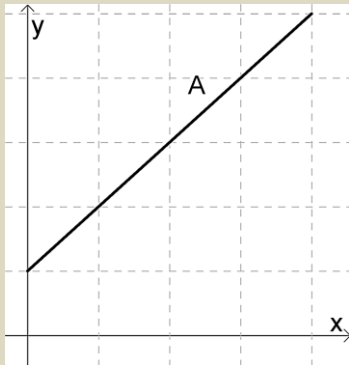
- Hva er likt?
- Hva er forskjellig?

Den grafiske tolkningen av lineær vekst er en **rett linje**.

Ved lineær vekst er **veksten lik** per enhet. Vi kan både ha positiv vekst (noe øker) og negativ vekst (noe avtar)

### Oppgave 3

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser lineær vekst.



a) Forklar hvilke(n) graf(er) som viser lineær vekst, og begrunn svaret.

---

---

---

---

---

b) Beskriv en praktisk situasjon som passer til de(n) grafen(e) som viser lineær vekst.



## Oppgave 4

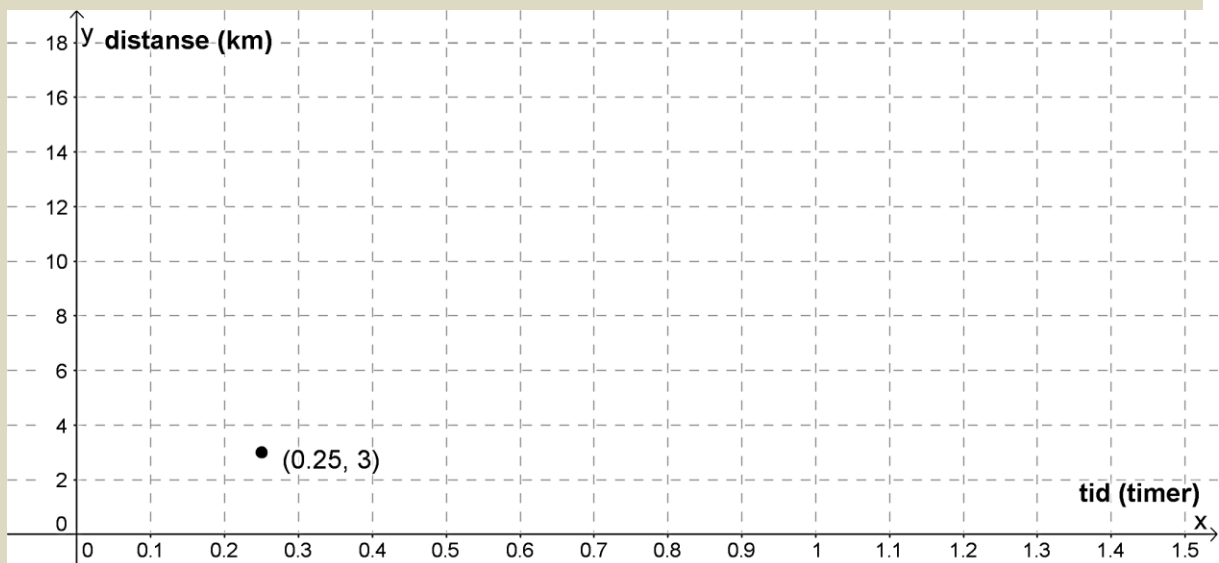
Vi løper på tredemølle med jevn fart 12 km/t og vil finne ut hvor langt vi løper dersom vi holder denne farten

- a) Fyll ut resten av tabellen under og merk av avstandene som punkter i koordinatsystemet.

$x$ (tid (timer))	$f(x)$ (distanse (km))
0,25	3
0,5	
1	
1,5	

- b) Hvorfor viser denne situasjonen lineær vekst?
- \_\_\_\_\_

- c) Merk av punktene i koordinatsystemet og trekk en rett linje gjennom dem.



- d) Bruk grafen til å finne ut omtrent hvor lenge du må løpe for å ha løpt 10 km
- \_\_\_\_\_

- e) Hvor langt løper du i løpet av en time?
- \_\_\_\_\_

## 2.1 Praktisk tolkning av en lineær funksjon

Alle lineære funksjoner har

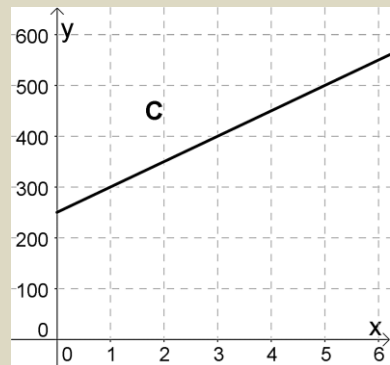
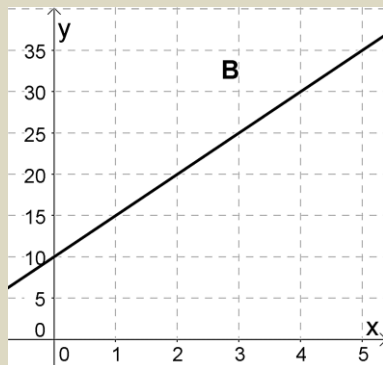
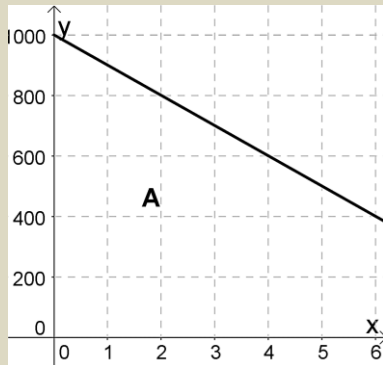
- **konstantledd** (der grafen skjærer y-aksen)
- **stigningstall** (hvor mye funksjonsverdien øker med når x-verdien øker med 1)

Som regel kaller man konstantleddet  $b$  og stigningstallet  $a$ . ( $a$  og  $b$  står for tall).

Uttrykket til en lineær funksjon kan da alltid skrives som  $f(x) = a \cdot x + b$  eller  $f(x) = b + a \cdot x$

### Oppgave 5

- a) Hva er konstantleddet og stigningstallet til funksjonene i grafene under?
- b) Hva er uttrykket til hver av funksjonene i grafene under?



**A:**  $a =$  \_\_\_\_\_

**B:**  $a =$  \_\_\_\_\_

**C:**  $a =$  \_\_\_\_\_

$b =$  \_\_\_\_\_

$b =$  \_\_\_\_\_

$b =$  \_\_\_\_\_

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

Det er interessant å vite uttrykket til en lineær funksjon fordi det gir oss informasjon om hva funksjonen beskriver. Vi skal nå finne uttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2:

### Eksempel 1

1) Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

Antall elever totalt vil være  $150 + \text{endringen}$ .

Endringen er  $+25$  hvert år, altså  $25 \cdot \text{antall år}$ .

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med  $x$

Antall elever etter  $x$  år er gitt ved funksjonen  $f(x) = 150 + 25 \cdot x$

1) I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Hvert år siden da har antall innbyggere avtatt (sunket) med 250.

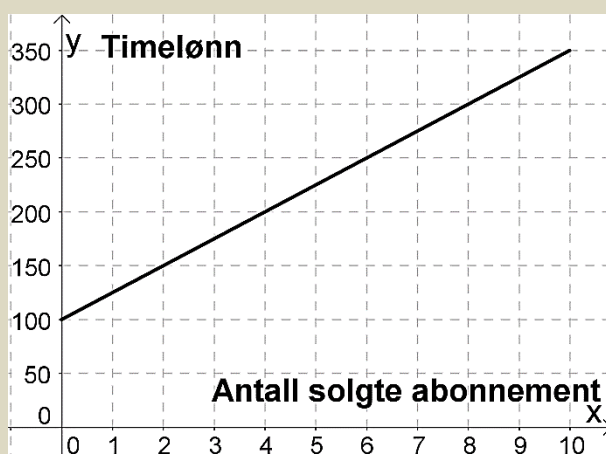
Antall innbyggere totalt vil være  $2500 + \text{endringen}$

Endringen her er negativ (blir færre),  $-250$  hvert år, altså  $-250 \cdot \text{antall år}$

Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden, erstatter vi «antall år» med  $x$

Antall innbyggere etter  $x$  år er gitt ved funksjonen  $f(x) = 2500 - 250 \cdot x$

### Oppgave 6



Emma arbeider som telefonselger.

Timelønna hennes er delvis provisjonsbasert, dvs at hun får et fast beløp hver time, i tillegg til en bestemt sum per abonnement hun selger.

Bestem uttrykket til funksjonen.

---

Hva sier uttrykket om lønna til Emma?

## Oppgave 7

En fotobedrift selger album med bilder.

Prisen på albumet med  $x$  antall bilder er gitt ved funksjonen  $P(x) = 100 + 20x$ .

Hva er prisen på albumet (uten bilder)? \_\_\_\_\_

Hva er prisen for ett bilde? \_\_\_\_\_

Hvor mye vil et album med 10 bilder koste? \_\_\_\_\_

## 3. Eksponentielle funksjoner

I praksis kan det være lett å blande eksponentiell og lineær vekst, et mål er derfor å kunne avgjøre når veksten er eksponentiell og når den er lineær.

### «Ja, Nei, Hvorfor?»

Timelønna til Peter er 200 kr. Han får to ulike tilbud om lønnsøkning:

**Tilbud A: 10 % etter 6 måneder, deretter nye 10 % etter 12 måneder.**

**Tilbud B: 20 kr etter 6 måneder, deretter nye 20 kr etter 12 måneder**

Vil Peter ha den samme lønna etter 12 måneder uavhengig av hvilket tilbud han velger?

### Eksempel 2

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Hvor mye er det på konto etter 1 år? Etter 2 år? Hvorfor blir økningen forskjellig disse årene?

Etter 1 år vil si at 10000 kr har økt med 5 %. 1 % av 10000 kr er  $\frac{10000}{100} = 100$  kr. 5 % er da  $100 \cdot 5 = 500$ . Etter 1 år er det  $10000 + 500 = 10500$  kroner i fondet.

Etter 2 år vil si at 10500 kr har økt med 5 %. 1 % av 10500 kr er  $\frac{10500}{100} = 105$  kr. 5 % er da  $105 \cdot 5 = 525$ . Etter 2 år er det  $10500 + 525 = 11025$  kroner i fondet.

Det første året øker fondet med 500 kr, det andre året øker fondet med 525 kr. Økningen er altså større det andre året, fordi tallet vi regner 5 % av er større.

### Oppgave 8

Ved en skole er det 1000 elever. Antallet elever **vokser** med omtrent 10 % hvert år.

- a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? \_\_\_\_\_
- b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? \_\_\_\_\_
- c) Hvorfor er endringen eksponentiell? \_\_\_\_\_

### Oppgave 9

- a) En flatskjerm koster 10 000 kr. Vi antar at verdien **avtar** med 10 % hvert år.
- b) Hva er verdien til flatskjermen etter 1 år? \_\_\_\_\_
- c) Hva er verdien til flatskjermen etter 2 år? \_\_\_\_\_
- d) Hvorfor er endringen eksponentiell? \_\_\_\_\_

### Oppgave 10

Tabellen under viser økningen i antall treningstimer til en svømmer fra hun er 15 til hun er 20 år.

- a) Regn ut økningen i antall timer fra et år til det neste, fyll inn i tabellen
- b) Regn ut økningen i prosent fra et år til det neste, fyll inn i tabellen
- c) Er økningen i antall treningstimer eksponentiell? Begrunn svaret.

Alder	15	16	17	18	19	20
Timer	500	550	605	665	730	803
Økning i timer						
Økning i prosent						

Ved eksponentiell vekst er endringen **prosentvis lik** per enhet.

### 3.1 Uttrykket til eksponentielle funksjoner

Fra kapitlet om prosent og oppgavene over ser vi at verdien alltid endrer seg med samme prosent fra en periode til den neste når veksten er eksponentiell. Da kan vi skrive verdien etter  $x$  år som ett regnestykke, vi uttrykket til eksempel 2:

#### Eksempel 3

Vekstfaktoren er  $100\% + 5\% = 105\% = \frac{105}{100} = 1,05$

Startverdi: 10000

Uttrykk for verdi etter 1 år:  $10000 \cdot 1,05$

Verdien etter 2 år:  $10000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 10000 \cdot 1,05^2$

Verdien etter 3 år:  $10000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 10000 \cdot 1,05^3$

Verdien etter  $x$  år:  $10000 \cdot \underbrace{1,05 \cdot 1,05 \cdot \dots \cdot 1,05}_{x \text{ antall år}} = 10000 \cdot 1,05^x$

Uttrykk for eksponentiell vekst: **Startverdi** · **Vekstfaktor**<sup>antall perioder</sup>

#### Oppgave 11

Skriv opp uttrykket for antallet elever om  $x$  år ved skolen i oppgave 8

---

#### Oppgave 12

Skriv opp uttrykket for verdien til flatskjermen om  $x$  år i oppgave 9

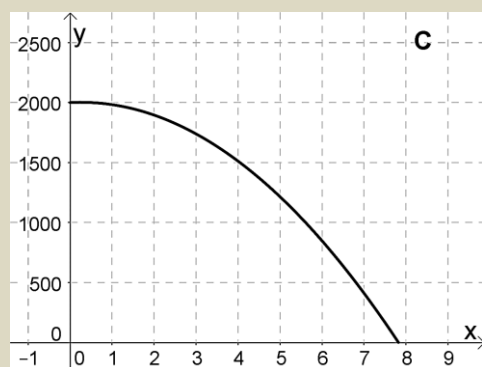
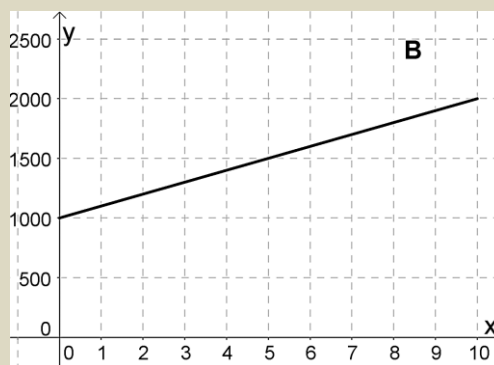
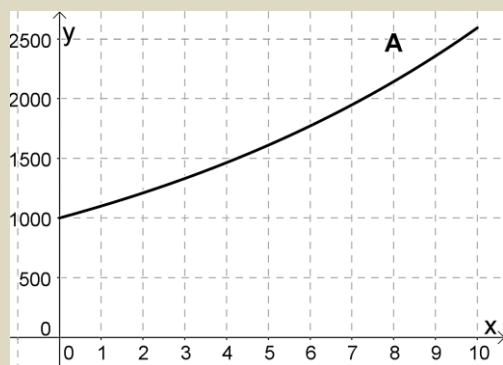
---

## 3.2 Grafen til eksponentielle funksjoner

Hvordan ser grafen ut til noe som vokser eller avtar med samme prosent?

### Oppgave 13

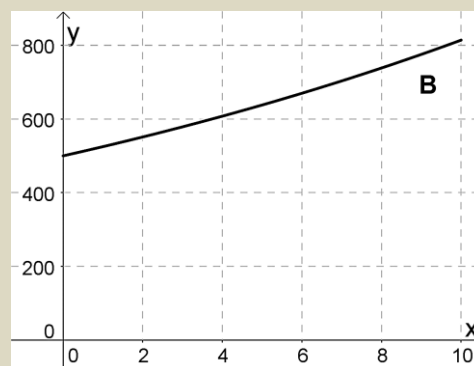
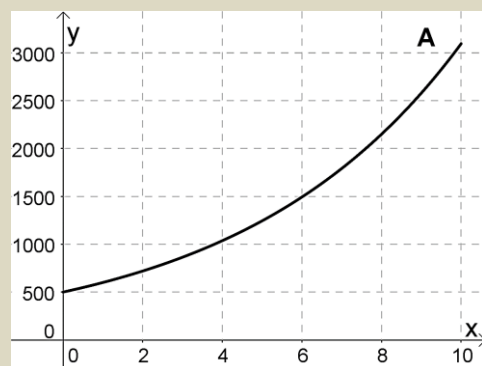
Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser eksponentiell vekst.



Forklar hvorfor grafen(e) viser eksponentiell vekst

### Oppgave 14

Hvilken graf nedenfor er grafen til funksjonen  $f(x) = 500 \cdot 1,20^x$ ? Begrunn svaret



## 4. Polynomfunksjoner

“Polynom” betyr “flere ledd”. En polynomfunksjon består av en sum av potenser av  $x$ . Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  kalles en *andregradsfunksjon*

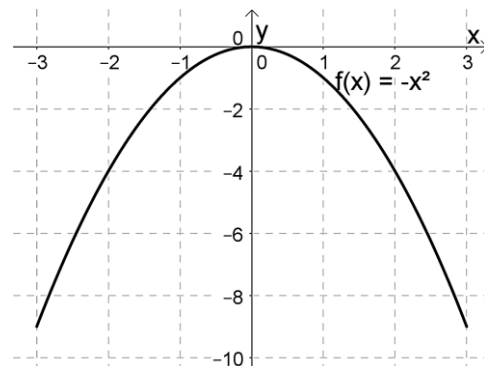
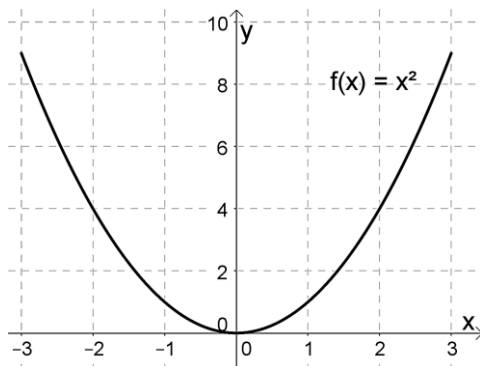
Polynomfunksjonen  $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$  kalles en *tredjegradsfunksjon*.

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene  $f$  og  $g$  ovenfor.

### 4.1 Grafen til en polynomfunksjon

En polynomfunksjon av grad 2 (=andregradsfunksjon) vil alltid ha et toppunkt eller et bunnpunkt, under ser du grafen til funksjonene  $f(x) = x^2$  og  $g(x) = -x^2$ .

Hva er likt og hva er forskjellig med disse grafene? Hvorfor er det slik?





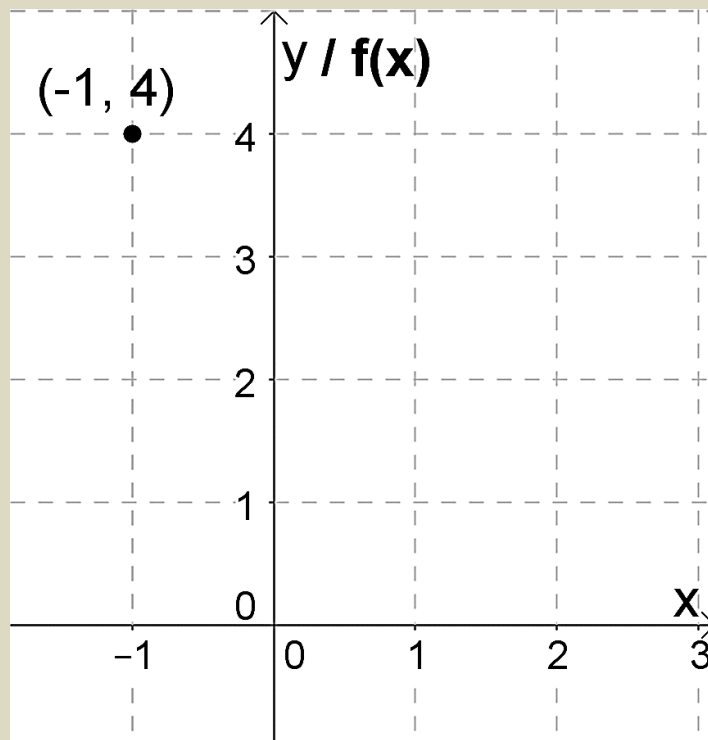
### Oppgave 15

Funksjonen  $f$  er gitt ved  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ .

- a) Hva kan vi si om hvordan grafen vil se ut før vi tegner den?
- b) Gjør utregninger og fyll ut resten av tabellen:

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4				

- c) Marker resten tallene fra tabellen som punkter i koordinatsystemet og tegn grafen.



## 4.2 Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

### Eksempel 4

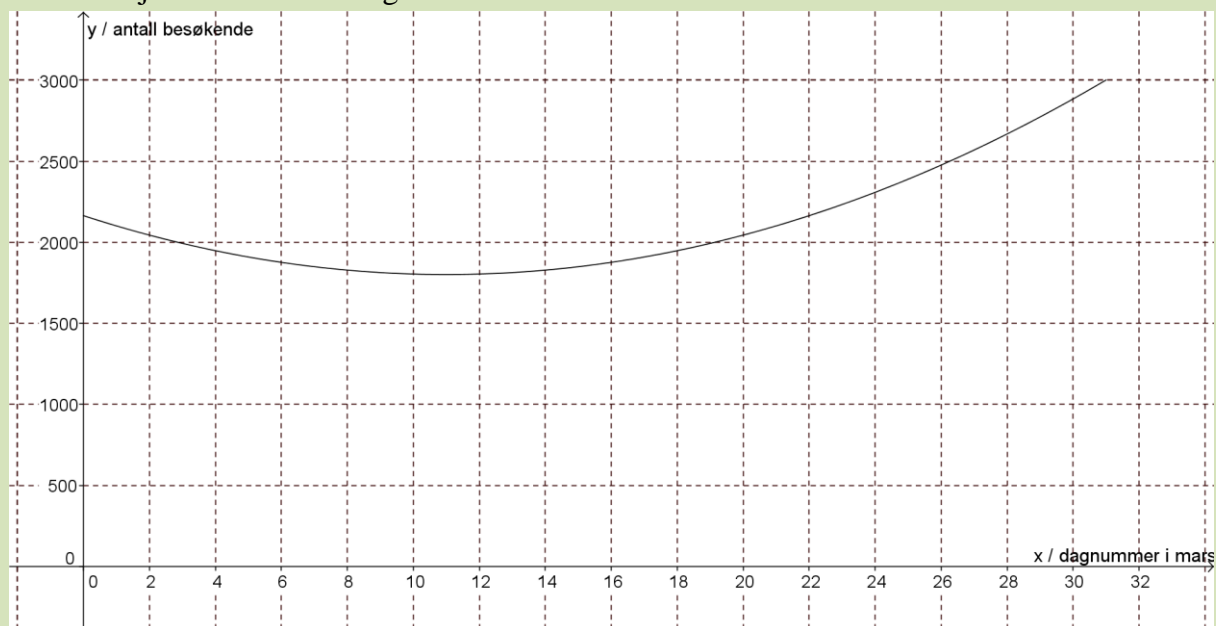
Funksjonen  $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$  er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret  $x$  i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.

Tegn grafen til funksjonen når  $x$  ligger mellom 1 og 31.

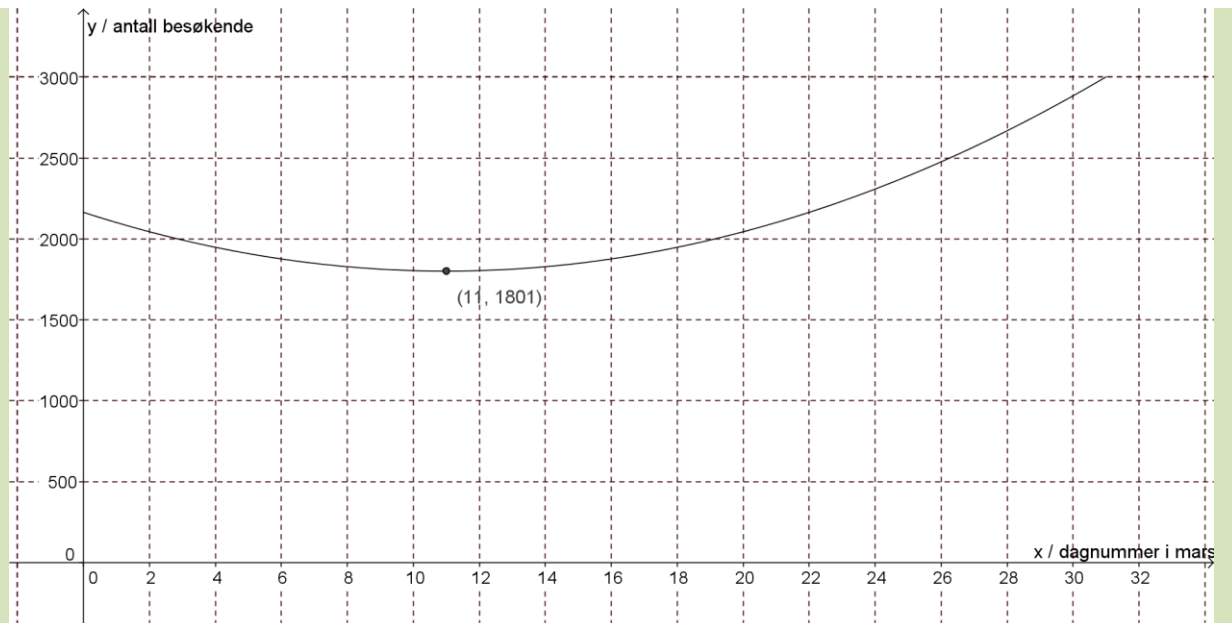
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon[ $3x^2 - 66x + 2164, 0, 31$ ]**. Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra  $x = 0$  til  $x = 31$ . Så skriver vi en passende tekst på aksene.

Etter å ha justert aksene skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet  $f(x)$ . For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt[f]**.



Vi ser at det var færrest besøkende for  $x = 11$ , altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

### Oppgave 16

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen  $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$ , der  $x$  er prisen på en enhet av varen i kroner.

- Tegn grafen. La  $x$  ligge mellom 0 og 100.
- For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

### Oppgave 17

Funksjonen  $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$  beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune  $x$  år etter år 2000.  $x = 0$  er altså år 2000,  $x = 1$  er år 2001 osv.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.  
*Her må du altså la  $x$  ligge mellom 0 og 13.*
- Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

## 4.3 Nullpunkt

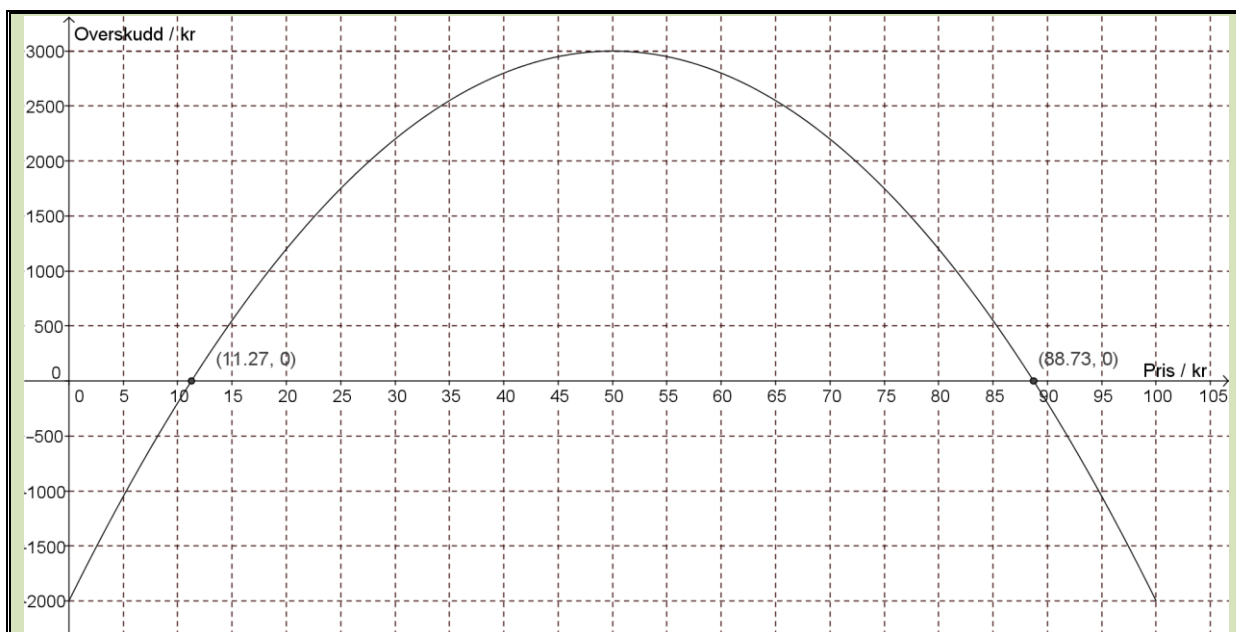
Et punkt der grafen til en funksjon treffer  $x$ -aksen kalles et *nullpunkt* til funksjonen. I et slikt punkt er funksjonsverdien lik null.

Vi ser først på hvordan vi finner nullpunkter i Geogebra.

### Eksempel 5

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 1. Først taster vi inn funksjonen:

**Funksjon**[-2x^2+200x-2000,0,100]. Geogebra kaller funksjonen for  $f$ . Så skriver vi kommandoen **Nullpunkt**[f].



Det ene nullpunktet er  $x = 11.27$ , og har koordinatene  $(11.27, 0)$ . Alle nullpunkter vil ha  $y$ -koordinat 0. Det andre nullpunktet er  $x = 88.73$ , og har koordinatene  $(88.73, 0)$ .

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under  $x$ -aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer  $x$ -aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.

Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.

Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

### Oppgave 18

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen  $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$ , der  $x$  er prisen på en enhet av varen.

- Tegn grafen. La  $x$  ligge mellom 0 og 300.
- For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
- Når går bedriften med overskudd?

### 4.4. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.

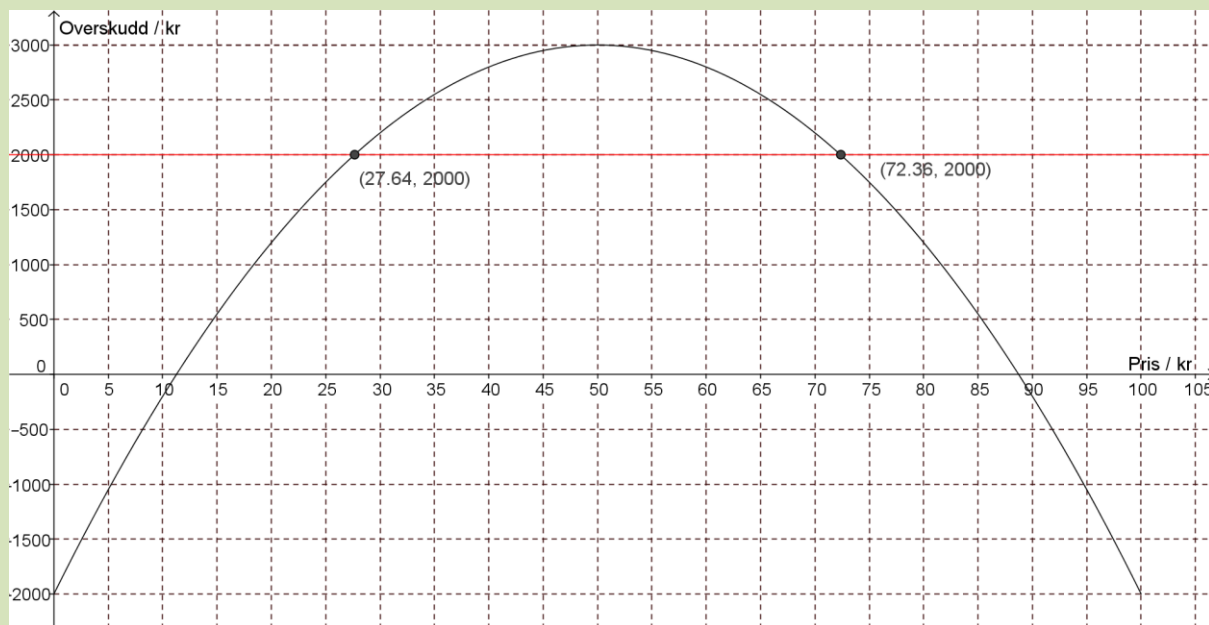
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

### Eksempel 6

Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 1.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja  $y = 2000$  og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er  $(27.64, 2000)$  og  $(72.36, 2000)$ . Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja  $y = 2000$  mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

### Oppgave 19

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved  $T(x) = -0,24x^2 + 1,2x + 16$ , der  $T(x)$  står for antall celsiusgrader, og  $x$  for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.

*Her må du altså la  $x$  ligge mellom 0 og 8.*

b) Når var temperaturen lik 16 °C?

c) Når var temperaturen høyere enn 16 °C?

## 5. Potens - og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut:  $f(x) = a \cdot x^b$ . Her er  $a$  og  $b$  faste tall. Eksempler:

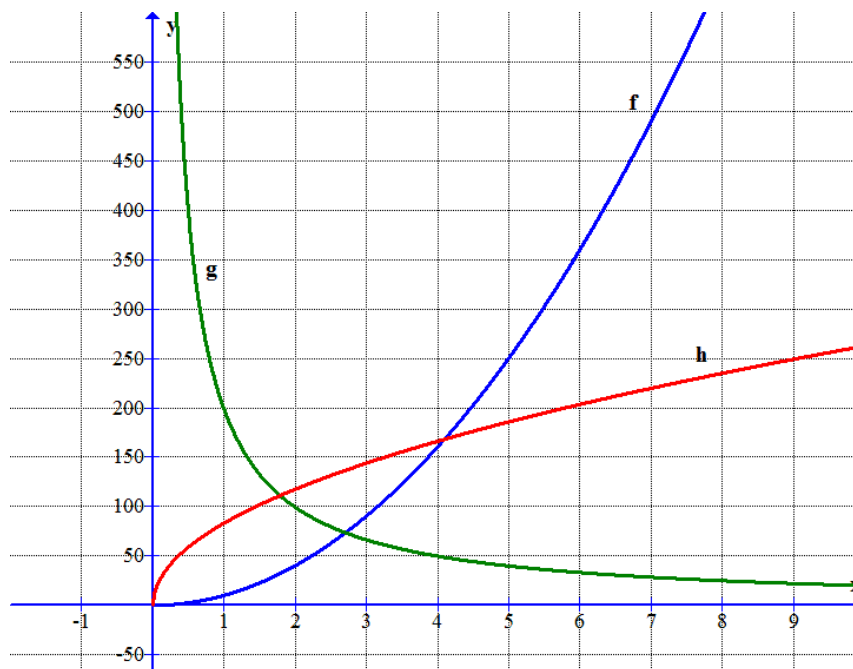
$$f(x) = 10 \cdot x^2$$

$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$

$$h(x) = 83 \cdot x^{0.5}$$

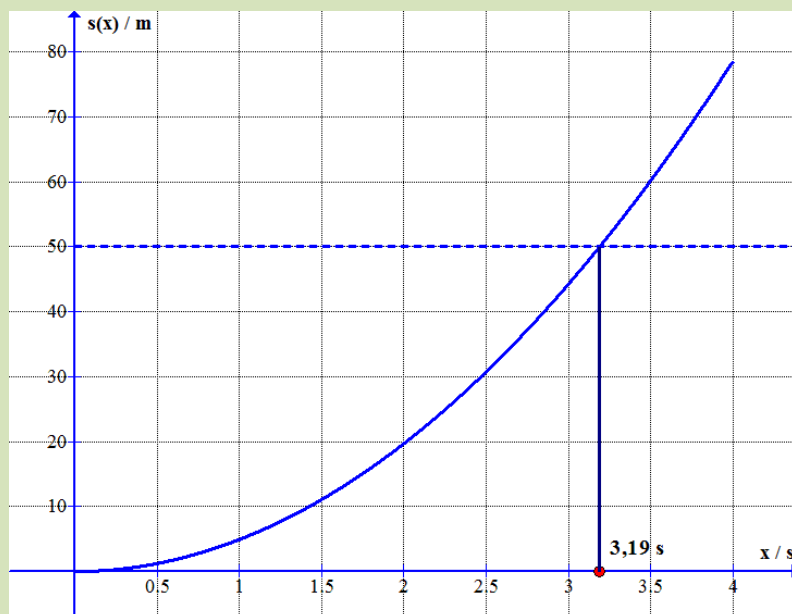
Det viser seg at  $x^{0.5}$  faktisk er det samme som  $\sqrt{x}$ , slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



### Eksempel 7

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter  $x$  sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen  $s(x) = 4,9x^2$ . Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut  $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$  på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..

For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja  $y = 50$  i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

### Oppgave 20

Tiden  $t(x)$ , målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle  $x$  meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen  $t(x) = 0,45\sqrt{x}$ .

- Tegn grafen til  $t$  når  $0 \leq x \leq 100$ .  $\sqrt{x}$  skriver du som  $\text{sqrt}(x)$  i Geogebra. (sqrt = square root.)
- Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?
- Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

## 6. Vekstfart

### 6.1 Konstant vekstfart

Vekstfarten til en størrelse som forandrer seg med tiden viser hvor *raskt* størrelsen forandrer seg. Vi ser først på eksempler hvor en størrelse forandrer seg like mye i like lange tidsrom. Da sier vi at veksten er *jevn*, og vekstfarten er *konstant*. Slik vekst beskrives med en *lineær* funksjon.

#### Eksempel 8

Et tre vokser jevnt og med 0,6 m hvert år. Da er vekstfarten 0,6 m/år.

#### Eksempel 9

Det vi i dagligtale kaller fart, er egentlig vekstfarten til en strekning som en bil eller noe annet forflytter seg. Hvis farten til en bil er 80 km/h, betyr det at strekningen som bilen kjører øker 80 km på en time.

#### Eksempel 10

Et tre vokser jevnt, og høyden øker fra 2,1 til 4,5 m på 3 år. Høyden øker altså med  $4,5 \text{ m} - 2,1 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$  på 3 år. Da er vekstfarten  $\frac{2,4 \text{ m}}{3 \text{ år}} = 0,8 \text{ m/år}$

### Oppgave 21

Vekten av en melon øker jevnt fra 2,6 kg til 5,9 kg på 3 uker. Hva er vekstfarten til vekten av melonen? Husk målenhet på svaret.

#### Eksempel 11

Antall bakterier i ei skål med næring er gitt ved funksjonen  $b(x) = 300x + 1000$ , hvor  $x$  er antall timer som er gått etter at bakteriene ble plassert i skåla. Da er vekstfarten lik stignings-tallet til denne lineære funksjonen. Vekstfarten er konstant og lik 300 bakterier/time.

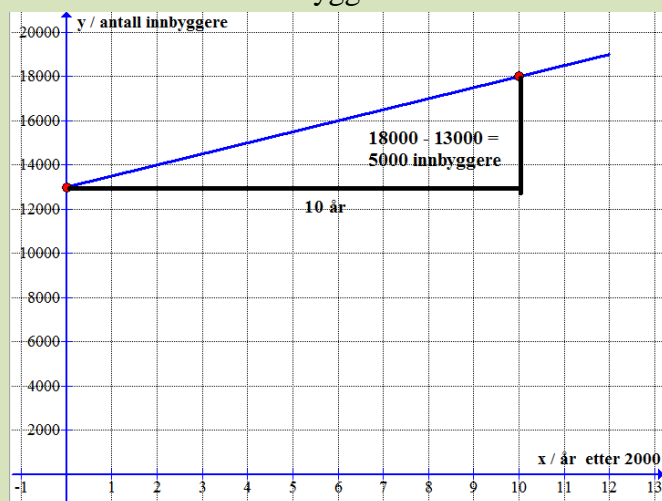
### Oppgave 22

Den 1. juni var 50 m<sup>2</sup> av en sjø dekket med alger.  $t$  uker senere var arealet som var dekket, beskrevet av funksjonen  $A(t) = 50 + 20t$ . Hva var vekstfarten til arealet av det algedekkede området? Husk målenhet.



### Eksempel 12

Grafen viser antall innbyggere i en kommune fra år 2000 og utover. År 2000 svarer til  $x = 0$ .



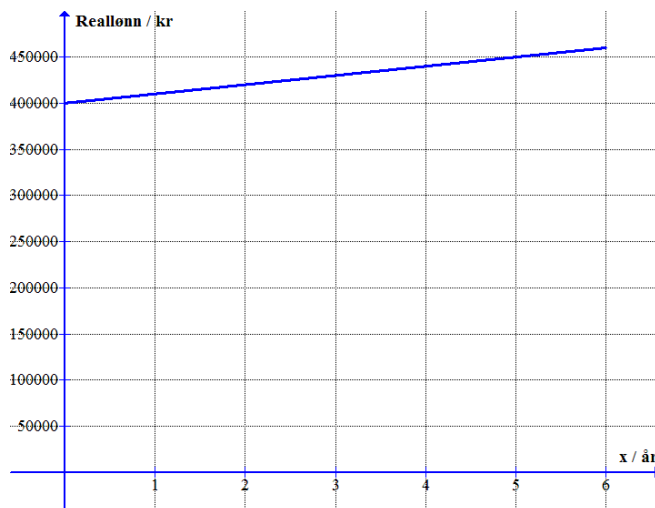
For å beregne vekstfarten finner vi to punkter på grafen som er lette å lese av. Ved å bruke de to punktene som er vist, får vi at vekstfarten er

$$\frac{5000 \text{ innbyggere}}{10 \text{ år}} = 500 \text{ innbyggere/år}$$

### Oppgave 23

Grafen viser hvordan reallønna til Asgar har utviklet seg de siste 6 årene.

Finn vekstfarten til reallønna.



### Eksempel 13

En sommerdag synker temperaturen jevnt noen timer. På 4 timer har temperaturen minket fra 25 grader til 19 grader, altså med 6 grader.

Hvis noe *minker* etter hvert som tiden går, er vekstfarten *negativ*.

Her blir vekstfarten  $\frac{-6 \text{ grader}}{4 \text{ timer}} = -1,5 \text{ grader/time}$ .

Funksjonen som beskriver temperaturutviklingen blir da  $T(x) = -1,5x + 25$  når  $x$  er tiden som har gått siden temperaturen var 25 grader.

## Oppgave 24

Temperaturen i en kopp med varmt vann synker jevnt noen minutter. Temperaturen minker fra 100 grader til 90 grader på 4 minutter.

- Finn vekstfarten til temperaturen.
- Lag en funksjon som viser temperaturen i vannet som funksjon av tiden  $x$ .

## Oppgave 25

I en kommune sank innbyggertallet jevnt gjennom flere år. I 2008 var det 20 000 innbyggere i kommunen og i 2012 var det 18 000 innbyggere.

- Finn vekstfarten til innbyggertallet.
- Lag en funksjon som viser innbyggertallet  $I(x)$ , hvor  $x$  er antall år som har gått siden 2008 (slik at  $x = 0$  tilsvarer år 2008,  $x = 1$  tilsvarer 2009 osv.)
- Hva vil innbyggertallet være i 2015 hvis utviklingen fortsetter på samme måten?
- Når vil innbyggertallet være lik 15 000?

## 6.2 Gjennomsnittlig vekstfart

Hvis veksten *ikke* er jevn, vil heller ikke vekstfarten være den samme hele tiden. Da bruker vi ofte *gjennomsnittlig* vekstfart.

### Eksempel 14

Grafen til høyre viser høyden til en plante de første 15 dagene etter at den ble plantet. Av grafen kan vi lese at høyden er 50 mm ved  $x = 0$ , 90 mm ved  $x = 5$  og 160 mm ved  $x = 10$ .

Fordi grafen ikke er en rett linje, er vekstfarten ikke konstant. Vi kan imidlertid regne ut gjennomsnittlige vekstfarter.

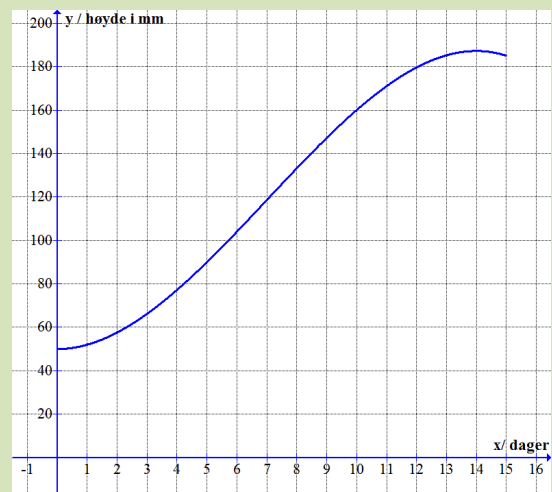
To eksempler:

Gjennomsnittlig vekstfart de fem første dagene:

$$\frac{90 \text{ mm} - 50 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{40 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 8 \text{ mm/dag}$$

Gjennomsnittlig vekstfart fra dag 5 til dag 10:

$$\frac{160 \text{ mm} - 90 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{70 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 14 \text{ mm/dag}$$



## Oppgave 26

Finn gjennomsnittlig vekstfart de ti første dagene for planten i eksemplet foran.

### Eksempel 15

Vi kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av en graftegner.

Funksjonen som beskriver høyden av planten i forrige eksempel er

$$h(x) = -0,1x^3 + 2,1x^2 + 50$$

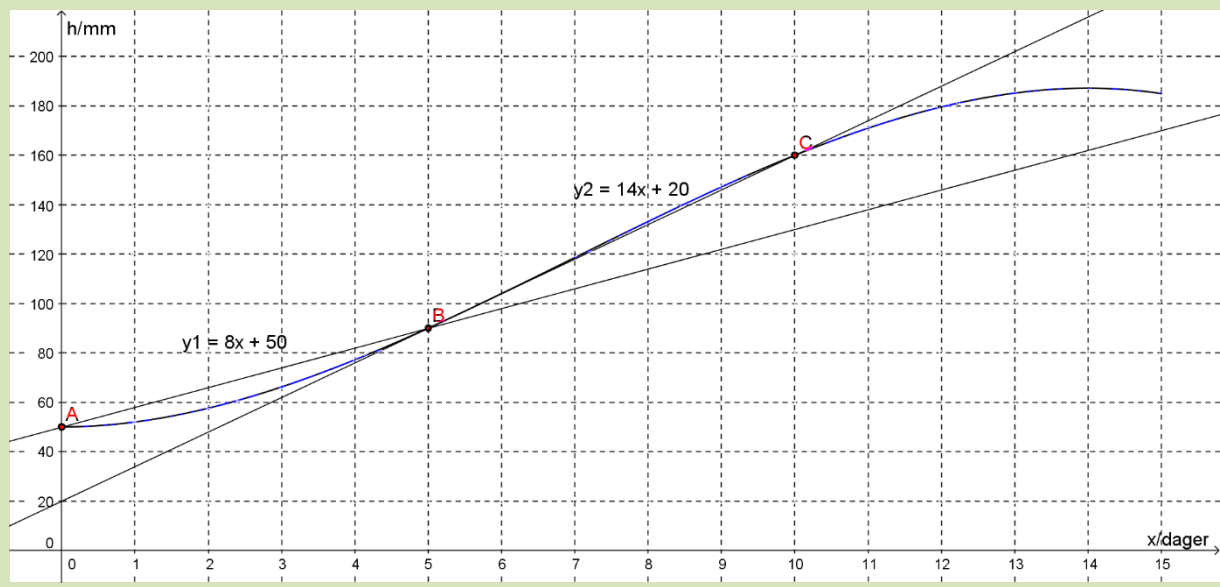
Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-0.1x^3+2.1x^2+50,0,15]**.

Vi setter inn punktene **A** = (0, 50), **B** = (5, 90) og **C** = (10, 140) på grafen.

Vi velger verktøyikonet linje mellom to punkter.

Høyreklikk på linjen og endre funksjonsuttrykket til  $y = ax + b$ . Stigningstallet **a** er lik gjennomsnittlige vekstfart.

Svaret blir **a = 8 mellom punkt A og B**, og **a = 14 mellom punkt B og C** som stemmer med utregningene i eksempel 12, 8 mm/dag og 14 mm/dag.



### 6.3 Momentan vekstfart

*Momentan* vekstfart er vekstfarten på et bestemt tidspunkt, altså i et bestemt øyeblikk (sammenlign “moment” = øyeblikk på engelsk).

Den momentane vekstfarten er størst der grafen er brattest. Hvis vi igjen ser på grafen i forrige eksempel som viser høyden til planten, kan det se ut som grafen er brattest omtrent når  $x = 7$  dager.

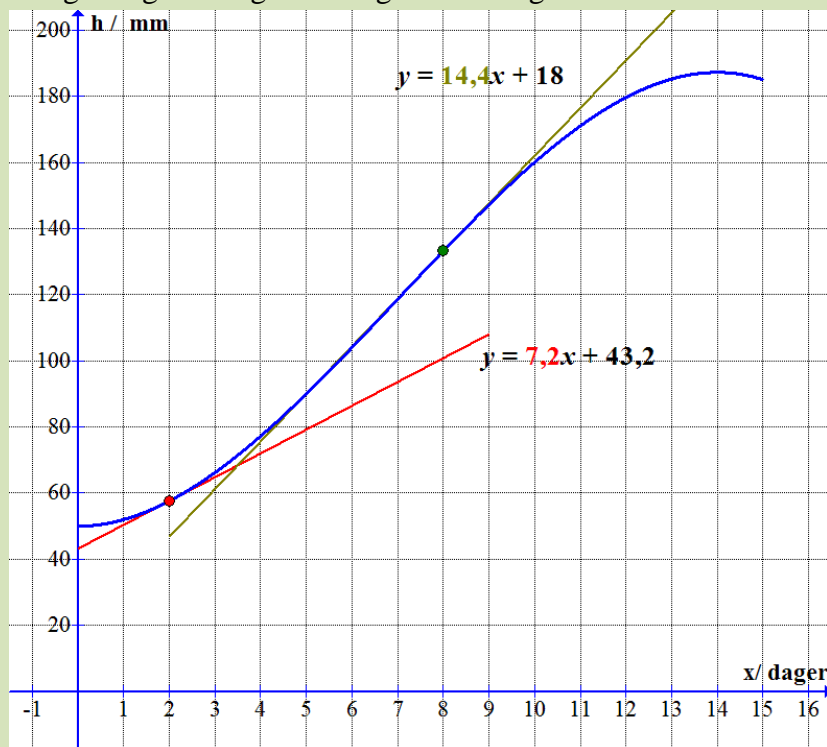
For å finne verdien til den momentane vekstfarten i et bestemt øyeblikk  $x$ , må vi tegne *tangenten* til grafen for denne verdien av  $x$ . *Da er den momentane vekstfarten stigningstallet til tangenten.* Dette kan vi gjøre i Geogebra.

### Eksempel 16

Vi fortsetter å undersøke veksten til planten i eksemplene foran.

Under har vi tegnet grafen, og tangenter for  $x = 2$  og  $x = 8$ . Vi tegner en tangent til funksjonen  $f$  i  $x = 2$  i Geogebra med kommandoen **Tangent[2,f]**.

Geogebra gir oss også likningene for tangentene. De er skrevet inn på figuren under.



Fra likningene til tangentene på figuren ser vi at den momentane vekstfarten er 7,2 mm/dag etter 2 dager og 14,4 mm/dag etter 8 dager.

### Oppgave 27

Vekten i kg av en voksende melon er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$V(x) = -0,0024x^3 + 0,02x^2 + 0,21x + 1,0$$

der  $x$  er antall uker etter at vekten var 1,0 kg. Uttrykket gjelder bra de åtte første ukene.

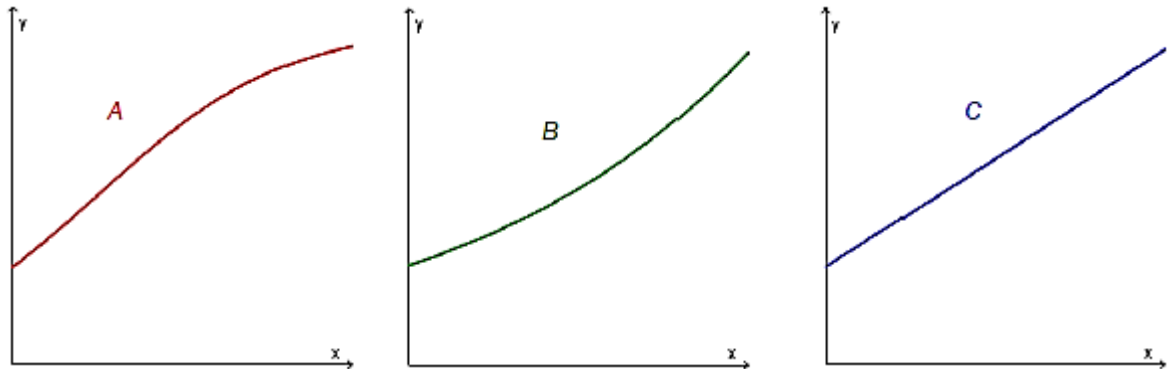
- Tegn grafen til  $V$  når  $x$  ligger mellom 0 og 8 uker.
- Finn momentan vekstfart når  $x = 2$  og når  $x = 6$ . Husk å skrive målenhet på svaret.
- Hva er vekten av melonen etter 2 uker?
- Regn ut gjennomsnittlig vekstfart mellom uke 2 og uke 8.

## Eksamensoppgaver

### E1

(2P vår 2016, Del 1)

- Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt
- Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse viser eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt



### E2

(2P vår 2016, Del 1)

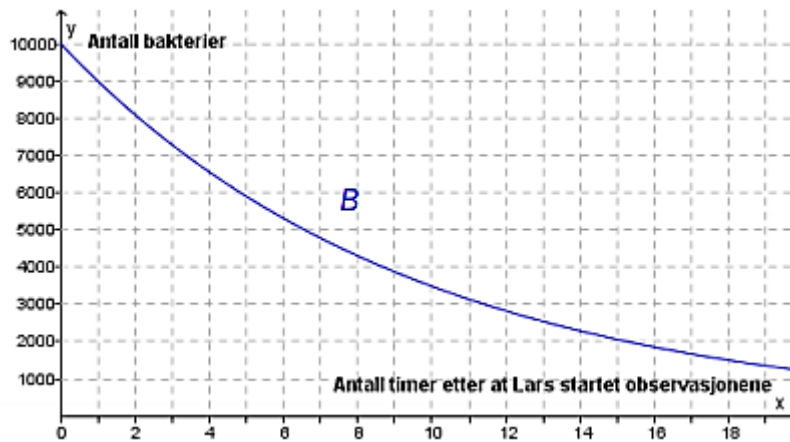
Marte er telefonselger. Hun har en fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner. Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

- Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.
- Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.
- Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

**E3**

(2P, høst 2015, del 1)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen  $B$  ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp uttrykket for  $B(x)$

**E4**

(2P, vår 2015, del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

**E5**

(2P, vår 2015, del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter  $t$  sekunder er ballen tilnærmet  $h(t)$  meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

$t$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$		18,75		18,75		8,75	

b) Tegn grafen til  $h$

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av  $h(0)$  og  $h(3)$

**E6**

Funksjonene  $G$  og  $J$  gitt ved

$$G(x) = 0,0030x^3 - 0,088x^2 + 1,17x + 3,7 \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$J(x) = 0,0017x^3 - 0,057x^2 + 0,93x + 3,7 \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide  $G(x)$  kilogram, og Janne veide  $J(x)$  kilogram  $x$  måneder etter fødselen.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til  $G$  og grafen til  $J$  i samme koordinatsystem.
- Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?
- Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?
- Bestem  $\frac{G(12)-G(0)}{12}$  og  $\frac{G(2)-G(0)}{2}$

Hva forteller disse svarene om vekta til Geir?

**E7**

(2P vår 2015, Del 2)

Funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \quad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen  $f(x)$  grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet  $x$  dager etter 31. desember 2013

- Bruk graftegner til å tegne grafen til  $f$
- Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur
- Bestem  $f(100)$  og den momentane vekstfarten til  $f$  når  $x = 100$ .  
Hva forteller disse svarene?

**E8**

(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen  $h$  gitt ved  $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$  var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.

Ifølge modellen var det  $h(t)$  hjort i kommunen  $t$  år etter 1. januar 1990.

- Tegn grafen til  $h$  for  $0 \leq t \leq 10$ .
- Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?
- Løs likningen  $h(t) = 850$  grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
- Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 – 1. januar 1998?

**E9**

(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$  viser hvor mange personer som var logget på en nettside  $x$  timer etter midnatt et gitt døgn.

- Tegn grafen til  $f$  for  $0 \leq x \leq 24$ .
- Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?  
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
- Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?
- Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til  $f$  for  $6 \leq x \leq 16$ .  
Hva forteller dette svaret?

**E10**

(Eksamen 2P(-Y), vår 2016, del 2)

Funksjonen  $B$  gitt ved

$$B(x) = 0,006x^4 - 0,33x^3 + 5,7x^2 - 32,1x + 59,3 \quad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader  $B(x)$  sola stod over horisonten  $x$  timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til  $B$ .
- Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?
- Når stod sola 20 grader over horisonten?
- Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 12.00?



## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a) 175, b) 200, c) 250, d) 6 år

Oppgave 2 a) 2250, b) 1250, c) 0

Oppgave 3

Oppgave 4 a) (0.5 , 6), (1 , 12), (1.5 , 18) b) Linja stiger like mye for hver gang x-verdien øker med én c) 0,83t (50min) d) 12 km

Oppgave 5 A:  $f(x) = -100x + 1000$  B:  $f(x) = 5x + 10$  C:  $f(x) = 50x + 250$

Oppgave 6  $f(x) = 100 + 25x$ . 25 kr per solgte abonnement. 100 i fast timelønn

Oppgave 7 100, 20,  $100 + 20 \cdot 10 = 100 + 200 = 300$

Oppgave 8 1100, 1210. Vokser med lik prosent

Oppgave 9 9000, 8100. Avtar med lik prosent

Oppgave 10

Alder	15	16	17	18	19	20
Timer	500	550	605	665	730	803
Økning i timer		50	55	60	65	73
Økning i prosent		10 %	10 %	≈ 10 %	≈ 10 %	10 %

Oppgave 11  $f(x) = 1000 \cdot 1,10^x$

Oppgave 12  $f(x) = 9000 \cdot 0,90^x$

Oppgave 13 A , D

Oppgave 14 A

Oppgave 15

Oppgave 16 b)  $x = 50$ , 3000 kr

Oppgave 17 b) 2008, ca. 10 000

Oppgave 18 b) ca. 5 kr og ca. 295 kr c) mellom 5 kr og 295 kr

Oppgave 19 b) kl. 12 og kl. 17 c) Mellom kl. 12 og kl. 17

Oppgave 20 b) 4,0 s c) 64 m

Oppgave 21 1,1 kg/uke

Oppgave 22 20 m<sup>2</sup>/uke

Oppgave 23 10 000 kr/år

Oppgave 24 a) -2,5 grader/min b)  $y = -2,5x + 100$

Oppgave 25 a) - 500 innbyggere/år b)  $I(x) = -500x + 20000$  c) 16 500 d) 2018

Oppgave 26 11 mm/dag

Oppgave 27 b) 0,26 kg/uke, 0,19 kg/uke c) 1,48 kg d) 0,21 kg/uke

## Fasit eksamensoppgaver

- E1 a) Lik prosentvis økning per periode b) B. Grafen blir brattere etter hvert som  $x$  øker
- E2 a) b) 25 kr per produkt, grunnlønnen er 120 kr c) 10 produkter
- E3 a)  $0,90$ ,  $10000 \cdot 0,90^x$
- E4 2,5 timer
- E5 a)  $h(0)=15$ ,  $h(1)=20$ ,  $h(2)=15$ ,  $h(3)=0$  b) c)  $h(0)$ : hvor høyt over bakken ballen kastes (15m)  $h(3)$ : Hvor høyt ballen er over bakken etter 3 sek (0 m, altså på bakken)
- E6 b) G:6,6 J:5,9 c) G: 4,4 mnd J: 5,6 mnd d) 0,55, gjennomsnittlig vektøkning per måned det første året for Geir. 1,01, gjennomsnittlig vektøkning per måned de to første månedene for Geir
- E7 b) ca.  $13,3$  °C c)  $f(100) = 8,5$   $f'(100)=0,09$ . Betyr at temperaturen i vannet er 8,5 grader 100 dager etter 31.12, og den dagen øker temperaturen med 0,09 grader per dag.
- E8 b) I februar 1992, ca. 870 hjort c) I mai 1991 og januar 1993
- E9 b) kl. 17, 13000 c) mellom ca. kl. 5 og 24 d) ca. 1050 personer/time.
- E10 b)  $52,2^\circ$  c) ca. kl.07.40 og ca. kl 19.40 d) ca.  $0,9^\circ$  per time

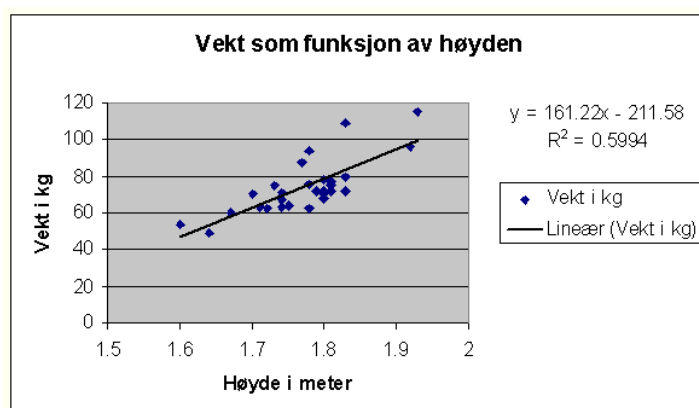
## Kapittel 6. Matematiske modeller



En matematisk modell er en funksjon som mer eller mindre bra beskriver en praktisk situasjon.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hvordan lage en matematisk modell ved hjelp av gitte opplysninger.
- Hvordan finne en matematisk modell ut fra en tabell med observerte sammenhenger mellom to størrelser (regresjon).
- Hvordan finne mønster i et tallmateriale.



## 1. Hva er en matematisk modell?

Ordet *modell* kan ha mange betydninger. I 2P betyr det en funksjon (formel) som gir en mer eller mindre nøyaktig sammenheng mellom to størrelser fra "virkeligheten". Hvis vi kan lage en slik modell, kan vi blant annet finne ut hva som skjer med den ene størrelsen hvis den andre forandrer seg.

Hovedforskjellen mellom dette emnet og det arbeidet du har gjort tidligere med funksjoner, er at du nå selv må lage funksjonsuttrykkene.

## 2. Å lage en matematisk modell ut fra gitte opplysninger

### Eksempel 1

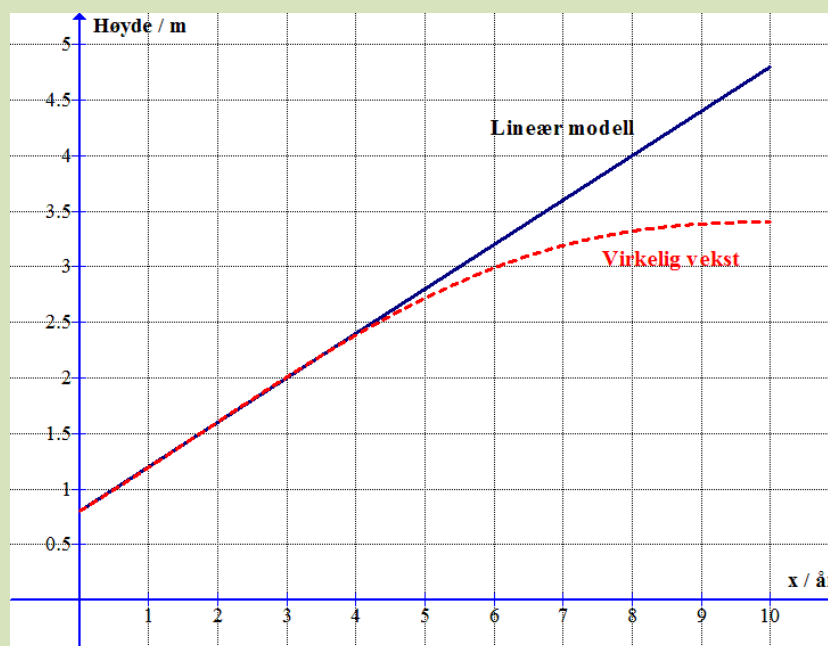
Vi planter et tre som er 0,8 m høyt. Vi følger med på hvor raskt treet vokser, og finner at i de første årene vokser det ganske jevnt, nemlig 0,4 m per år. Hvis vi kaller antall år som er gått etter planting for  $x$ , kan vi lage følgende *lineære modell* for høyden:

$$h(x) = 0,4x + 0,8$$

Ifølge modellen vil høyden etter 7 år være  $h(7) = 0,4 \cdot 7 + 0,8 = 3,6$  m.

Grafene nedenfor viser høyden ifølge den lineære modellen, og den virkelige høyden av treet. Vi ser at den lineære modellen stemmer godt de fem første årene, men at verdien vi regnet ut fra modellen etter 7 år er for stor.

Vi sier at *gyldighetsområdet* for den lineære modellen er  $x$  mellom 0 og 5 år, som vi av og til skriver slik:  $x \in [0, 5]$ .

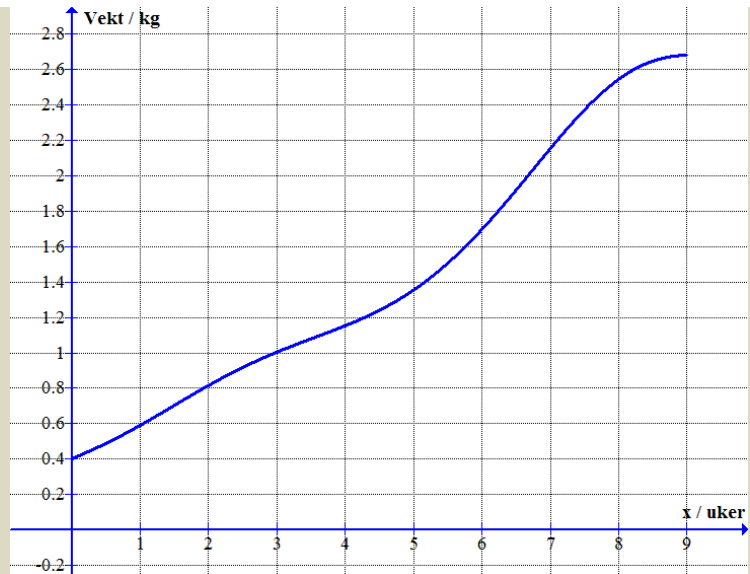


## Oppgave 1

Grafen viser vekten til en vannmelon som funksjon av antall uker som har gått siden man startet å veie den.

a) Omtrent hvor mye har vekten økt fra uke 0 til uke 5?

b) Lag en lineær modell for vekten  $v(x)$  som passer bra for de fem første ukene.



## Oppgave 2

Temperaturen i en kopp med kokende vann som settes på bordet er 100 grader. I de første minuttene minker temperaturen ganske jevnt, og med 3 grader per minutt.

a) Hva er temperaturen i koppen etter 2 minutter?


b) Lag en lineær modell som beskriver temperaturen  $T$  i koppen etter  $x$  minutter.

c) Hva er temperaturen etter 8 minutter ifølge modellen?

d) Hva er temperaturen etter 40 minutter ifølge modellen?

e) Forklar at modellen blir dårligere og dårligere når  $x$  øker.

f) Tegn grafen til modellen.

g)  Tegn inn for hånd omtrent hvordan den *virkelige* temperaturen i vannet kan tenkes å utvikle seg når temperaturen i rommet er 20 grader.

### Eksempel 2

I et bestemt hus hvor all oppvarming plutselig slås av, vil forskjellen mellom innetemperaturen og utetemperaturen minke 12 % i timen. Når oppvarmingen slås av er det 22 grader inne og -8 grader ute. Vi forutsetter at det ikke foregår noen soloppvarming av huset.

Vi vil lage en modell for hvordan temperaturforskjellen minker etter hvert som tiden går.

Temperaturforskjellen er  $22 - (-8) = 30$  grader i starten.

Vekstfaktoren er  $100 \% - 12 \% = 88 \% = 0,88$ .

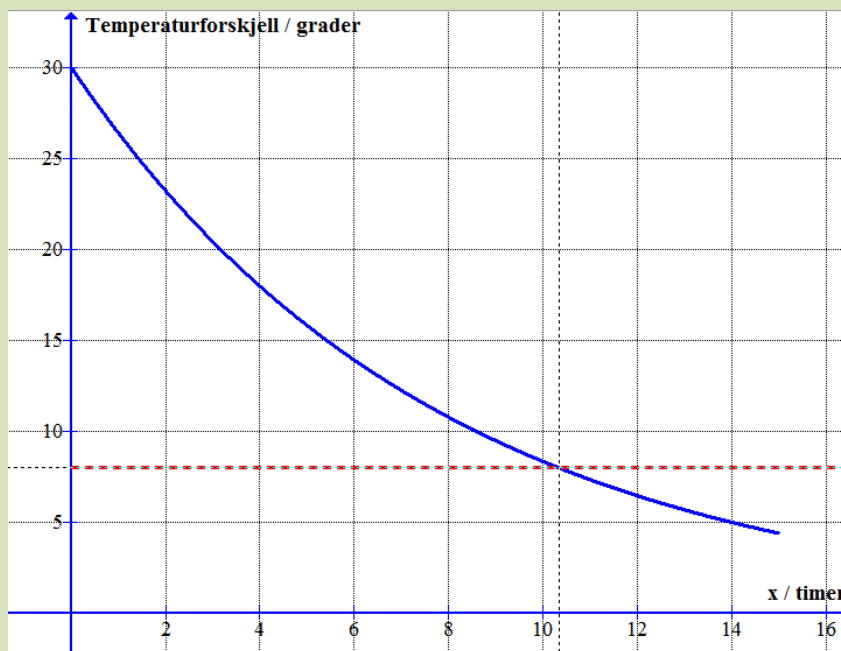
Vi kaller antall timer som har gått for  $x$ . Da vil eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 30 \cdot 0,88^x$$

beskrive utviklingen av temperaturforskjellen.

Når er innetemperaturen null?

Vi tegner grafen til  $f$  med **Funksjon[30\*0.88^x,0,15]**:



Når innetemperaturen er null, er temperaturforskjellen 8 grader. Skjæringspunktet mellom grafen og linjen  $y = 8$ , viser at dette skjer etter 10,4 timer.

### Oppgave 3

I en bakterieinfeksjon viser en blodprøve at det er 10 000 bakterier per mL (milliliter) blod. Pasienten får antibiotika, og bakterietallet synker da med 3,5 % i timen de neste tre dagene.

- Lag en modell som viser bakterietallet i blodet i denne tredagersperioden.
- Bakterien regnes som ufarlig når antallet er mindre enn 1000 bakterier/mL. Når skjer dette?

### Eksempel 3

En fabrikk lager hermetikkbokser. Hver uke har fabrikken 100 000 kr i *faste kostnader* (lønn, verditap på maskiner og annet). I tillegg koster det 0,60 kr per boks (metall, elektrisk energi og annet). Vi skal lage en modell for utgiftene per boks.

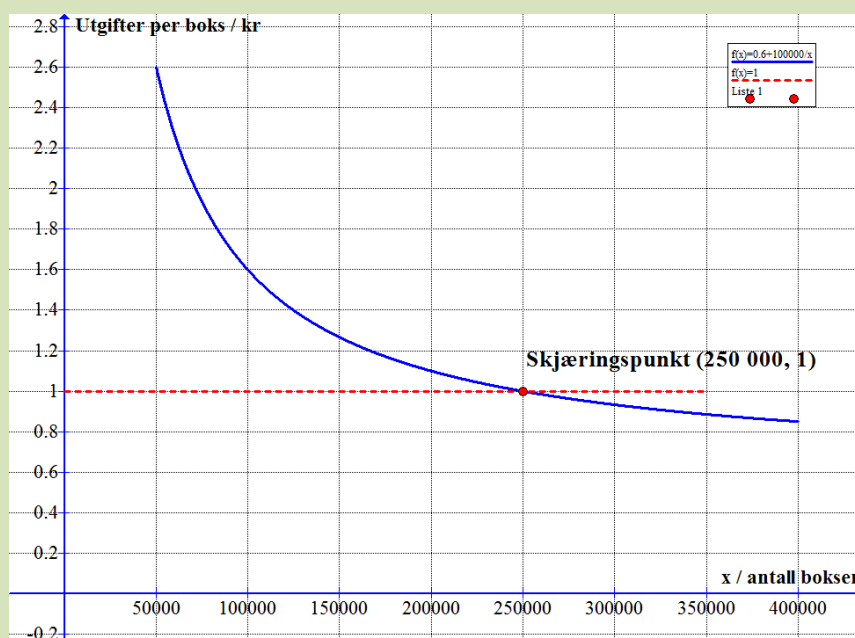
Vi kaller antall bokser som blir laget per uke for  $x$  og utgiftene per boks for  $U$ .

Utgiftene for  $x$  bokser blir  $0,60x + 100000$ .

$$\text{Utgiftene per boks: } U = \frac{0,60x + 100000}{x}.$$

Denne funksjonen må vi skrive slik i Geogebra:  $(0.60x + 100000)/x$ .

Hvor mange bokser må fabrikken minst lage for at utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr? Dette kan vi finne grafisk:



Vi ser at fabrikken må lage minst 250 000 bokser i uka hvis utgiftene per boks skal bli mindre enn 1 kr.

Vi kan også løse en likning:

$$\frac{0,60x + 100000}{x} = 1$$

$$\frac{(0,60x + 100000)x}{x} = 1 \cdot x$$

$$0,60x + 100000 = x$$

$$100000 = x - 0,60x$$

$$100000 = 0,40x$$

$$x = \frac{100000}{0,40} = 250000$$

#### Oppgave 4

Ola er medlem av en klubb hvor han må betale 200 kr i året for å være medlem. Da kan han få kjøpe sokker til 30 kr per par. Vanlig pris på sokkene er 50 kr.

a) Lag en modell som viser hva han må betale per par når han tar med kontingenten i utgiftene.

b) Hvor mange par sokker må han minst kjøpe per år for at det skal lønne seg å være medlem?



#### Eksempel 4

En bonde har 200 m gjerde som han skal bruke til å sperre av et rektangulært beiteområde for noen kuer. Vi skal lage en matematisk modell for arealet  $A(x)$  av beiteområdet hvis den ene siden i rektangelet er  $x$  meter.

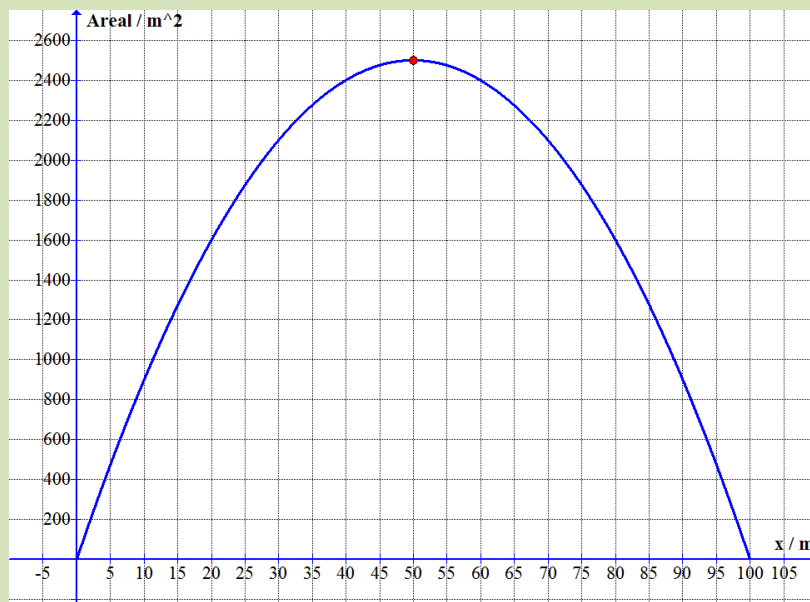
Hvis vi kaller den andre siden i rektangelet for  $y$ , må  $x + y$  være lik halve omkretsen av rektangelet, nemlig 100 m. Da må vi ha at  $y = 100 - x$ . Arealet blir

$$A(x) = x \cdot y = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Modellen er altså et andregradspolynom.

Hvis bonden velger  $x = 60$  m, blir arealet  $100 \cdot 60 - 60^2 = 2400 \text{ m}^2$ .

For å finne hvilken verdi av  $x$  som gir *størst areal*, tegner vi grafen til andregradsfunksjonen ovenfor:



Vi ser at arealet blir størst når  $x = 50$  m. Da er området et kvadrat.



## Oppgave 5

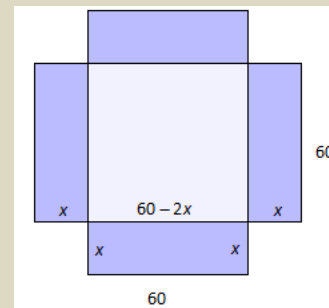


Du skal lage en eske av en papp-plate med sidekant 60 cm ved å skjære bort et kvadrat i hvert hjørne og deretter brette opp de fargede sideflatene i figuren.

a) Forklar at sidene i bunnen av esken blir  $60 - 2x$ .

b) Lag en modell  $V(x)$  for volumet av esken. Som du kanskje husker fra 1P er volumet lik arealet av grunnflaten multiplisert med høyden av esken.

c) Hva er den største verdien  $x$  kan ha? Tegn grafen til  $V(x)$ . Hvilken verdi av  $x$  gir størst volum? Hvor stort er dette volumet?



### 3. Regresjon (kurvetilpasning)

#### 3.1 Lineær regresjon

Hvis vi har en tabell som viser sammenhørende verdier mellom to størrelser, er det ofte mulig å finne en funksjon som passer bra med disse verdiene. Metoden som gjør dette mulig, kalles *regresjon*. Vi viser med et eksempel hvordan Geogebra kan gjøre dette for oss.

Første gang vi åpner GeoGebra må vi endre på noen av innstillingene. Av og til er to desimaler for unøyaktig. *Du kan øke antall desimaler som Geogebra viser under **Innstillinger, Avrunding**. Samtidig kan det være lurt å øke skriftstørrelsen. Lagre de nye innstillingene.*

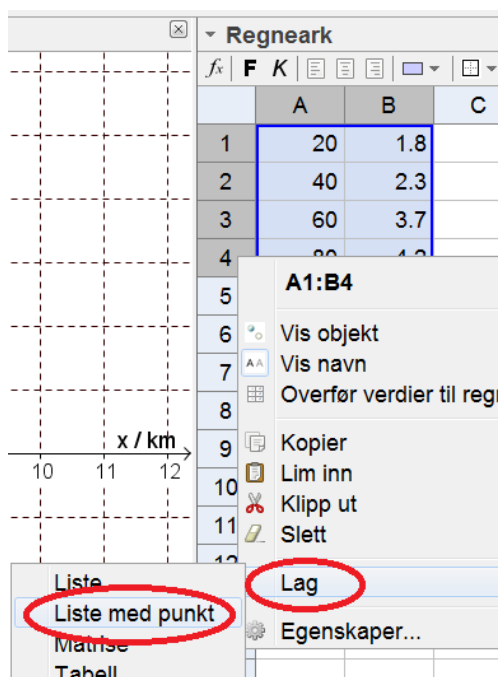
Tabellen nedenfor viser hvor mange timer personer i ulike aldre i gjennomsnitt ser på TV hver dag.

Alder $x$ / år	20	40	60	80
TV-tid $y$ / timer	1,8	2,3	3,7	4,2

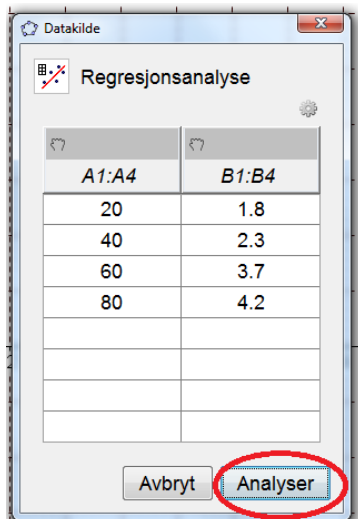
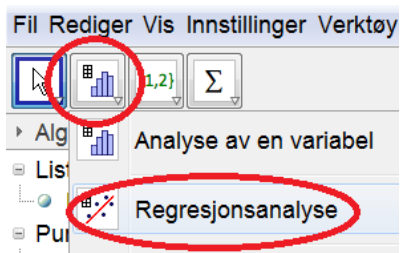
Vi åpner regnearket i Geogebra:



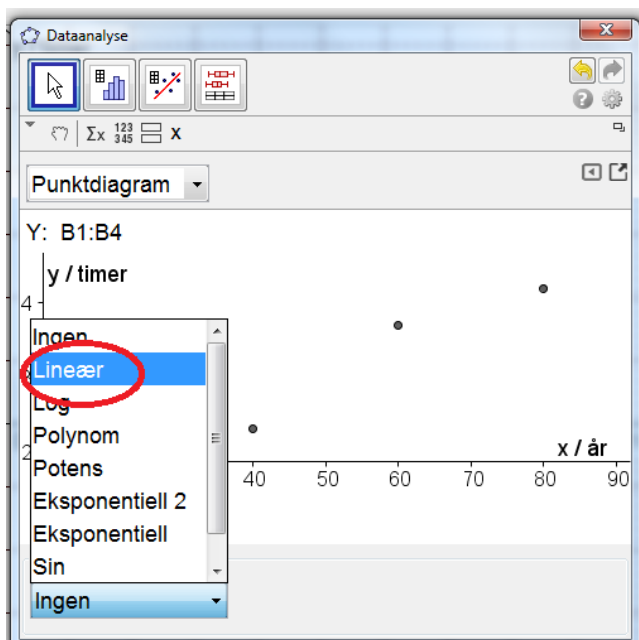
Så legger vi inn tabellverdiene i regnearket og merker disse tallene. Deretter høyreklikker vi i regnearket og velger **Lag, Liste med punkt**:

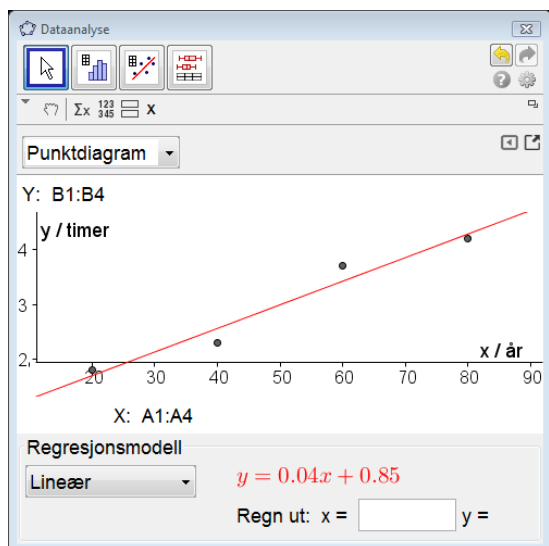


Så velger vi regresjonsanalyse:



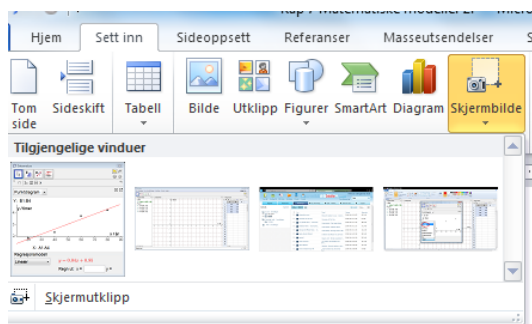
Her velger vi å utføre *lineær regresjon*. Det betyr å finne den lineære funksjonen som passer best mulig med tabellverdiene:





Vi ser at den funksjonen som passer best, er  $y = 0,04x + 0,85$ .

Figuren over kan vi lime inn i Word slik:



*Husk å forklare kort hva du gjør når du bruker Geogebra, og skriv opp resultatet du får. Ikke bare skriv ut skjermbildet! Det fører til poengtrekk til eksamen.*

Ut fra dette kan vi si at  $f(x) = 0,04x + 0,85$  er en ganske god *matematisk modell* for sammenhengen mellom alder og tid brukt til TV-seing.

I følge modellen vil en 70-åring bruke omtrent  $f(70) = 0,04 \cdot 70 + 0,85 = 3,7$  timer på TV per dag.

I mange regresjonsoppgaver blir du bedt om å vurdere *gyldighetsområdet* for modellen. Det betyr å diskutere om det er noen verdiområder for  $x$  hvor modellen ikke er særlig god.

Det er grunn til å tro at modellen over ikke passer særlig bra for barn. For det første sier den at nyfødte ( $x = 0$ ) ser 0,85 timer på TV, og for det andre ser antagelig småbarn i gjennomsnitt *mer* på TV enn voksne, ikke mindre slik modellen sier.

### Oppgave 6

Tabellen viser folketallet  $y$  i Norge (i millioner) fra 1950 ( $x = 0$ ) til 2000 ( $x = 50$ ).

$x$	0	10	20	30	40	50
-----	---	----	----	----	----	----

y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Finne ved regresjon den lineære modellen som passer best til denne utviklingen.
- Hva var folketallet i 2010 ( $x = 60$ ) i følge denne modellen?
- Omtrent hvor mye har folketallet økt per år i denne perioden?
- Når vil folketallet passere 6 millioner hvis denne modellen er noenlunde riktig?

### 3.2 Polynomregresjon

Det er ikke så vanlig at en lineær funksjon passer godt til data fra virkeligheten. Da kan av og til en polynomfunksjon passe bedre. Tabellen nedenfor viser hvor stor prosent av den yrkesaktive befolkningen i Norge som arbeidet i primærnæringene (jordbruk, skogbruk, jakt, fiske) i noen av årene mellom 1900 og 2004.

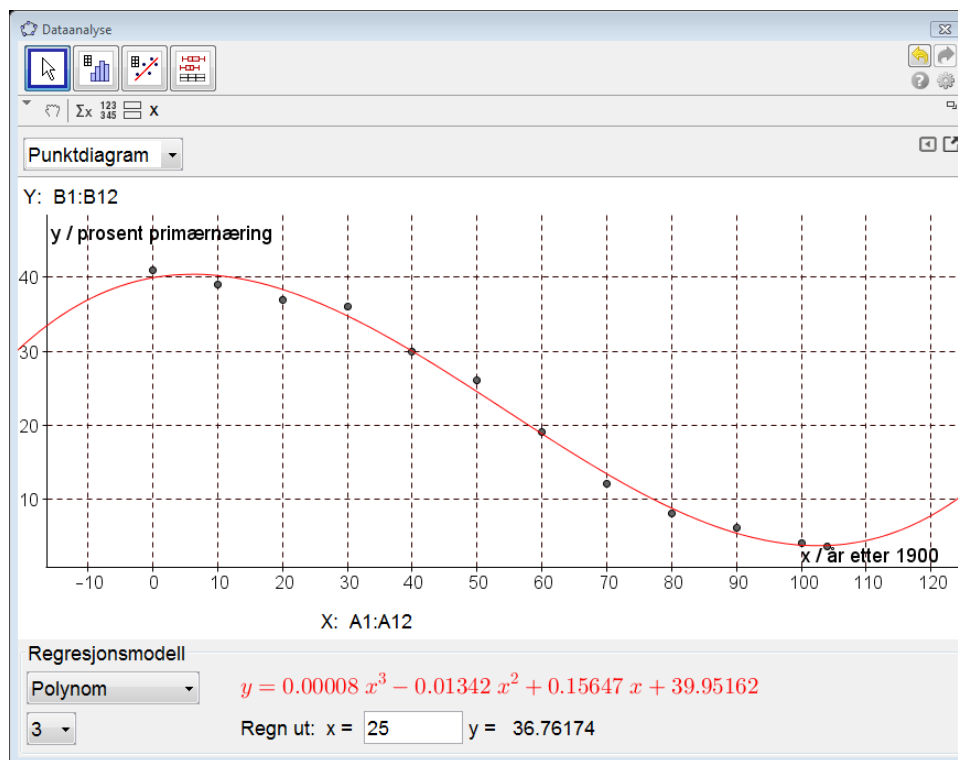
År	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2004
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	104
y/%	41	39	37	36	30	26	19	12	8	6	4	3,5

I oppgaver med årstall er det lurt å la  $x$  være antall år som har gått siden første året i datamaterialet.

Vi legger tallene inn i regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	41
2	10	39
3	20	37
4	30	36
5	40	30
6	50	26
7	60	19
8	70	12
9	80	8
10	90	6
11	100	4
12	104	3,5

Hvis vi prøver regresjon med en lineær funksjon, ser vi at den passer bra helt til nyere tid. Hvis vi prøver med en polynomfunksjon av andre orden (andregradsfunksjon) ser vi at heller ikke den passer veldig godt. Men et tredjegradspolynom passer bedre, og det velger vi slik:



Passe avrundet finner Geogebra modellen  $f(x) = 0,00008x^3 - 0,013x^2 + 0,156x + 40,0$ . (Her er antall desimaler satt til 5 i Geogebra.)

Når vi har laget en bra modell, kan vi *interpolere*. Det betyr å finne funksjonsverdier som ikke er med i tabellen vi brukte for å lage modellen, men hvor  $x$  ligger mellom første og siste verdi i tabellen. Eksempel:

Hvor mange prosent jobbet i primærnæringene i 1925? Vi regner ut  $f(25)$  ved å skrive  $x = 25$  inn i Geogebra vinduet (se ovenfor). Da finner vi  $f(25) = 37\%$ .

Mer interessant er det å bruke en modell til å regne ut funksjonsverdier som ligger utenfor første og siste verdi av  $x$  i tabellen. Dette kalles å *ekstrapolere*. Eksempel:

Hvor mange prosent vil jobbe i primærnæringene i 2020? Da har det gått 120 år siden 1900, slik at vi regner ut  $f(120)$ . Geogebra gir da ca. 8 %.

Når vi ser dette resultatet, forstår vi at selv om modellen passer bra fra 1900 til 2004, stemmer den dårlig etter 2004. Det er temmelig sikkert at sysselsettingen i primærnæringene ikke vil ha økt igjen helt opp til 8 % i 2020. En må være forsiktig med å tro at selv om en modell stemmer bra opp til nå, vil den fortsette å gjøre det i fremtiden. Det er ikke lett å spå hva som vil skje!

### Oppgave 7

Tabellen viser den totale norske oljeproduksjonen i noen utvalgte år fra 1970 til 2005. Oljeproduksjonen  $O(x)$  er oppgitt i millioner kubikkmeter.

År	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
$O$	0	20	35	50	100	150	175	160

- La  $x$  være antall år etter 1970 og lag med regresjon den tredjegradsfunksjonen som passer best med tallene.
- Hva vil produksjonen av olje være i 2015 hvis vi bruker modellen?
- I hvilket år var produksjonen størst ifølge modellen?
- Når slutter Norge å produsere olje ifølge denne modellen?

### 3.3 Eksponentiell regresjon

Det er ganske vanlig at når en størrelse øker eller minker, så skjer det omtrent med en fast prosent per tidsenhet (time, dag, uke, år...). Da vil en *eksponentialfunksjon* passe bra med dataene..

Tabellen nedenfor viser verdens folketall fra 1900 til 2005:

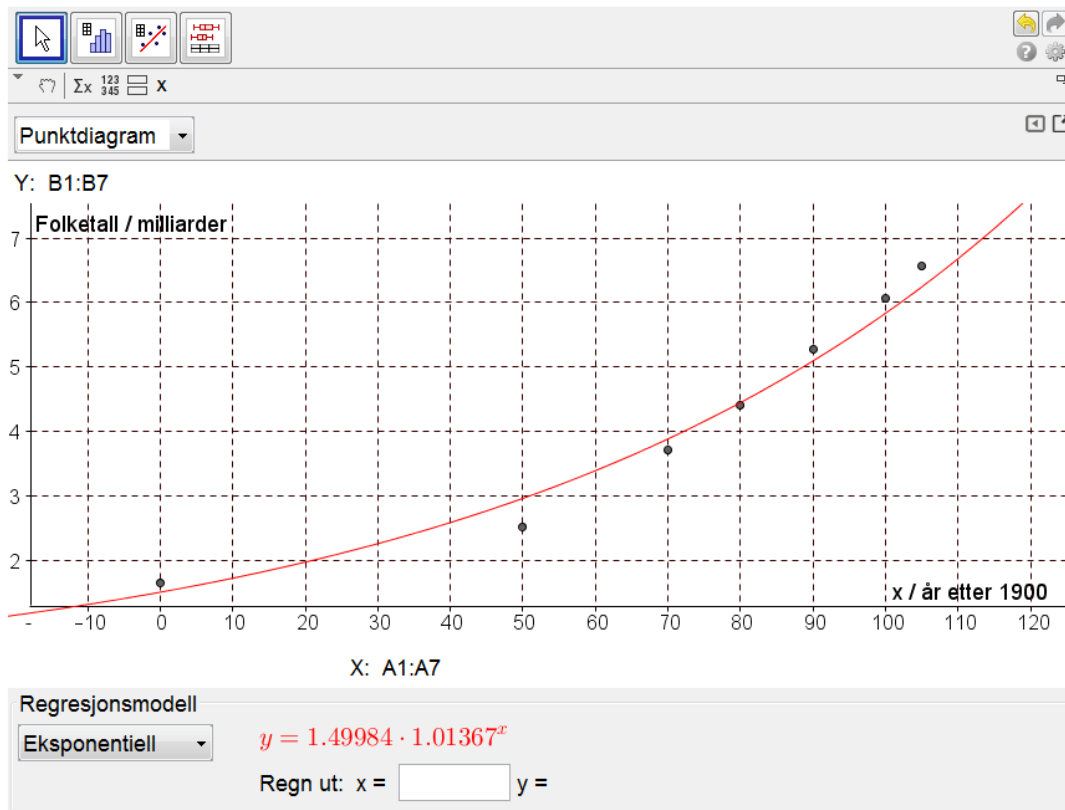
År	Folketall (milliarder)
1900	1,65
1950	2,52
1970	3,70
1980	4,40
1990	5,27
2000	6,06
2005	6,56

Vi lar  $x$  være antall år etter 1900 (slik at 1900 svarer til  $x = 0$ , 1950 svarer til  $x = 50$  osv.). Så legger vi punktene inn regnearket i Geogebra:

	A	B
1	0	1.65
2	50	2.52
3	70	3.7
4	80	4.4
5	90	5.27
6	100	6.06
7	105	6.56

Hvis vi prøver med lineær regresjon, ser vi at en lineær modell passer dårlig. Derfor prøver vi en eksponentiell modell, slik:

Vi ser at en slik modell passer ganske bra, men ikke *veldig* bra:

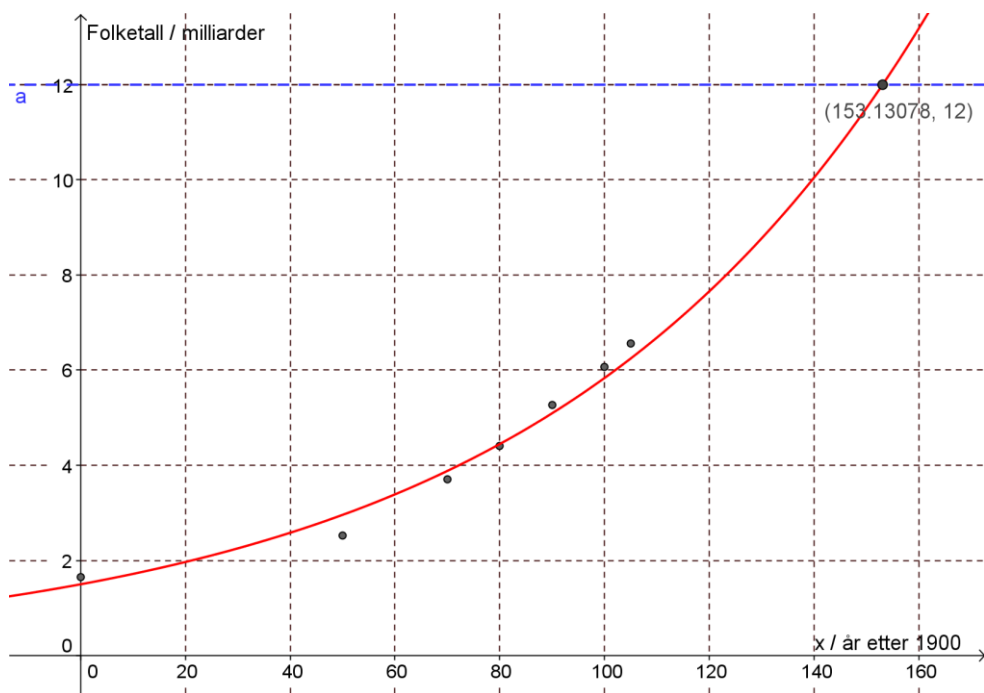


Funksjonen som passer best (passe avrundet) er  $f(x) = 1,5 \cdot 1,014^x$ .

Fra vekstfaktoren  $1,014 = 101,4\%$  ser vi at folketallet i gjennomsnitt økte  $101,4\% - 100\% = 1,4\%$  i året fra 1900 til 2005.

For å finne ut når folketallet i verden passerer 12 milliarder ifølge denne modellen, høyreklikker vi på grafen og velger **Kopier til grafikkfeltet**. Så legger vi inn linja  $y = 12$  og finner skjæringspunktet. Da får vi en figur som likner på denne:





Vi finner at folketallet passerer 12 milliarder i 2053 ifølge vår enkle modell. Bedre modeller som befolkningsgeografer har laget, gir betydelig lavere verdier.

### Oppgave 8

Tabellen nedenfor viser antall nordmenn over 100 år for noen utvalgte år i perioden 1975 – 2006:

År	Antall nordmenn over 100 år
1975	115
1980	158
1985	243
1990	300
1995	405
2000	414
2005	511
2006	533

- Legg verdiene i tabellen inn i et koordinatsystem i Graph der  $x = 0$  svarer til 1975.
- Lag en *lineær* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
- Lag en *eksponentiell* modell som passer til dataene i tabellen. Hvor mange nordmenn over 100 år vil det være i 2030 i følge denne modellen?
- En prognose sier at antall nordmenn over 100 år vil tredoble seg fra antallet i 2006 i løpet av de neste 10-15 år (regnet fra 2014). Vurder hvordan denne prognosen passer med de to modellene i b og c.

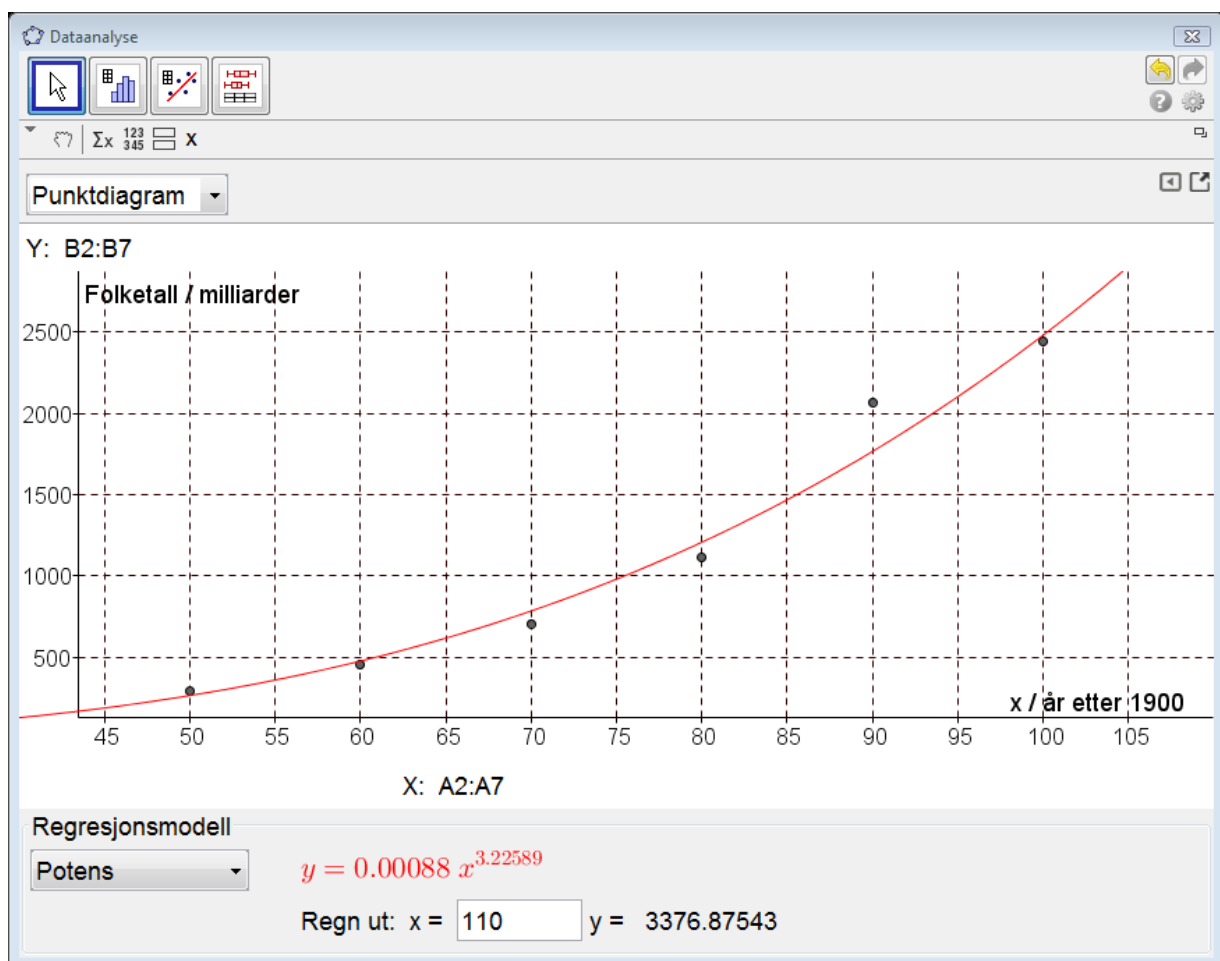
### 3.4. Potensregresjon

En potensfunksjon kan skrives på formen  $f(x) = a \cdot x^b$ . Eksponenten  $b$  kan være både positiv og negativ, og trenger ikke være et heltall.

Tabellen nedenfor viser tallet på fasttelefonabonnementer i Norge fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$t$ / tusen	291	455	708	1114	2070	2446

I 1900 var antall telefonabonnementer omtrent null slik at vi lar  $x$  bety antall år etter 1900 ( $x = 50$  tilsvarer da 1950,  $x = 60$  tilsvarer da 1960 osv.). Vi legger dataene inn i Geogebra og velger *potensregresjon*. Da får vi en lignende figur som denne:



Potensfunksjonen som passer best er  $t(x) = 0,00088x^{3,226}$  (passe avrundet).

I følge modellen var antall fasttelefonabonnementer i 2010 omtrent lik 3377 tusen (se figuren ovenfor). I virkeligheten var antallet lavere enn i 2000. Modellen stemmer dårlig etter 2000 fordi mobiltelefonene da for alvor begynte å ta over.

### Oppgave 9

Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
$x$	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.539
$y$	0.241	0.615	1.000	1.881	11.862	29.458

Tabellen viser sammenhengen mellom avstanden  $x$  fra sola og omløpstiden  $y$  for seks planeter. Avstandene er målt i forhold til jordas avstand fra sola, og omløpstidene er målt i år.

- Finne den potensfunksjonen som passer best med opplysningene.
- Uranus har en avstand fra sola som er 19,2 ganger større enn jordas. Omløpstiden er 84,0 år. Hvor godt stemmer dette med modellen?
- Neptun har en omløpstid på 165 år. Hvor stor er avstanden fra sola?

## 4. Mønster i tall og figurer

### Eksempel 5

Figuren viser et kvadrat bygget av 4 fyrstikker.

Vi skal finne en formel (matematisk modell) for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage flere sammenhengende kvadrater.

Vi ser at for å lage to kvadrater trenger vi 7 fyrstikker.

For å legge på et nytt kvadrat, trenger vi 3 fyrstikker til, altså 10.

Vi kan si at antall fyrstikker er en funksjon av antall kvadrater.

Variabler, slik som antall kvadrater, som bare kan være et *helt* tall, er det vanlig å kalle  $n$  istedenfor  $x$ . Det er også vanlig å skrive funksjonsuttrykket som  $f_n$  istedenfor  $f(n)$ .

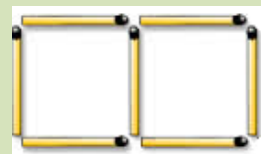
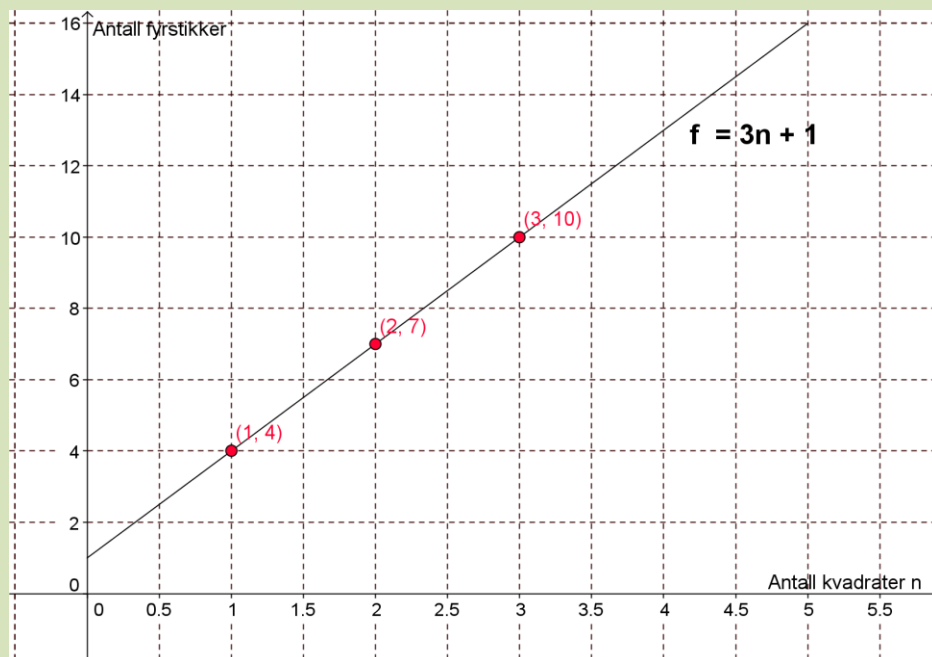
I dette eksemplet kan vi da skrive

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 7, \quad f_3 = 10.$$

For å finne en formel for hvor mange fyrstikker vi trenger for å lage  $n$  kvadrater, legger vi merke til at vi starter med 4 og legger til 3 for hvert nytt kvadrat vi legger til. Men hvis vi har  $n$  kvadrater, har vi lagt til  $n - 1$  nye, hver med tre fyrstikker. Derfor har vi

$$f_n = 4 + 3(n - 1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

Formelen  $3n + 1$  kan vi også finne bare ved å se på tallene 4, 7 og 10 og gruble litt, eller ved å legge inn punktene (1,4), (2, 7) og (3,10) i Geogebra og foreta en *lineær* regresjon.



## Oppgave 10

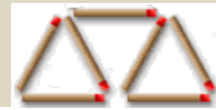
Figurene viser en og tre trekanter som er bygget opp av fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker  $f_4$  trengs for å lage 4 slike trekanter?

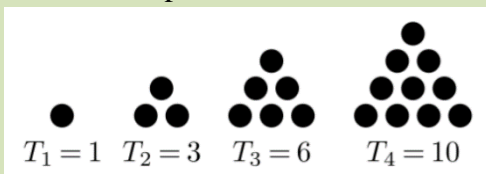
b) Finn en formel for  $f_n$ .

c) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage 10 trekanter?

d) 🤔 Hvor mange trekanter kan vi lage av 100 fyrstikker?



### Eksempel 6

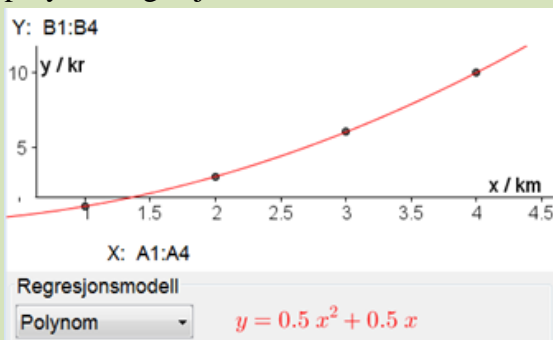


Figuren viser trekanter som er bygget opp av kuler. Antallet kuler utgjør de fire første *trekantallene*.

Vi ser at  $T_2 = T_1 + 2$ ,  $T_3 = T_2 + 3$ ,  $T_4 = T_3 + 4$ .

Da må vi ha  $T_5 = 10 + 5 = 15$  og  $T_6 = 15 + 6 = 21$ .

Da antall kuler ikke øker like mye fra en trekant til den neste, kan en formel for  $T_n$  ikke være lineær. Vi legger punktene (1,1), (2,3), (3,6) og (4,10) inn i regnearket i Geogebra og prøver polynomregresjon. Da finner vi



Formelen for trekantall nr.  $n$  er altså  $T_n = 0,5n^2 + 0,5n = \frac{n^2 + n}{2}$ .

Vi vil finne hvor stor trekant vi kan lage med 1000 kuler. Det kan vi gjøre ved å tegne grafen til funksjonen og finne skjæringspunktet med linja  $y = 1000$ . Da finner vi at vi kan lage trekant  $T_{44}$  med 1000 kuler. Da  $T_{44} = 990$ , får vi 10 kuler til overs.

## Eksamensoppgaver

### E1

(vår 2012, Del 1)

Elev	Praktisk situasjon	Modell	Spørsmål
Stian	Jeg har laget noen armbånd. Armbåndene skal jeg selge for 50 kroner per stykk.	Jeg trenger en modell som viser hvor mye jeg kan tjene.	Hvor mye tjener jeg dersom jeg selger fem armbånd?
Sondre	Jeg har kjøpt en krukke med 150 drops. Hver dag vil jeg spise fem drops.	Jeg trenger en modell som viser hvor mange drops jeg har igjen i krukka hver dag.	Hvor mange dager går det før jeg har spist opp halvparten av dropsene?
Sebastian	Jeg skal klippe ut rektangelformede tøystykker i ulike størrelser. Lengden av hvert tøyestykke skal være 2,0 cm større enn bredden.	Jeg trenger en modell som viser hvor stort arealet av hvert tøyestykke blir.	Hvor stort blir arealet av et tøyestykke dersom jeg velger at bredden skal være 3,0 cm?

Ovenfor har tre elever beskrevet tre ulike situasjoner. Ta for deg hver av de tre situasjonene.

- Svar på elevens spørsmål.
- Foreslå en matematisk modell.
- Si noe om modellens begrensninger.

### E2

(høst 2011, Del 2) 

Nils har funnet en bok på loftet. Tippoldefaren til Nils lånte boka på biblioteket og skulle levert den inn igjen 23.11.1911.

Nils lurer på hvor dyrt dette kunne blitt for tippoldefar dersom biblioteket hadde beregnet gebyr for sen innlevering. Han ser for seg at biblioteket kunne beregnet gebyr etter to ulike modeller.

### Modell 1

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og så 5 øre i tilleggsgebyr for hver uke som går etter det. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 20 øre.)

### Modell 2

Et gebyr på 10 øre en uke etter at boka skulle vært levert inn igjen, og deretter øker dette gebyret med 0,2 % hver uke. (Det vil si at dersom boka hadde blitt levert tre uker for sent, ville gebyret vært på totalt 10,04004 øre.)

I denne oppgaven regner vi at det er 52 uker i et år.

- a) Tenk deg at tippoldefar leverer inn boka i dag. Regn at “i dag” er 23.11. 2011.
  - 1) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 1?
  - 2) Hvor mye måtte han ha betalt i gebyr dersom biblioteket hadde brukt modell 2?
- b) For hvilken av de to modellene kommer gebyret raskest opp i 10 kroner?


### E3

(vår 2011, Del 2)


Vibeke har fått en bakterieinfeksjon og tar tablett med antibiotika. En tablett inneholder 220 mg antibiotika. Antall milligram antibiotika i kroppen reduseres med 11 % hver time.

- a) Vibeke tar en tablett. Hvor mange milligram antibiotika er det igjen i kroppen hennes
  - 1) etter én time?
  - 2) etter åtte timer?

Vibeke tar en tablett hver åttende time.

- b) Hvor mange milligram antibiotika har hun i kroppen rett etter at hun har tatt sin
  - 1) andre tablett?
  - 2) tredje tablett?
- c)  Skisser grafen som viser hvor mange milligram antibiotika Vibeke til enhver tid har i kroppen det første døgnet etter at hun begynte å ta tablettene.

#### E4

(høst 2012, Del 1) 

Et fallskjermhopp kan deles inn i fire faser. I hver fase ser vi på farten fallskjermhopperen har loddrett nedover.

Fase 1:

Fallskjermhopperen forlater flyet. Etter tre sekunder er farten 25 m/s, og etter åtte sekunder har fallskjermhopperen nådd den maksimale farten, som er 50 m/s.

Fase 2:

Fallskjermhopperen faller med maksimal fart i fire sekunder.

Fase 3:


Fallskjermen løses ut, og i løpet av ett sekund minker farten til 5 m/s.

Fase 4:

Fallskjermhopperen fortsetter med konstant fart 5 m/s i åtte sekunder før han når bakken.

Lag en grafisk framstilling som viser hvordan farten til fallskjermhopperen varierer med tiden i løpet av hoppet.

#### E5

(vår 2011, Del 2) 

Rebecca er på ferie i Kina. Hun vil kjøpe sko til kjæresten, Isak, hjemme i Oslo. Kinesiske skostørrelser er annerledes enn det hun er vant med fra Norge.

Nedenfor ser du hva Rebecca finner ut om kinesiske herresko.

- \* Den minste størrelsen er 20. Sko i størrelse 20 er 21,5 cm lange.
- \* Når størrelsen øker med 1, øker skolengden med 5 mm.
- \* Kineserne bruker halvstørrelser, slik at for eksempel 37,5 er en mulig skostørrelse.

Rebecca vil sammenlikne norske og kinesiske skostørrelser. Hun setter opp tabellen nedenfor.

	Minste skostørrelse	Økning i lengde per størrelse	Halvstørrelser
Kina	20 (lengde 21,5 cm)	5 mm	Ja
Norge	32 (lengde 21,75 cm)	6,6 mm	Nei

a) Hvor lang er en sko som har norsk skostørrelse 40?



- b) 1) Forklar at  $y = (x - 20) \cdot 0,5 + 21,5$  er en formel for å regne ut skolengden,  $y$ , når du kjenner den kinesiske skostørrelsen,  $x$ .
- 2) Sett opp en tilsvarende formel for å regne ut skolengden når du kjenner den norske skostørrelsen.
- c) Isak bruker norsk skostørrelse 43. Hvilken kinesisk skostørrelse tilsvarer dette? Det er en lineær sammenheng mellom norske og kinesiske skostørrelser.
- d) Tegn av tabellen under i besvarelsen din. Fyll ut tabellen og finn den lineære sammenhengen.

Norsk skostørrelse	Kinesisk skostørrelse
32	
43	
	39

## E6

(vår 2012, Del 2)

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen i Norge i perioden fra 1998 til 2011.

Årstall	Konsumprisindeks
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4

- a) Marker verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem der  $x$  - akse viser antall

år etter 1998 (1998 tilsvarer  $x = 0$ ) og  $y$  - aksen viser konsumprisindeksen.

Bruk regresjon til å finne en rett linje som passer med punktene i koordinatsystemet.

- b) Hva vil konsumprisindeksen bli i 2030 ifølge modellen i a)?

Myndighetene har siden 2001 hatt som mål at konsumprisindeksen skal stige med 2,5 % per år.

- c) Hva ville konsumprisindeksen ha blitt i 2030 dersom den hadde steget med 2,5 % per år fra 2001 til 2030?

### E7 (høst 2012, Del 2)

Måned	Januar	Mars	Juni	Juli	August	Desember
Antall kilogram pølser	45	144	299	328	336	36

Tabellen ovenfor viser antall kilogram pølser som ble solgt i en butikk noen måneder i 2011.


- a) Framstill datamaterialet i tabellen ovenfor som punkter i et koordinatsystem der  $x$  - aksen viser måned og  $y$  - aksen viser antall kilogram pølser.

(La  $x = 1$  svare til januar,  $x = 2$  til februar,  $x = 3$  til mars, osv.)

- b) Bruk regresjon til å bestemme en modell på formen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  som kan brukes for å beskrive antall kilogram pølser som ble solgt per måned i løpet av dette året.

Tegn grafen til  $f$  i samme koordinatsystem som du brukte i a).

Butikken regner med at pølsealget vil være 20 % høyere hver måned i 2012 sammenliknet med tilsvarende måned i 2011.

- c)  I hvilke måneder i 2012 vil butikken da selge mer enn 300 kg pølser per måned dersom vi tar utgangspunkt i modellen i b)?

**E8**

(vår 2012, Del 2)


Tabellen nedenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år.

Årstall	1927	1961	1974	1987	1999	2011
Folketall (milliarder)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La  $x$  være antall år etter 1900 (i 1900 er  $x = 0$ , i 1901 er  $x = 1$ , og så videre).

- Bruk regresjon til å vise at funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = 1,27 \cdot 1,016^x$  kan brukes som modell for å beskrive hvordan folketallet i verden har endret seg i årene 1927–2011.
- Hvor mange prosent øker folketallet med per år ifølge modellen i a)?
- Når var folketallet 4,6 milliarder ifølge modellen i a)?
- Hvor lang tid går det ifølge modellen i a) mellom hver gang folketallet fordobles? Hvordan stemmer dette med tallene i tabellen ovenfor?

FN har utarbeidet prognoser som sier at folketallet i verden skal passere 8 milliarder i 2025 og 9 milliarder i 2045.

-  Vurder om modellen i a) passer med disse prognosene.

**E9**

(høst 2011 Del 2)

Årstall	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Innbyggertall	650	550	467	396	336	284
Endring fra året før		-100				
Prosentvis endring fra året før		-15,4 %				

Tabellen ovenfor viser innbyggertallet i en liten bygd i årene fra 2005 til 2010. Hans og Grete vil ut fra tabellen lage en matematisk modell som kan brukes til å anslå innbyggertallet i bygda i årene som kommer. Hans mener de bør velge en lineær modell. Grete er ikke enig.

a)

- 1) Tegn av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Fyll inn tallene som skal stå i resten av de hvite feltene.
- 2) Bruk opplysningene i tabellen. Argumenter for at Hans og Grete ikke bør velge en lineær modell, og foreslå hvilken type modell de bør velge.

La  $x$  være antall år etter 2005, og la  $f(x)$  være innbyggertallet i bygda.

b) Bruk regresjon til å finne den modellen du foreslo i a).

c) 1) Hva vil innbyggertallet i bygda være i 2020 ifølge modellen du fant i b)?

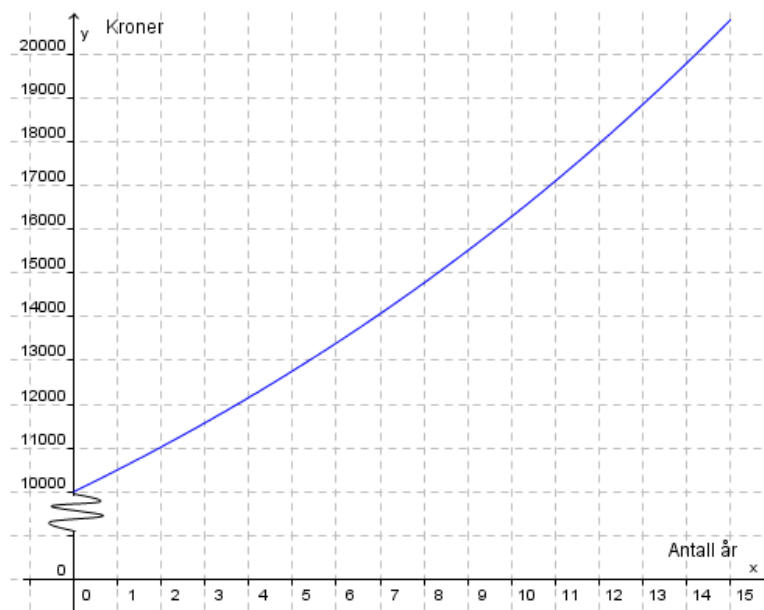
2) Hvor lang tid vil det gå før innbyggertallet er under 100 ifølge denne modellen?

Hans lager likevel en lineær modell. Han finner at  $y = -62x + 635$ .


d) 🤔 Vurder om denne modellen kan brukes til å beskrive innbyggertallet i bygda i årene fram til 2020.

## E10

(høst 2012 Del 2)



Guri setter et pengebeløp i banken. Grafen ovenfor viser hvordan beløpet vokser de 15 første årene. Vi antar at renten er den samme hvert år.

- a)  Sett opp et matematisk uttrykk som kan være en modell for hvor mye penger Guri har i banken etter  $x$  år.
- b) Hvor mye penger vil Guri ha i banken etter 20 år ifølge modellen du satte opp i a)? Når vil beløpet hun har i banken, passere 50 000 kroner ifølge modellen?

### E11

vår 2011, Del 2)

Per prøver å finne en sammenheng mellom diameteren og volumet til kuler. Han måler diameter og volum for noen kuler av ulik størrelse. Se tabellen nedenfor.

Diameter (cm)	3,0	6,0	10,0	16,0	26,0
Volum ( $\text{cm}^3 = \text{mL}$ )	14	113	525	2 145	9 200

- a) 1) Bruk regresjon til å vise at funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = 0,52 \cdot x^{3,0}$  er en god modell for sammenhengen mellom diameteren,  $x$ , og volumet,  $f(x)$ , til kuler.  
2) Tegn grafen til funksjonen  $f$ .
- b) Finn diameteren til en kule med volum 1000 mL.

Per lærte allerede i grunnskolen at formelen for volumet av en kule er  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  der  $r$  er radius i kulen.

- c) Stemmer resultatet fra a) med denne formelen? Forklar.

### E12

(høst 2011, del 2)

Haile Gebrselassie fra Etiopia har vært en av verdens beste langdistanseløpere. I tabellen nedenfor ser du hans beste tider på noen distanser.

Distanse $x$ (i meter)	1 500	3 000	5 000	10 000	15 000	16 093	25 000	42 195
Tid $T$ (i minutter)	3,550	7,417	12,656	27,033	41,633	44,400	71,617	123,988


- a) Bruk regresjon til å vise at  $T = 1,44 \cdot 10^{-3} \cdot x^{1,07}$  er en modell for tiden  $T$  som funksjon av distansen  $x$  for Gebrselassies resultater.
- b) Tegn grafen til  $T$ .

c) Hvor lang tid vil Gebrselassie bruke på en halvmaraton (21097,5 m) ifølge modellen i a)?

Pete Riegel har laget en modell som viser sammenhengen mellom tiden  $T_1$  en løper bruker på en distanse  $D_1$ , og tiden  $T_2$  løperen bruker på en distanse  $D_2$ .

Modellen ser slik ut:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1,06}$$

- d)  Ta utgangspunkt i tiden Gebrselassie bruker på 25 000 m, og regn ut hvor lang tid han vil bruke på en halvmaraton ifølge Riegels modell. Hvordan passer dette svaret med modellen du fant i a)?

### E13

(vår 2013, Del 2)

Bilmerke	Volvo
Bilmodell	V50
Nybilpris i 2006	299 990
Antatt verdi i 2011	171 000
Verditap	128 900
Verditap årlig	25 780

I 2011 kjøpte Helene en bruktbil. Hun fant da tabellen ovenfor på Internett. Alle beløp er oppgitt i kroner.

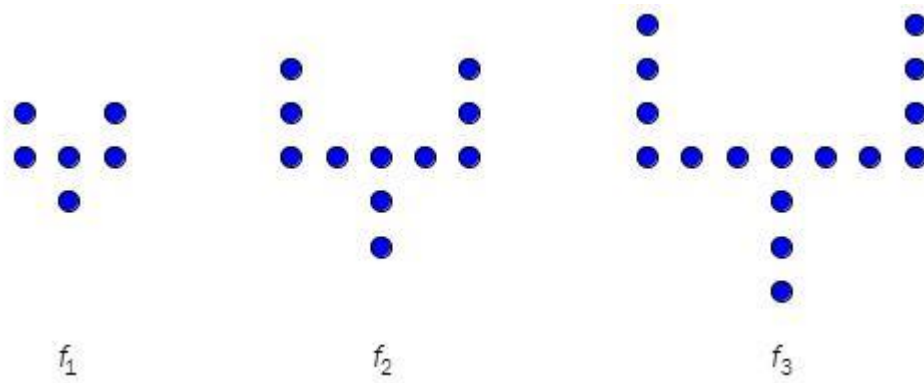
- a) Forklar at det årlige verditapet på bilen er beregnet ved hjelp av en lineær modell og bestem denne modellen.

Helene lurer på om det vil være mer realistisk å bruke en eksponentiell modell.

- b) Bestem en eksponentiell modell som totalt gir samme verditap på bilen fra 2006 til 2011 som den lineære modellen.
- c) Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den lineære modellen?  
Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den eksponentielle modellen?

**E14**

(høst 2012, del 1)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt  $f_1$ ,  $f_2$  og  $f_3$ .

- Følg samme mønster, og tegn figuren  $f_4$ .  
Hvor mange perler vil det være i figuren  $f_5$  og i figuren  $f_6$ ?
- Sett opp en modell som viser antall perler i figuren  $f_n$ , uttrykt ved  $n$ .

Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren  $f_{36}$ .

- Hva er den største figuren  $f_n$  Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

## E15

(vår 2016, del 2)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1000 hPa (hektopascal)

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsider og se på noen modeller for hvor stort lufttrykket er  $x$  kilometer over havets overflate.



- a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell  $f$  der  $f(x) = 1000 \cdot 0,88^x$

Tegn grafen til  $f$  for  $0 \leq x \leq 10$ .

- b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modellen i  $f$ . Gi denne modellen navnet  $g$ . Tegn grafen til  $g$  for  $0 \leq x \leq 10$  i samme koordinatsystem som grafen til  $f$ .

- c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell  $h$ . Tegn grafen til  $h$  for  $0 \leq x \leq 10$  i samme koordinatsystem du har brukt tidligere i oppgaven. Kommenter siste setning i sitat 3.
- d) Bruk hver av de tre modellene  $f$ ,  $g$ , og  $h$  til å bestemme lufttrykket 8848 meter over havoverflaten. Sammenlikn svarene du får med sitat 4 og kommenter.



## Fasit

### Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a) ca. 0,95 kg b)  $v(x) = 0,19x + 0,4$

Oppgave 2 a) 94 grader b)  $T(x) = 100 - 3x$  ( $= -3x + 100$ ) c) 76 grader d) -20 grader

Oppgave 3 a)  $B(x) = 10000 \cdot 0,965^x$  b) ca. 65 timer

Oppgave 4 a)  $U(x) = \frac{30x + 200}{x}$  b) 10 par

Oppgave 5 b)  $V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x$  c)  $x = 10$  cm, 16 000 cm<sup>3</sup> (= 16 dm<sup>3</sup> = 16 liter)

Oppgave 6 a)  $f(x) = 0,024x + 3,3$  b) 4,8 millioner c) 0,024 millioner = 24 000 d) I 2060

Oppgave 7 a)  $f(x) \approx -0,012x^3 + 0,65x^2 - 3,1x + 7$  b) 60 c) 2002 – 2003 d) 2018

Oppgave 8 b)  $f(x) = 13,5x + 105$ , ca. 850 personer c)  $f(x) = 132 \cdot 1,049^x$ , ca. 1830 personer d) En tredobling passer best med den eksponentielle modellen.

Oppgave 9 a)  $y = 1,00 \cdot x^{1,50}$  b) Den gir 84,1 år c) 30,1

Oppgave 10 a) 9 c)  $2n + 1$  d) 49, 2 fyrstikker til overs

### Fasit eksamensoppgaver

E2. a) 1) 26005 øre = 260,05 kr 2) 324552 øre = 3245,52 kr c) Modell 1

E3. a) 1) 196 mg 2) 87 mg b) 1) 307 mg 2) 341 mg

E5. a) 27,0 cm c)  $y = (x - 32) \cdot 0,66 + 21,75$  c) 35

E6 a)  $f(x) = 2,26x + 100,5$  b) 172,7 c) 222,4

E8. b)  $f(x) = -1,00x^3 + 10,4x^2 + 20,9x + 14,6$  c) Fra juni til oktober

E9 b) 1,6 % c) 1981 d) ca. 44 år e) Modellen gir høyere verdier enn FN's prognoser

E10. b)  $f(x) = 650 \cdot 0,848^x$  c) 1) 54 2) ca. 11 år

E10a)  $y = 10000 \cdot 1,05^x$  b) 26530 kr c) Etter 33 år

E11 b) 12,4 cm

E12 c) 61,0 min d) 59,8 min.

E13 b)  $299900 \cdot 0,894^x$  c) 119 000 kr 136 000 kr.

E14 a) 26 31 b)  $f_n = 5n + 1$  c)  $f_{199}$

E15a)  $V_f = 100 \% - 12 \% = 88 \% = 0,88$ . Startverdi = 1000, så derfor  $1000 \cdot 0,88^x$

b) Høyde:  $0 + 5,5 = 5,5$ .  $5,5 + 5,5 = 11$ .  $11 + 5,5 = 16,5$

Luftrykk:  $1000/2 = 500$ .  $500/2 = 250$ .  $250/2 = 125$

c)  $h(x) = 1000 - 125x$ . Siste setning viser modellens begrensning

d) Ca. 325 hPa for f og g. ( $1000/3 = 333$ , så stemmer bra for f og g).

Negativ verdi for h, se c).

## Stikkordregister

Brøk		Regresjon	
Brøkdel som prosent.....	30	Eksponentiell funksjon .....	127
Diagrammer i Excel .....	54–58	Lineær funksjon .....	122
Funksjoner .....	84–108	Mønster i tall og figurer .....	132
Eksponentialfunksjoner .....	92	Polynomfunksjon .....	125
Graftolkning .....	85	Potensfunksjon.....	130
Lineære funksjoner.....	86; 90	Standardform .....	21
Polynomfunksjoner .....	96	Praktisk regning .....	24
Potensfunksjoner .....	102	Statistikk .....	52–67
Rotfunksjoner .....	102	Frekvenstabell.....	52
GeoGebra		Gjennomsnitt.....	60
Ekstremalpunkt.....	98	Gjennomsnitt i klassedelt materiale ....	66
Nullpunkt.....	99	Gruppedelt materiale.....	66
Skjæringspunkt.....	100	Klassedelt materiale.....	66
Konstantledd.....	90	Kumulativ frekvens.....	53
Matematiske modeller .....	116–33	Linjediagram .....	58
Potensregning .....	7	Median .....	61
Prosent		Median i klassedelt materiale .....	67
Finne førverdi .....	36	Relativ frekvens .....	52
Finne ny verdi.....	37	Relativ kumulativ frekvens.....	53
Flere prosentvise forandringer etter		Sektordiagram for hånd .....	59
hverandre .....	40	Sentralmål .....	60–62
Prosent som brøkdel .....	30	Sentralmål i Excel.....	64
Prosenttallet er oppgitt .....	34	Spredningsmål .....	63–64
Regne ut en prosent .....	30	Spredningsmål i Excel .....	64
Prosentfaktor .....	30	Standardavvik .....	64
Prosenttall.....	30	Stolpediagram .....	54
Regneregler		Søylediagram .....	<i>Se Stolpediagram</i>
Dividere potenser .....	8	Typetall .....	62
Divisjon av tall på standardform .....	23	Variasjonsbredde .....	63
Multiplikasjon av tall på standardform	23	Stigningstall .....	90
Multiplisere potenser.....	7	Store og små tall .....	21
Potens av brøk .....	15	Vekstfaktor.....	37
Potens av potens .....	10	Vekstfart	
Potens av produkt .....	15	Gjennomsnittlig vekstfart .....	106
Potenser .....	11	Konstant vekstfart.....	104
Potenser med flere grunntall .....	14	Momentan vekstfart .....	107