

# Matematikk 1P



**Hellerud videregående  
skole**


<b>Noen formler det er lurt å kunne...</b>	
Rektangel	$A = g \cdot h$
Trekant	$A = \frac{g \cdot h}{2}$
Parallelogram	$A = g \cdot h$
Trapes	$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$
Sirkel	$A = \pi \cdot r^2$
Prisme	$V = G \cdot h$
Sylinder	$V = \pi r^2 h$
Pytagoras' setning	$c^2 = b^2 + a^2$ , der $c$ er hypotenus, $a$ og $b$ er katetene i en rettvinklet trekant
Proporsjonalitet	Proporsjonale størrelser: $y = ax$ Omvendt proporsjonale størrelser: $y = \frac{k}{x}$
Rette linjer	$y = ax + b$
Vekstfaktor	$1 + \frac{p}{100}$ $1 - \frac{p}{100}$
Økonomi	Prisindeks: $\frac{\text{Pris}_1}{\text{Pris}_2} = \frac{\text{Indeks}_1}{\text{Indeks}_2}$ Kroneverdi: $\text{Kroneverdi} = \frac{100}{\text{Indeksen}}$ Reallønn: $\text{Lønn} \cdot \text{kroneverdi} = \frac{\text{Lønn} \cdot 100}{\text{Indeksen}}$

# Forord

Denne boka dekker læreplanen i Matematikk 1P. Stoffet og oppgavene er valgt ut med tanke på den type oppgaver som har vist seg å være ganske vanlige til eksamen i 1P.

Teorien er ganske kortfattet og er avbrutt av mange eksempler. Disse bør du studere nøye. Like etter et eksempel kommer som regel en eller flere øvingsoppgaver hvor du trenger den teorien som er brukt i dette eksemplet.

Til slutt i de fleste kapitlene er det eksamensoppgaver som kan løses hvis du behersker stoffet i dette og tidligere kapitler. Det er fasit på oppgavene helt til slutt i kapitlet.

Noe av teoristoffet og noen av oppgavene er merket med en “tenke-smiley”:  .

Dette stoffet vil kanskje mange synes er spesielt vanskelig. Hvis du vil ha karakter 3 eller bedre, må du også kunne løse en del oppgaver av en slik vanskegrad.

## Forord til 3. utgave:

I tillegg til normalt vedlikehold (oppdatering av teori og oppgaver) har vi satt inn et stikkordregister for de vanligste matematiske begrepene.

Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole  
Juni 2016

# Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk?

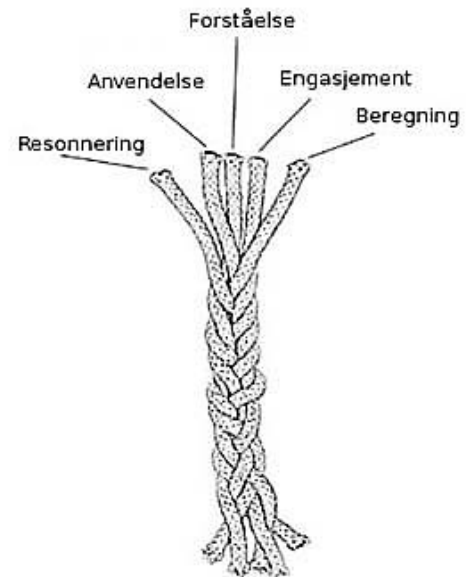
1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner

2. **Beregning:** Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt

3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk



**Figur 1:** Å være god i matematikk består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 117)

(Kilde: <http://www.matematikkenteret.no/content/4526/Hva-betyr-det-a-vare-god-i-matematikk>)

## Jo Boaler's 7 bud

### **1. Alle kan lære matematikk på høyeste nivå.**

- Det er ikke sann at noen er født med en «mattehjerne» - det handler om at alle kan lære hvis de vil gjøre jobben.

### **2. Å gjøre feil er verdifullt**

- Feil gjør at hjernen din vokser.  
Det er bra å streve og gjøre feil

### **3. Å stille spørsmål er viktig**

- Spør om det du lurer på, og svar på andre sine spørsmål.  
Spør deg selv: Hvorfor er dette riktig?

### **4. Matematikk handler om å være kreativ, og skal gi mening**

- Finn mønstre og sammenhenger, og diskuter disse med andre

### **5. Matematikk er å se sammenhenger og å diskutere**

- I matematikk kan det samme sies på ulike måter, f.eks. ord, bilde, graf, funksjon. Finn sammenhengen mellom dem, og diskuter hvilken som passer best i de ulike situasjonene!

### **6. Matematikktimene handler om å lære, ikke prestere**

- Det tar tid å lære matematikk, og det handler om innsats

### **7. Det er viktigere å tenke grundig enn fort.**

- Det handler om å forstå noe godt, og det er ikke viktig å være rask

(fritt oversatt fra Jo Boaler's «Positive Norms to Encourage in Math Class»)

# Innhold

Forord .....	2
Trådmodellen – Hva vil det si å være god i matematikk? .....	3
Jo Boaler's 7 bud .....	4
Innhold .....	5
Kapittel 1. Tallregning .....	7
Blandede oppgaver .....	25
Fasit .....	28
Kapittel 2. Algebra .....	30
Blandede oppgaver .....	40
Fasit øvingsoppgaver .....	44
Fasit blandede oppgaver .....	44
Kapittel 3. Praktisk regning med målenheter .....	45
Blandede oppgaver .....	61
Eksamensoppgaver .....	62
Fasit øvingsoppgaver .....	70
Fasit blandede oppgaver .....	71
Fasit eksamensoppgaver .....	71
Kapittel 4. Prosentregning .....	72
Blandede oppgaver .....	87
Fasit .....	92
Kapittel 5. Lengder og areal .....	93
Blandede oppgaver .....	111
Eksamensoppgaver .....	114
Fasit blandede oppgaver .....	120
Fasit eksamensoppgaver .....	120
Kapittel 6. Volum og overflate .....	121
Eksamensoppgaver .....	138
Fasit øvingsoppgaver .....	147
Fasit eksamensoppgaver .....	147
Kapittel 7. Økonomi .....	148
Eksamensoppgaver .....	173
Fasit øvingsoppgaver .....	186

Fasit eksamensoppgaver .....	186
Kapittel 8. Funksjoner .....	188
Eksamensoppgaver .....	218
Fasit øvingsoppgaver .....	227
Fasit eksamensoppgaver .....	229
Kapittel 9. Sannsynlighetsregning.....	230
Eksamensoppgaver .....	249
Fasit øvingsoppgaver .....	259
Fasit eksamensoppgaver .....	260
Stikkordregister .....	262

# Kapittel 1. Tallregning



## Mål for Kapittel 1, Tallregning.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og uten digitale verktøy, presentere resultatene og vurdere hvor rimelige de er
- tolke, bearbeide, vurdere og diskutere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske fremstillinger
- forenkle flerleddet uttrykk og løse ligninger av første grad og enkle potensligninger

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- hvordan jeg forkorter en brøk
- hvordan de fire regneartene blir anvendt i brøkrekning
- hvordan de fire regneartene blir anvendt på heltall
- hvordan jeg regner med negative tall

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

- hvorfor en brøk kan forkortes
- hvorfor et desimaltall er lik/ulik en brøk
- hvordan jeg regner med negative tall

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- gi eksempler på bruk av brøk og desimaltall i hverdagen
- forklare i hvilke tilfeller en må vite omgjøring mellom brøk og desimaltall
- lage og løse flerleddet uttrykk med ulike regnearter
- løse og lage tekstoppgaver knyttet til tallregning
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst



## Utforskende oppgave – svaret er 7

Lag regnestykker hvor svaret blir 7. Klarer du å lage forskjellige regnestykker som inneholder:

- hele tall?
- desimaltall? Hvor mange desimaler klarer du?
- negative tall?
- brøk?
- potens?
- kvadratrot?
- overslag?
- algebra?

Gjør dette med hver av de fire regnearterne. Til slutt kan du lage regnestykker som inneholder flere regnearter.

## 1. Brøk

### 1.1 Hva er brøk?

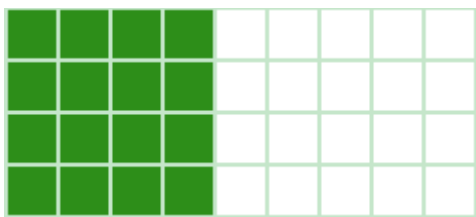
En stor kake er delt i 36 like store biter. De hvite firkantene viser de bitene som er spist opp:



Hver bit kalles en 36-del av kaken. Du kan telle på tegningen at 12 av 36 slike biter er spist.

Hvor stor del av kaken som er spist skriver vi som *brøken*  $\frac{12}{36}$ .

Tallet over brøkstreken kaller vi *telleren*, og tallet under brøkstreken kaller vi *nevneren* i brøken.

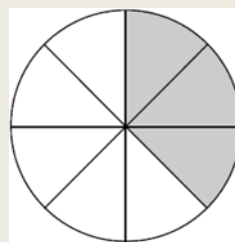


Senere er det spist 8 kakestykker til (de røde på den øverste figuren), til sammen 20 av 36 kakestykker. Dette kan vi skrive som regnestykket  $\frac{12}{36} + \frac{8}{36} = \frac{20}{36}$ .

### Oppgave 1

En kake er delt i like store biter slik figuren viser. De hvite feltene markerer de bitene som er spist.

- Hvor stor del av kaken er spist?
- Hvor stor del av kaken er igjen?



Skriv begge svarene som brøker.

### 1.2 Forkorting av brøk

Mange brøker kan *forkortes*. Det gjør vi ved å dividere (dele) teller og nevner med *samme* tall.

Her er brøken fra kakeeksemplet på forrige side.

#### Eksempel 1

$$\begin{aligned} \frac{20:2}{36:2} &= \frac{10}{18} \\ \frac{10:2}{18:2} &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Nå er det ikke mulig å dele videre så brøken er forkortet så langt det går an. Vi har spist  $\frac{5}{9}$  av kaken.

### Oppgave 2

Forkort brøkene  $\frac{6}{8}$  og  $\frac{15}{25}$ .

### 1.3 Utviding av brøk

Det motsatte av forkorting kalles *utviding*. Da *multipliserer* (ganger) vi teller og nevner med *samme* tall.

### Eksempel 2

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

### Oppgave 3

Utvid brøken  $\frac{3}{4}$  med 3.

Hvis vi skal *sammenligne* brøker, må vi sørge for at alle nevnerne er like:

### Eksempel 3

Ordne brøkene  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$  og  $\frac{3}{4}$  i stigende rekkefølge. Det betyr at den minste skal stå først.

Minste felles nevner blir her  $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ . Vi utvider brøkene slik at nevneren i alle blir 60:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{48}{60}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{45}{60}$$

Brøkene i stigende rekkefølge er  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

### Oppgave 4



Skriv disse brøkene i stigende rekkefølge ved å utvide dem til felles nevner:  $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}$

## 1.4 Addisjon av brøker

For å kunne legge sammen brøker, må brøkene bestå av like store “biter”. De må altså ha *samme* nevner. Du så et eksempel på det i avsnitt 1.1 da vi la sammen kakestykker. Hvis nevnerne er like, legger vi sammen tellerne.

### Eksempel 4

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$$

Hvis nevnerne *ikke* er like, må vi utvide den ene eller begge brøkene slik at de får samme nevner (felles nevner).

### Eksempel 5

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

### Oppgave 5

a) Legg sammen  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$

b) Legg sammen  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

c) Legg sammen  $\frac{5}{3} + \frac{3}{4}$



### 1.5 Brøkdel av et tall

#### Eksempel 6

Brødet til høyre er delt i 20 skiver.

$\frac{2}{5}$  av skivene har mugnet.

Hvor mange skiver har mugnet?

Vi regner slik:

$$20 \cdot \frac{2}{5} = \frac{20 \cdot 2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Vi kan sjekke svaret ved å finne ut om 8 av 20 skiver virkelig er  $\frac{2}{5}$  av skivene:

$$\frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$$

Det stemmer.



## Oppgave 6

En klasse har 28 elever.  $\frac{2}{7}$  av elevene fikk bedre enn 3 på en matematikkprøve. Hvor mange elever fikk bedre enn 3?

## 1.6 Multiplikasjon av brøk

Du kan forstå framgangsmåten ved å se på de to eksemplene under.

### Eksempel 7

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{6}{28} = \frac{6:2}{28:2} = \frac{3}{14}$$

## Oppgave 7

Regn ut  $4 \cdot \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ ,  $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$ .

## 2. Desimaltall

### 2.1 Hva er et desimaltall?

*Desimaltall* er tall som inneholder komma. Vi repeterer først hva et *heltall* med flere siffer egentlig betyr.

Tallet 463 betyr  $4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$ , altså summen av 4 hundreder, 6 tiere og 3 enere.

På liknende måte betyr 0,26 summen av 2 *tideler* og 6 *hundredeler*. Altså  $0,26 = \frac{2}{10} + \frac{6}{100}$ .

Vi kan gjøre om tidelene til hundredeler slik at  $0,26 = \frac{2}{10} + \frac{6}{100} = \frac{20}{100} + \frac{6}{100} = \frac{26}{100}$ .

#### Eksempel 8

Tallet 6805,304 betyr egentlig  $6 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$ .

### Oppgave 8

a) Hva betyr egentlig tallet 7068,057?

b) Skriv  $3 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$  som desimaltall.

Hundredeler kalles også *prosent*. Prosenttegnet (%) betyr altså hundredeler. Da kan vi skrive samme tallet på tre måter, slik:

$$0,26 = \frac{26}{100} = 26\%$$

### Oppgave 9

Skriv tallene 0,75, 0,60 og 0,05 på to andre måter.

Vær klar over at 0,6 og 0,60 er samme tallet!

### 2.2 Store tall

Disse tallene må du kjenne ved *navn*:

1 million: 1000 000 (6 nuller)

1 milliard: 1000 000 000 (9 nuller)

Amerikanerne kaller milliard for "billion". På norsk er 1 billion et ett-tall med 12 nuller bak.

### 3. Brøker som desimaltall

Det er ikke bare tideler, hundredeler, tusendeler osv. som kan skrives som desimaltall. *Alle* brøker kan skrives på denne måten. Noen brøker er ganske enkle å skrive om hvis vi kan litt hoderegning.

#### Eksempel 9

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0,25$$

#### Oppgave 10

Gjør om disse brøkene til desimaltall:  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ .

Du bør lære deg disse sammenhengene:

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\%$$

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,667 = 66,7\%$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

Tegnet  $\approx$  betyr “omtrent lik” eller “tilnærmet lik”.

## 4. Addisjon av hele tall

Å *addere* to tall betyr å legge dem sammen. Vi sier så at vi finner summen av tallene. Vi forutsetter at du er sikker på å legge sammen ensifrede tall, slik at du for eksempel med en gang kan si at  $7 + 8 = 15$ . Hvis du ikke er god på dette, bør du trene, ellers vil det være noen del 1-oppgaver (dvs. uten kalkulator) som du ikke vil få helt til. Det finnes mange apper til mobilen som lar deg trene på hoderegning.

Hvis du skal legge sammen *tosifrede* tall i hodet, adderer du først tierne, så enerne, og til slutt finner du summen av tierne og enerne.

### Eksempel 10

Hvor mye er  $34 + 25$ ? Ikke bruk kalkulator.

$30 + 20 = 50$ ,  $4 + 5 = 9$ . Altså er  $34 + 25 = 59$ .

### Oppgave 11

Hvor mye er  $45 + 32$ ?  $18 + 61$ ?  $34 + 58$ ?  $120 + 240$ ?  $1450 + 320$ ? Sjekk hoderegningen din med kalkulator hvis du er usikker på om du har regnet riktig.

## 5. Subtraksjon av hele tall

Å *subtrahere* to tall betyr å trekke det andre tallet fra det første. Vi finner da *differensen* mellom tallene. Dette blir det samme som omvendt addisjon. For eksempel er  $13 - 8 = 5$  fordi  $5 + 8 = 13$ . Subtraksjon av små eller "greie" tall bør du også kunne greie uten kalkulator.

### Oppgave 12

Regn ut uten kalkulator.  $9 - 5$ ,  $16 - 7$ ,  $23 - 8$ ,  $45 - 15$ ,  $45 - 17$ ,  $100 - 4$ ,  $100 - 16$ ,  $1200 - 350$ .

## 6. Multiplikasjon av hele tall

Multiplikasjon kaller vi også ganging. Tallene som multipliseres med hverandre, kalles *faktorer* i regnestykket. Resultatet av en multiplikasjon kalles et *produkt*.

$$3 \cdot 12 = 36$$

Multiplikasjon av hele tall er det samme som gjentatte addisjoner.  $4 \cdot 3$  betyr  $4 + 4 + 4$ , som blir 12.  $3 \cdot 4$  betyr  $3 + 3 + 3 + 3$ , som også blir 12. Når vi multipliserer to tall, spiller det altså ingen rolle hvilket tall vi skriver først.



Nedenfor ser du “den lille multiplikasjonstabellen”. Den gir svaret på alle multiplikasjoner fra 1·1 opp til 10·10. Denne bør du absolutt kunne! Fordi  $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$  osv. trenger du egentlig ikke å kunne hele tabellen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Den lille multiplikasjonstabellen

Ofte har du bruk for å multiplisere med 10, 100 eller 1000 uten kalkulator. Her er eksempler som viser hvordan du gjør det.

$$18 \cdot 10 = 180$$

$$24,6 \cdot 10 = 246$$

$$32 \cdot 100 = 3200$$

$$6,7 \cdot 100 = 670$$

$$57 \cdot 1000 = 57000$$

$$74,5 \cdot 1000 = 74500$$

### Oppgave 13

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$$36 \cdot 10, \quad 8,4 \cdot 10, \quad 60 \cdot 100, \quad 63,4 \cdot 100, \quad 25 \cdot 1000, \quad 84,6 \cdot 1000$$

Hvis du kan multiplikasjonstabellen, bør du også kunne utføre multiplikasjoner som ligner på disse:

$$30 \cdot 4 = 120$$

$$50 \cdot 30 = 1500$$

$$70 \cdot 80 = 5600$$

$$600 \cdot 3 = 1800$$

$$400 \cdot 50 = 20000$$

$$200 \cdot 800 = 160000$$

#### Oppgave 14

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$$20 \cdot 7$$

$$60 \cdot 60$$

$$90 \cdot 80$$

$$300 \cdot 8$$

$$500 \cdot 60$$

$$300 \cdot 700$$

Her er et eksempel på hvordan du kan utføre mer kompliserte multiplikasjoner uten kalkulator.

Vi skal ta  $45 \cdot 6$ . Vi må huske at  $45 = 40 + 5$ . Da kan vi gange på følgende måte:

	40	5	SUM
6	240	30	$240 + 30 = 270$

Vi skal ta  $15 \cdot 23$ .  $15 = 10 + 5$  og  $23 = 20 + 3$

	10	5	SUM
20	200	100	$200 + 100 = 300$
3	30	15	$30 + 15 = 45$

Totalt får vi da  $300 + 45 = 345$

#### Oppgave 15

Multipliser uten kalkulator. Er du usikker på svaret, kan du sjekke forslaget ditt med kalkulator.

$$12 \cdot 2, \quad 5 \cdot 31, \quad 6 \cdot 43, \quad 8 \cdot 55, \quad 12 \cdot 12, \quad 15 \cdot 38$$

## 7. Divisjon av hele tall

Divisjon, også kalt deling, er den motsatte operasjonen av multiplikasjon. For å kunne dividere små hele tall i hodet, må vi kunne multiplikasjonstabellen.

Divisjon skriver vi for eksempel slik,  $27 : 9$ , og vi leser det som “27 delt med 9” eller “27 dividert med 9”.

Hvis det er hele tall som skal divideres, kan vi også skrive divisjonsstykket som en brøk:  $\frac{27}{9}$ .

### Eksempel 11

$$63 : 7 = 9 \text{ fordi } 9 \cdot 7 = 63$$

$$1200 : 10 = 120 \text{ fordi } 120 \cdot 10 = 1200$$

### **Oppgave 16**

Utfør disse divisjonene uten kalkulator:

$$12 : 2, 18 : 3, 25 : 5, 36 : 9, 49 : 7, 56 : 8, 63 : 9, 72 : 9, 81 : 9$$

I praksis er en brøk et divisjonsstykke hvor vi ikke utfører divisjonen. Det betyr at  $\frac{3}{5}$  og  $3 : 5$

er samme tallet (0,6). Brøker med litt “stygge” tall kan vi regne om til desimaltall ved å dividere teller med nevner på kalkulatoren.

### Eksempel 12

$$\frac{9}{17} = 9 : 17 \approx 0,529$$

Ofte har du bruk for å dividere med 10, 100 eller 1000 uten kalkulator. Her er noen eksempler som viser hvordan det gjøres.

$$60 : 10 = 6$$

$$60 : 100 = 0,6$$

$$60 : 1000 = 0,06$$

$$76 : 10 = 7,6$$

$$76 : 100 = 0,76$$

$$120 : 100 = 1,20$$

$$104,5 : 100 = 1,045$$

$$6500 : 10 = 650$$

$$75000 : 1000 = 75$$

$$4 : 10 = 0,4$$

$$6,5 : 100 = 0,065$$

## Oppgave 17

Utfør divisjonene uten kalkulator. Er du usikker kan du sjekke svarene dine på kalkulator.

30:10, 30:100, 46:10, 46:100, 115:10, 115:100, 250:1000, 7:10, 7:100, 12,5:10, 8,5:100



Her er tre eksempler som viser hvordan du kan utføre mer kompliserte divisjoner uten kalkulator.

$$\begin{array}{r} 125 : 5 = 25 \\ -10 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 : 5 = 91,2 \\ 45 \\ \hline 06 \\ 5 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

1. Her kan jeg ikke trekke ned flere tall.  
2. Da setter jeg et komma, og legger til en null.

$$\begin{array}{r} 23,5 : 5 = 4,7 \\ 20 \\ \hline 35 \\ 35 \\ \hline 0 \end{array}$$

Det neste jeg kommer til er et komma. Da skriver jeg det i svaret og fortsetter som vanlig

## 8. Praktisk tolkning av divisjon

Med ordet *størrelse* mener vi i matematikk noe som kan telles eller måles. De fleste størrelser har en *målenhet*. Enkle eksempler på størrelser er antall elever i en klasse, vekten av en pose epler, lengden av en kjøretur og temperaturen i en kaffekopp.

Svært ofte dividerer vi to størrelser med hverandre. Da får vi en ny størrelse, og det er viktig å forstå den praktiske tolkningen av denne størrelsen. *I regningen tar vi med målenheter både i regnestykket og svaret.* Ofte skriver vi regnestykket som en brøk fordi det ser mer oversiktlig ut enn å bruke divisjonstegn.

### Eksempel 13

En pose med 1,5 kg epler koster 34,50 kr. Hva er prisen for *en* kg epler (“kiloprisen”)?

Kiloprisen blir  $\frac{34,50 \text{ kr}}{1,5 \text{ kg}} = 23,00 \text{ kr/kg}$ . Legg merke til at vi ofte skriver kr/kg istedenfor  $\frac{\text{kr}}{\text{kg}}$ .

Vi leser det “kroner per kilogram”.

#### Eksempel 14

En pose med 1,5 kg epler koster 34,50 kr. Divider antall kg med prisen og tolk svaret.

$$\frac{1,5 \text{ kg}}{34,50 \text{ kr}} = 0,043 \text{ kg/kr. Dette viser at du får kjøpt } 0,043 \text{ kg epler for } \textit{en} \text{ krone.}$$

#### Eksempel 15

Du har malt et rom hvor veggene har et samlet areal på  $40 \text{ m}^2$ . Det gikk med 5 liter (L) maling. Divider malingsforbruket med arealet og tolk svaret.

$$\frac{5 \text{ L}}{40 \text{ m}^2} = 0,125 \text{ L/m}^2. \text{ Dette viser at det gikk med } 0,125 \text{ L maling for å male } \textit{en} \text{ kvadratmeter.}$$

#### Eksempel 16

Du har malt et rom hvor veggene har et samlet areal på  $40 \text{ m}^2$ . Det gikk med 5 liter (L) maling. Divider arealet med malingsforbruket og tolk svaret.

$$\frac{40 \text{ m}^2}{5 \text{ L}} = 8 \text{ m}^2 / \text{L}. \text{ Dette viser at med } \textit{en} \text{ liter maling kunne du ha malt } 8 \text{ m}^2 \text{ vegg.}$$

#### **Oppgave 18**

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Regn ut hvor mye 1 L jord veier. Husk å ta med målenhetene i regnestykket.

#### **Oppgave 19**

En sekk med 25 L plantejord veier 18 kg. Divider volumet med vekten og tolk svaret.

#### **Oppgave 20**

Du har kjøpt 7,4 hg (hektogram = 100 g) smågodt for 51,06 kr. Regn ut hektoprisen for smågodt.

#### **Oppgave 21**

Du har kjøpt 7,4 hg smågodt for 51,06 kr. Divider mengden smågodt med prisen og tolk svaret.

#### **Oppgave 22**

Temperaturen i en kopp med kaffe synker fra 90 grader til 70 grader på 10 min. Regn ut hvor mye temperaturen synker på ett minutt.

#### **Oppgave 23**

Temperaturen i en kopp med kaffe synker fra 90 grader til 70 grader på 10 min. Divider tiden med temperaturforandringen og tolk svaret.

## 9. Negative tall

Når vi adderer (+) tall eller subtraherer (-) tall, beveger vi oss opp og ned på tallinja. Vi beveger oss oppover på tallinja ved addisjon (+) og nedover ved subtraksjon (-). Ofte kan det være lurt å tenke på tallinja som gradestokken i et termometer.

### Eksempel 17

$$(-3) + 6 = 3$$

Vi starter på -3 på tallinja og beveger oss 6 plasser oppover, fordi det er addisjon. Legg merke til at vi ofte skriver parenteser rundt negative tall som står først i et regnestykke.

### Eksempel 18

$$4 - 6 = -2$$

Vi starter på 4 på tallinja og beveger oss 6 nedover, fordi det er subtraksjon

Noen kalkulatorer skiller mellom *fortegnsminus* (her skrevet som -) og “*trekke-fra minus*” (her skrevet som -). Da må du passe på å bruke riktig tegn!

Av og til skal vi trekke fra et *negativ* tall. Da må vi passe ekstra godt på! Å trekke fra et negativt tall blir nemlig det samme som å legge til et positivt tall. Dette får du bruk for i potensregningen i 2P.

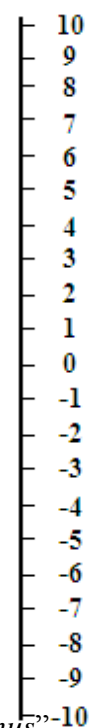
### Eksempel 19

$$4 - (-3) = 4 + 3 = 7$$

$$-2 - (-5) = -2 + 5 = 3$$

### Oppgave 24

- a)  $7 - 4 =$
- b)  $(-5) + 4 =$
- c)  $6 - 9 =$
- d)  $(-4) + 6 =$
- e)  $(-2) - 7 =$
- f)  $(-5) + 3 =$
- g)  $6 - (-2) =$
- h)  $-4 - (-3) =$



Ved multiplikasjon (·) eller divisjon (: ) av to tall gir like fortegn positivt svar og ulike fortegn gir negativt svar.

#### Eksempel 20

$$(-4) \cdot 3 = -12$$

$$\frac{-4}{-2} = 2$$

$$(-4) \cdot (-2) \cdot (-1) = 8 \cdot (-1) = -8$$

Legg merke til at vi skriver parenteser rundt et negativt tall i et regnestykke for å unngå at to regnetegn eller fortegn blir stående like etter hverandre.

#### Oppgave 25

$$\frac{27}{-9} =$$

$$(-7) \cdot (-3) =$$

$$\frac{-9}{-3} =$$

$$4 \cdot (-8) =$$

$$(-4) \cdot (-2) \cdot (-6) =$$

$$(-3) \cdot 8 \cdot (-1) \cdot 2 =$$

## 10. Potenser

Oftest har vi bruk for å multiplisere samme tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik eksemplene under viser.

#### Eksempel 21

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

$$x \cdot x = x^2$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*. I potensen  $3^2$  kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.

**Advarsel:** Du må ikke blande sammen  $3^2$ , som betyr  $3 \cdot 3$  og er lik 9, med  $3 \cdot 2$ , som er lik 6!!

## Oppgave 26

Regn ut potensene uten kalkulator:

$$3^2, 2^3, 5^2, (-4)^2$$

## Oppgave 27

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$$2,5^2, 12^3$$

## 11. Kvadratrot

Kvadratrotten av et tall skriver vi med symbolet  $\sqrt{\quad}$ .

### Eksempel 22

$$\sqrt{9} = 3 \text{ fordi } 3^2 = 9$$

$$\sqrt{100} = 10 \text{ fordi } 10^2 = 100$$

$$\sqrt{50} \approx 7,071 \text{ fordi } 7,071^2 \approx 50$$

## Oppgave 28

Regn ut uten å bruke kalkulator:

$$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}, \sqrt{64}, \sqrt{81}, \sqrt{400}, \sqrt{10000},$$

## Oppgave 29

Finn ut hvordan du beregner kvadratrot på kalkulatoren og regn ut:

$$\sqrt{30}, \sqrt{600}, \sqrt{1000}$$

## 12. Regnerekkefølgen

I regnestykker hvor vi skal utføre flere forskjellige typer regneoperasjoner, må vi utføre regneoperasjonene i en *bestemt rekkefølge*.

### Regneoperasjonenes rekkefølge

1. Parenteser (hvis det er noen)
2. Potenser
3. Multiplikasjon ( $\cdot$ ) og divisjon ( $:$ )
4. Addisjon (+) og subtraksjon (-)

### Eksempel 23

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14 \quad (\text{nei, det blir ikke } 20)$$



Eksempel 24

$$3 \cdot (4 - 2) + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 6 + 9 = 15$$

Eksempel 25

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

**Oppgave 30**

Regn ut

$$3 + 5 \cdot 4$$

$$3 \cdot 2^2$$

$$4 \cdot (2 + 6) - 2 \cdot 3$$

## Blandede oppgaver

### B1

Regn ut og skriv svaret som en brøk. Forkort svaret hvis det er mulig.

- a)  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$    b)  $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$    c)  $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$    d)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$    e)  $\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$    f)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$   
g)  $3 \cdot \frac{4}{7}$    h)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$    i)  $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}$    j)  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$

### B2

Skriv disse brøkene som desimaltall:

- a)  $\frac{3}{4}$    b)  $\frac{4}{5}$    c)  $\frac{3}{10}$    d)  $\frac{45}{100}$    e)  $\frac{2}{3}$    f)  $\frac{5}{11}$

### B3

Regn ut uten kalkulator.

- a)  $7 \cdot 3$    b)  $8 \cdot 7$    c)  $50 \cdot 6$    d)  $35 \cdot 4$    e)  $250 \cdot 8$    f)  $56 \cdot 10$    g)  $0,58 \cdot 10$    h)  $0,24 \cdot 100$

### B4

Regn ut uten kalkulator.

- a)  $24 : 6$    b)  $28 : 2$    c)  $64 : 8$    d)  $50 : 2$    e)  $60 : 10$    f)  $75 : 10$    g)  $115 : 100$   
h)  $4 : 8$    i)  $3 : 5$    j)  $3,6 : 4$    k)  $3 : 0,5$

### B5

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

- a)  $63 \cdot 5$    b)  $274 \cdot 6$    c)  $2543 \cdot 8$

### B6

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

- a)  $71 \cdot 23$    b)  $548 \cdot 63$    c)  $474 \cdot 557$

### B7

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

- a)  $12,3 \cdot 0,3$   
b)  $2,5 \cdot 0,35$   
c) 1 kg druer koster 23,90 kr. Hvor mye koster 2,5 kg?

**B8**

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren.

- a)  $855 : 5$
- b)  $1536 : 16$
- c)  $14388 : 22$

**B9**

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren. (Husk å sette komma i svaret når du begynner å flytte ned tall bak kommaet.)

- a)  $63 : 5$
- b)  $79 : 8$
- c)  $175 : 4$

**B10**

Regn ut uten kalkulator. Sjekk gjerne svaret på kalkulatoren. (Multipliser begge tallene med 10 eller 100 for å få bort kommaet i tallet vi deler med.)

- a)  $15 : 2,5$
- b)  $90 : 3,6$
- c)  $448,9 : 3,35$

**B11**

- a) En bil brukte 40 L bensin på å kjøre 620 km (som er lik 62 mil). Hvor mye bensin brukte bilen per mil? Husk å ta med målenheter i regnestykket og svaret.
- b) Divider kjørelengden i mil med bensinforbruket og gi en praktisk tolkning av svaret.

**B12**

Regn ut.

- a)  $5 - 3$    b)  $5 - 5$    c)  $5 - 7$    d)  $-4 + 6$    e)  $-4 + 2$    f)  $-4 - 3$    g)  $4 - (-3)$    h)  $-2 - (-5)$

**B13**

Regn ut.

- a)  $(-3) \cdot 4$    b)  $(-3) \cdot (-4)$    c)  $3 \cdot (-4)$    d)  $\frac{-8}{2}$    e)  $\frac{10}{-5}$    f)  $\frac{-12}{-4}$

**B14**

Regn ut uten kalkulator.

- a)  $1^2$    b)  $7^2$    c)  $9^2$    d)  $100^2$    e)  $(-4)^2$    f)  $-4^2$

**B15**


(Eksamen høsten 2010, Del 2)

Byens beste bilpakke – Pakkepris: 16 900 kroner

Pakken består av:

- 13 kjøretimer
- sikkerhetskurs på bane
- sikkerhetskurs på vei
- 2 veiledningstimer
- leie av bil på 1 førerprøve

Kjøretimer utover pakken koster 550 kroner per time.



På nettsidene til en trafikkskole fant Anne og Jon tilbudet ovenfor. Begge benyttet seg av tilbudet.

- a) Anne hadde til sammen 21 kjøretimer. Hvor mye betalte hun for kjøreopplæringen?
- b) 🤔 Jon betalte 29 000 kroner for kjøreopplæringen. Hvor mange kjøretimer hadde han?

**B16**

Regn ut med kalkulator.

- a)  $1,5^2$    b)  $2,5^2$    c)  $(-6,5)^2$

**B17**

Regn ut uten kalkulator.

- a)  $\sqrt{1}$    b)  $\sqrt{16}$    c)  $\sqrt{900}$    d)  $\sqrt{1000000}$    🤔 e)  $\sqrt{5,6^2}$    🤔 f)  $(\sqrt{8})^2$

**B18**

Regn ut med kalkulator.

- a)  $\sqrt{10}$    b)  $\sqrt{1000}$    c)  $\sqrt{45,6}$

**B19**

Regn ut uten å bruke kalkulator.

- a)  $4+3\cdot 2$    b)  $2\cdot 3^2$    🤔 c)  $2\cdot(15-3\cdot 2^2)+6$

## Fasit

Fasit øvingsoppgaver	
<p>Oppgave 1</p> $\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8}$ <p>a) <math>\frac{5}{8}</math> b) <math>\frac{3}{8}</math></p> <p>Oppgave 2</p> $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$ <p>Oppgave 3</p> $\frac{9}{12} \left( = \frac{3}{4} \right)$ <p>Oppgave 4</p> $\frac{3}{4} = \frac{30}{70}, \quad \frac{1}{2} = \frac{35}{70}, \quad \frac{3}{5} = \frac{42}{70}$ <p>Oppgave 5</p> $\frac{7}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{29}{12}$ <p>a) <math>\frac{7}{5}</math> b) <math>\frac{3}{4}</math> c) <math>\frac{29}{12}</math></p> <p>Oppgave 6</p> <p>8</p> <p>Oppgave 7</p> $\frac{8}{3}, \frac{6}{35}, \frac{30}{15} = 2$ <p>Oppgave 8</p> <p>a)</p> $7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 8 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$ <p>3,531</p> <p>Oppgave 9</p> $0,75 = \frac{75}{100} = 75\%, \quad 0,60 = \frac{60}{100} = 60\%, \quad 0,05 = \frac{5}{100} = 5\%$ <p>Oppgave 10</p> $\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{1}{5} = 0,2$ <p>Oppgave 11</p> <p>77 99 92 360 1770</p> <p>Oppgave 12</p> <p>2 9 15 30 28 96 84 850</p> <p>Oppgave 13</p> <p>360 84 6000 6340 25000 84600</p> <p>Oppgave 14</p> <p>140 360 720 2400 3000 210000</p> <p>Oppgave 15</p> <p>24 155 258 440 144 570</p>	<p>Oppgave 16</p> <p>6 6 5 4 7 7 7 8 9</p> <p>Oppgave 17</p> <p>3 0,3 4,6 0,46 11,5 1,15 0,250 0,7 0,07 1,25 0,085</p> <p>Oppgave 18</p> <p>0,72 kg/L</p> <p>Oppgave 19</p> <p>1,39 L/kg. Volumet til en liter jord.</p> <p>Oppgave 20</p> <p>6,90 kr/kg</p> <p>Oppgave 21</p> <p>0,145 hg/kr. Hvor mange hg smågodt du får for 1 kr.</p> <p>Oppgave 22</p> <p>2 grader/min</p> <p>Oppgave 23</p> <p>0,5 min/grad. Tiden det tar for temperaturen å synke 1 grad.</p> <p>Oppgave 24</p> <p>a) 3 b) -1 c) -3 d) 2 e) -9 f) -2 g) 8 h) -1</p> <p>Oppgave 25</p> <p>-3 21 3 -32 -48 48</p> <p>Oppgave 26</p> <p>9 8 25 16</p> <p>Oppgave 27</p> <p>6,25 1728</p> <p>Oppgave 28</p> <p>1 2 4 5 6 7 8 9 20 100</p> <p>Oppgave 29</p> <p>5,48 24,49 31,62</p> <p>Oppgave 30</p> <p>23 12 26</p>

## Fasit blandede oppgaver

### B1

- a)  $\frac{5}{7}$    b)  $\frac{17}{21}$    c)  $\frac{1}{2}$    d)  $\frac{11}{12}$    e)  $\frac{1}{18}$   
f)  $\frac{19}{20}$    g)  $\frac{12}{7}$    h)  $\frac{1}{6}$    i)  $\frac{3}{2}$    j)  $\frac{1}{10}$

### B2

- a) 0,75   b) 0,8   c) 0,3   d) 0,45   e) 0,666...  $\approx$  0,67   f) 0,4545...  $\approx$  0,45

### B3

- a) 21   b) 56   c) 300   d) 140   e) 2000  
f) 560   g) 5,8   h) 24

### B4

- a) 4   b) 14   c) 8   d) 25   e) 6   f) 7,5  
g) 11,5   h) 0,5   i) 0,6   j) 0,9   k) 6

### B5

- a) 315   b) 1644   c) 20344

### B6

- a) 1633   b) 34524   c) 264018

### B7

- a) 3,69   b) 0,875   c) 59,75

### B8

- a) 171   b) 96   c) 654

### B9

- a) 12,6   b) 9,875   c) 43,75

### B10

- a) 6   b) 25   c) 134

### B11

- a) 0,645 L/mil   b) 1,55 mil/L. Hvor langt bilen kan kjøre på 1 L bensin.

### B12

- a) 2   b) 0   c) -2   d) 2   e) -2  
f) -7   g) 7   h) 3

### B13

- a) -12   b) 12   c) -12   d) -4   e) -2  
f) 3

### B14

- a) 1   b) 49   c) 81   d) 10000  
e) 16   f) -16

### B15

- a) 21300 kr   b) 22 timer

### B16

- a) 2,25   b) 6,25   c) 42,25

### B17

- a) 1   b) 4   c) 300   d) 1000  
e) 5,6   f) 8

### B18

- a) 3,16   b) 31,6   c) 6,75

### B19

- a) 10   b) 18   c) 12

# Kapittel 2. Algebra



## Mål for Kapittel 2, Algebra.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over svar, regne praktiske oppgaver, med og uten digitale verktøy, presentere resultatene og vurdere hvor rimelige de er
- tolke, bearbeide, vurdere og diskutere det matematiske innholdet i skriftlige, muntlige og grafiske fremstillinger
- forenkle flerleddet uttrykk og løse ligninger av første grad og enkle potensligninger

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg regner ut verdien av en formel
- hva et bokstavuttrykk er
- hvordan jeg forenkler et bokstavuttrykk
- hva en ligning er
- hvordan jeg kan løse en ligning

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvorfor jeg kan/bør forenkle et bokstavuttrykk
- hvordan jeg forenkler et bokstavuttrykk
- hvordan finne løsningen på en ligning

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- Gi praktiske eksempler på algebra i hverdagen
- Løse sammensatte oppgaver der en må lage en ligning og løse den
- Lage og løse en tekstoppgave der du må benytte algebra se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Familien Hansen skal på Oslo-besøk

Familien Hansen består av to voksne og tre barn, og har tenkt å tilbringe helgen i Oslo.

Familien Hansen ønsker å besøke Frognerbadet, Tusenfryd og Munch-museet. For hvert sted de besøker må de betale 2 voksenbilletter og 3 barnebilletter. De må også kjøpe 24-timerskort på Ruter for alle i familien.

Fru Hansen ønsker å få en oversikt over kostnadene, og har derfor spurt klassen vår om vi kan lage et regneark i Excel for henne. Regnearket skal være slik at Fru Hansen kan skrive prisene rett inn i ruter i regnearket og få frem hvor mye de må betale for hvert besøk og hele turen til sammen.

Nøkkelinformasjon:

- Hvor mange billetter: \_\_\_\_\_ \* voksenbillett  
\_\_\_\_\_ \* barnebillett
- Hvilke utgifter:  
- \_\_\_\_\_  
- \_\_\_\_\_  
- \_\_\_\_\_  
- \_\_\_\_\_

### 1. Forenkling av bokstavuttrykk

$2 \cdot (3 + 4)$  er et *talluttrykk*. Vi kan regne ut *verdien* til uttrykket slik:  $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$ .

Men vi kan også regne det ut på en annen måte:  $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$ . Den siste metoden kaller vi gjerne «å gange ut parentesen».

Hvis vi bruker andre tall og regner ut lignende uttrykk på disse to måtene, ser vi at vi alltid får samme svar på begge måtene. Vi har oppdaget en *regneregul*. Det er tungvint å uttrykke denne regelen på vanlig norsk. Hvis vi bruker matematikkens bokstavspråk isteden, kan vi skrive regelen slik:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Her kan  $a$ ,  $b$  og  $c$  bety hvilke som helst tall. Vi kaller dem for *variabler*. Høyre- og venstresiden kalles *bokstavuttrykk*. Hvis  $a = 2$ ,  $b = 3$  og  $c = 4$  får vi samme regnestykket som i eksemplet ovenfor.



$2a$  er et eksempel på et svært enkelt bokstavuttrykk. Variabelen  $a$  kan også her bety et hvilket som helst tall. Vi sier ofte at  $a$  er et *symbol* for et tall. Uttrykket  $2a$  betyr altså 2 multiplisert med et tall.

Går det an å gjøre bokstavuttrykket  $2a + 3a$  enklere? Da må vi først være klar over at i et bestemt uttrykk så må *samme bokstav ha samme verdi i hele uttrykket*. Vi regner ut uttrykket for to ulike verdier av  $a$  for å se om vi kan oppdage noe system:

$$a = 2 : 2a + 3a = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$

$$a = 6 : 2a + 3a = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 12 + 18 = 30$$

Da  $10 = 5 \cdot 2$  og  $30 = 5 \cdot 6$ , tyder dette på at vi kan forenkle bokstavuttrykket slik:

$$2a + 3a = 5a$$

### Oppgave 1

Gjør disse uttrykkene enklere.

a)  $3a + 6a$    b)  $2x + 5x$    c)  $y + 3y$    d)  $7b - 2b$    e)  $2y + 5y - 3y$

Hva med  $2a + 3b$ ? Fordi  $a$  og  $b$  ikke behøver å ha samme verdi, går det *ikke* an å forenkle dette uttrykket. Ikke prøv å være kreativ her!

### Oppgave 2

Gjør disse uttrykkene enklere hvis det er mulig.

a)  $3x + 4y$    b)  $2a + 3b + 4a$    c)  $3x + 4y + x - 2y$

$3(x + 2y)$  er et uttrykk som kan skrives om ved å bruke regelen  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ . Her må vi bytte ut  $a$  med 3,  $b$  med  $x$  og  $c$  med  $2y$ . Vi regner slik:

$$3(x + 2y) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2y = 3x + 6y$$

### Oppgave 3

Skriv om uttrykkene ved å bruke regelen  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

a)  $2(5 + 3)$    b)  $2(a + 3)$    c)  $2(b + c)$    d)  $3(2a + 4b)$    e)  $x(3 + 4y)$    f)  $x(2x - 4)$



Her er tre uttrykk hvor vi må bruke *flere* regler for å forenkle:

$$2x + 3(x + 1) + 4 = 2x + 3x + 3 + 4 = 5x + 7$$

$$3a + 4(b - 2) - b + 2a + 3 = 3a + 4b - 8 - b + 2a + 3 = 3a + 2a + 4b - b - 8 + 3 = 5a + 3b - 5$$

$$x^2 + xy + 3x(x + 2y) = x^2 + xy + 3x \cdot x + 3x \cdot 2y = x^2 + xy + 3x^2 + 6xy = 4x^2 + 7xy$$



#### Oppgave 4

Gjør disse uttrykkene enklere:

a)  $2 \cdot 3 + 2(3 + 4)$    b)  $2b + 2(b + 4)$    c)  $5(b - 1) + 8$    d)  $a(2 + 4) + 4a$

Hvis det står minus foran en parentes betyr det at tallet  $a$  i regelen  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  er negativt, og vi må da *bytte fortegn når vi ganger ut parentesen*:

$$4x - 2(x - 4) = 4x - 2x + 8 = 2x + 8$$

$$4a - (3a - 1) = 4a - 3a + 1 = a + 1$$



#### Oppgave 5

Gjør disse uttrykkene enklere:

a)  $6y - 3(y - 2)$    b)  $6x - (2x - 3)$    c)  $x^2 - 3x(x + y) - y(1 - 3x)$

## 2. Løse likninger

Et likhetstegn betyr ikke alltid helt det samme.  $2x + 3x = 5x$  er riktig for *alle* verdier av  $x$ . Men  $2x + 3x = 10$  er bare riktig hvis  $x$  er lik 2. Å finne den verdien av  $x$  som gjør at likhetstegnet er riktig, kaller vi å *løse* likningen.

### Eksempel 1

Noen likninger kan vi løse med enkel hoderegning.

$3x = 6$  har løsningen  $x = 2$  fordi  $3 \cdot 2 = 6$ . Legg merke til at  $x = \frac{6}{3} = 2$ .

#### Oppgave 6

Løs likningene.

a)  $2x = 8$    b)  $6x = 18$    c)  $-3x = 12$    d)  $-3x = -12$    e)  $4s = 36$

### Eksempel 2

I «praktiske» likninger er det ofte så «stygge» tall at vi må bruke kalkulator. Samme type likning som i eksempel 1 løses da slik:

$$6,28x = 20$$

$$x = \frac{20}{6,28} = 3,18$$

#### Oppgave 7

Løs likningene.

a)  $0,25x = 10$    b)  $4a = 22$    c)  $2\pi r = 30$  ( $\pi$  er omtrent lik 3,14)

### Eksempel 3

$x + 4 = 10$  er et eksempel på en annen type enkel likning. Du ser nok fort at løsningen er  $x = 6$  fordi  $6 + 4 = 10$ . Hvis vi ikke ser løsningen med en gang, kan vi *trekke fra* 4 på begge sider av likningen. Løsningsmetoden blir da slik:

$$x + 4 = 10$$

$$x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$x = 6$$

### Eksempel 4

Her er en liknende likning hvor vi *legger til* samme tall på begge sider av likhetstegnet:

$$x - 8 = 12$$

$$x - 8 + 8 = 12 + 8$$

$$x = 20$$

### **Oppgave 8**

Løs likningene.

a)  $x + 5 = 12$

b)  $x - 3 = 4$

c)  $x + 8 - 3 = 8$

d)  $8 = x + 5$

### Eksempel 5

$2x - 3 = 5$  er en kombinasjon av de to likningstypene ovenfor. Vi løser den slik:

$$2x - 3 = 5$$

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Da  $2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$  ser vi at vi har regnet riktig.

### Oppgave 9

Løs likningene på samme måte som i eksempel 5.

a)  $3x - 4 = 11$    b)  $-2x + 6 = 12$

Du kan også få likninger med en brøk:

#### Eksempel 3

Mange vil se med en gang at likningen  $\frac{x}{3} = 2$  har løsningen  $x = 6$ . Hvis du ikke ser det, kan du løse den slik:

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 2 \cdot 3$$

$$\frac{3x}{3} = 6$$

$$x = 6$$

### Oppgave 10

Løs likningene slik som i eksempel 6.

a)  $\frac{x}{4} = 3$    b)  $\frac{n}{6} = 3$    c)  $\frac{x}{100} = 1,26$    d)  $\frac{x}{1,14} = 210$

Til slutt tar vi et eksempel hvor vi må bruke alle løsningsmetodene ovenfor.



#### Eksempel 4

$$3x - 1 + \frac{x}{4} = x + 8$$

$$3x - 1 + \frac{x}{4} + 1 = x + 8 + 1$$

$$3x + \frac{x}{4} = x + 9$$

$$3x + \frac{x}{4} - x = x + 9 - x$$

$$2x + \frac{x}{4} = 9$$

$$2x \cdot 4 + \frac{x}{4} \cdot 4 = 9 \cdot 4$$

$$8x + x = 36$$

$$9x = 36$$

$$x = \frac{36}{9}$$

$$x = 4$$

Hvis du ikke går i surr, kan du gjerne ta flere skritt på hver linje slik at ikke løsningen blir så lang. Du kan også bytte om på rekkefølgen av regneoperasjonene.



#### Oppgave 11

Løs likningene.

a)  $x + \frac{2x}{3} = 10$     b)  $\frac{x}{5} + 3 = 21 - x$

#### Potenslikning

$x^2$  og  $x^3$  er eksempler på *potenser*..

#### Eksempel 5

Likningen under er en potenslikning. Den har *to* løsninger:

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{eller} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

### Eksempel 6

$$2x^2 = 40$$

$$x^2 = \frac{40}{2}$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20} = 4,47 \text{ eller } x = -\sqrt{20} = -4,47$$

### Eksempel 7

Likningen  $x^2 = -4$  har *ingen* løsninger fordi det er umulig å få et negativt svar når vi multipliserer et tall med seg selv.

### Eksempel 8

$$x^3 = 27$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3$$

$\sqrt[3]{27}$  kaller vi “tredjeroten av 27” og er lik 3 fordi  $3^3 = 27$ . De fleste kalkulatorer har en egen tast for å regne ut tredjerot.

### **Oppgave 12**

Løs likningene.

- a)  $x^2 = 25$    b)  $x^2 = 50$    c)  $4x^2 = 86$    d)  $3,14x^2 = 40$    e)  $x^2 = -9$    f)  $x^3 = 8$   
g)  $5,67x^3 = 100$    h)  $x^3 = -27$



Det kan hende at du får en potenslikning hvor eksponenten er større enn 3:

### Eksempel 9

$$x^5 = 2$$

$$x = \sqrt[5]{2} = 1,149$$

Hvis kalkulatoren din ikke har en egen tast hvor du kan regne ut dette, kan du gjøre det slik:  
Å beregne 5. rot viser seg å være det samme som å opphøye i 1/5. Du kan altså bruke potenstasten og regne ut

$$2^{\frac{1}{5}} = 1,149$$



### Oppgave 13

Løs likningene a)  $x^4 = 3$  b)  $500 \cdot x^{10} = 800$

## 3. Formelregning

### 3.1 Størrelser

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- radien til en sirkel (målenhet m)
- volumet av ei kule (målenhet  $m^3$ )
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)
- energien i en matvare (målenhet joule)

### 3.2 Verdier

Det tallet som er knyttet til en størrelse, kaller vi *verdien* til størrelsen. For eksempel kan vekten av en eplepose ha verdien 1,45 kg, og temperaturen i kaffen ha verdien 65 grader.

### 3.3 Formler

Det går an å regne ut verdien til mange størrelser ved hjelp av en *regneoppskrift*. En slik oppskrift kaller vi en *formel*.

På venstre siden av formelen står navnet på den størrelsen vi vil regne ut, og på høyre siden står en eller flere andre størrelser, ofte sammen med faste tall.

Vi bruker nesten alltid bokstavsymboler på størrelsene slik at formelen blir kort og oversiktlig.

Eksempler på formler:

Prisen  $P$  for en pose epler som veier  $v$  kilo når kiloprisen er 24 kr:  $P = 24v$

Arealet  $A$  av et rektangel med lengde  $l$  og bredde  $b$ :  $A = l \cdot b$

Omkretsen  $o$  av en sirkel med radius  $r$ :  $o = 2\pi r$

Kroppsmasseindeksen  $K$  til en person med høyde  $h$  (i meter)  $K = \frac{m}{h^2}$

og masse  $m$  (i kilogram):

### 3.4 Innsetting av tall i formler

#### Eksempel 10

Hva er arealet av et rektangel med lengde 4 cm og høyde 3 cm? Vi setter inn i formelen og regner ut verdien til arealet:

$$A = lb = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

#### Eksempel 11

Hva er omkretsen av en sirkel med radius 0,7 m? Vi setter inn i formelen og regner ut:

$$o = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,7 \text{ m} = 4,20 \text{ m}$$

De fleste kalkulatorer har en egen tast for tallet pi ( $\pi$ ). Bruk gjerne den. Det er raskere og mer nøyaktig enn å skrive 3,14.

#### Eksempel 12

Hva er volumet av ei kule med radius 10 cm? Vi setter inn i formelen:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10 \text{ cm})^3}{3} = 4190 \text{ cm}^3$$

### Oppgave 14

Regn ut: a) omkretsen av en sirkel med radius 5,4 cm b) volumet av ei kule med radius 6 cm c) din egen kroppsmasseindeks

### 3.5 Omforming av formler

#### Eksempel 13

Et rektangel har lengde 6 cm og areal 24 cm<sup>2</sup>. Hvor stor er da bredden?

Vi kan regne på to ganske like måter. Velg selv den du liker best.

#### Metode 1

Vi setter inn de oppgitte tallene i formelen for arealet og får da en likning med  $b$  som ukjent.



$$A = lb$$

$$24 = 6 \cdot b$$

$$b = \frac{24}{6}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

( I likninger pleier vi å sløyfe målenheter underveis.)

### Metode 2

Her finner vi en *formel* for  $b$  og setter inn tallene i den.

$$A = l \cdot b$$

$$\frac{A}{l} = b$$

$$b = \frac{A}{l}$$

$$b = \frac{24 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 4 \text{ cm}$$

### **Oppgave 15**

a) Omkretsen av en sirkel er 25 cm. Hvor stor er radien?

b) Volumet av en sylinder er gitt ved formelen  $V = G \cdot h$ . Hva er høyden  $h$  i en sylinder med grunnflate  $G = 50,27 \text{ cm}^2$  og volum  $V = 351,9 \text{ cm}^3$ ?

### **Blandede oppgaver**

#### **B1**

(Eksamen 1P vår 2014, Del 1)

Løs likningen  $\frac{(x+4) \cdot 3}{2} = 9$ .

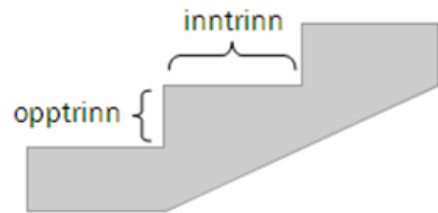
## B2

(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

For at en trapp skal være behagelig å gå i, bør ett inntrinns pluss to opptrinns være omtrent 630 mm.

Hvor høyt bør opptrinnet i en trapp være dersom inntrinnet skal være 340 mm?

(Tips: Kan løses med likning. Kall opptrinnet for  $x$  og sett opp en likning.)



## B3

Hvor stor må radien i en sirkel være for at arealet skal være  $100 \text{ cm}^2$ ?

## B4

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)



En pose Maarud Proviant inneholder 150 g potetskiver.

Energiinnholdet i potetskivene er gitt på forsiden av posen som vist på bildet til høyre.

- a) Torbjørn spiser hele posen. Hvor mange kcal får han i seg?

Formelen

$$E = (P + K) \cdot 4 + F \cdot 9$$

viser energiinnholdet  $E$  kcal i mat som inneholder  $P$  gram proteiner,  $K$  gram karbohydrater og  $F$  gram fett.

Det er ca. 2 g proteiner og ca. 8 g fett i 30 g potetskiver.

- b) 🤔 Bruk formelen ovenfor til å finne ut omtrent hvor mange gram karbohydrater det er i 30 g potetskiver.

**B5**

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2, litt endret)



Når babylonerne skulle finne kvadratroten av et tall  $T$ , fant de det kvadrattallet  $K$  som lå nærmest  $T$ , og brukte formelen:

$$\sqrt{T} \approx \frac{1}{2} \left( \sqrt{K} + \frac{T}{\sqrt{K}} \right)$$

**Eksempel**

Vi skal finne  $\sqrt{31}$ .

36 er det kvadrattallet som er nærmest 31, og formelen gir oss:

$$\sqrt{31} \approx \frac{1}{2} \left( \sqrt{36} + \frac{31}{\sqrt{36}} \right) = \frac{1}{2} \left( 6 + \frac{31}{6} \right) = \frac{67}{12} \approx \underline{\underline{5.58}}$$

Bruk denne formelen til å regne ut en tilnærmet verdi for  $\sqrt{74}$ .

**B6**

Den elektriske effekten  $P$  til en lyspære er den elektriske energien som omdannes til lys og varme på ett sekund. Den måles i W (watt). Hvis vi kjenner spenningen  $U$  over pæra, målt i V (volt), og strømmen  $I$  gjennom pæra, målt i A (ampere) kan vi regne ut effekten med formelen

$$P = UI$$

- Regn ut effekten til pæra når  $U = 230$  V og  $I = 0,17$  A.
- Hvor stor strøm går gjennom en 60 W pære når spenningen er 230 V?

**B7**

Kropps masseindeksen er gitt ved formelen  $K = \frac{m}{h^2}$ . Her er  $m$  kroppsmassen målt i kg, og  $h$  er høyden målt i m. Kropps masseindeksen bør helst ligge mellom 20 og 25. Regn ut største og minste gunstige kroppsvekt for en gutt som er 180 cm høy.

**B8**

(Eksamen 1P, høst 2015, del 1)

Formlene nedenfor kan brukes for å anslå hvor høyt et barn vil bli i voksen alder.

**Gutt:** (fars høyde + mors høyde)  $\cdot 0,5 + 7$  cm

**Jente:** (fars høyde + mors høyde)  $\cdot 0,5 - 7$  cm

Mors og fars høyde oppgis i centimeter.

En familie består av mor, far og barna Ola og Kari.

Mor er 160 cm høy, og far er 180 cm høy.

- a) Hvor høye vil Ola og Kari bli i voksen alder ifølge formlene ovenfor?

En annen familie består av mor, far og sønnen Per, som nå er voksen. Far er 186 cm høy. Per er 189 cm høy.

- b) Hvor høy er mor i denne familien ifølge den første formelen ovenfor?

**B9**

(Eksamen 1P, vår 2015, del 1)

En formel er gitt ved

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- a) Bestem  $s$  når  $v_0 = 0$ ,  $t = 8$  og  $a = 10$
- b) Bestem  $a$  når  $v_0 = 20$ ,  $t = 4$  og  $s = 144$

## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a)  $9a$  b)  $7x$  c)  $4y$  d)  $5b$  e)  $4y$

Oppgave 2 a) kan ikke forenkles b)  $6a + 3b$  c)  $4x + 2y$

Oppgave 3 a)  $16$  b)  $2a+6$  c)  $2b + 2c$  d)  $6a + 12b$  e)  $3x + 4xy$  f)  $2x^2 - 4x$

Oppgave 4 a)  $20$  b)  $4b+8$  c)  $5b+3$  d)  $10a$

Oppgave 5 a)  $3y + 6$  b)  $4x + 3$  c)  $-2x^2 - y$

Oppgave 6 a)  $x = 4$  b)  $x = 3$  c)  $x = -4$  d)  $x = 4$  e)  $s = 9$

Oppgave 7 a)  $x = 40$  b)  $a = 5,5$  c)  $r = 4,77$

Oppgave 8 a)  $x = 7$  b)  $x = 7$  c)  $x = 3$  d)  $x = 3$

Oppgave 9 a)  $x = 5$  b)  $x = -3$

Oppgave 10 a)  $x = 12$  b)  $n = 18$  c)  $x = 126$  d)  $x = 239,4$

Oppgave 11 a)  $x = 6$  b)  $x = 15$

Oppgave 12 a)  $x = 5$  eller  $x = -5$  b)  $x = 7,07$  eller  $x = -7,07$  c)  $x = 4,64$  eller  $x = -4,64$   
d)  $x = 3,57$  eller  $x = -3,57$  e) ingen løsning f)  $x = 2$  g)  $x = 2,60$  h)  $x = -3$

Oppgave 13a)  $1,316$  b)  $1,048$

Oppgave 14 a)  $33,9 \text{ cm}$  b)  $905 \text{ cm}^3$

Oppgave 15 a)  $3,98 \text{ cm}$  b)  $7,0 \text{ cm}$

## Fasit blandede oppgaver

B1  $x = 2$

B2  $145 \text{ mm}$

B3  $5,64 \text{ cm}$

B4 a)  $750 \text{ kcal}$  b)  $17,5 \text{ g}$

B5  $8,61$

B6 a)  $39 \text{ W}$  b)  $3,83 \text{ A}$

B7 Mellom  $65$  og  $81 \text{ kg}$

B8 a) Ola:  $177 \text{ cm}$ , Kari  $163 \text{ cm}$ . b)  $178 \text{ cm}$

B9 a)  $320$  b)  $a = 8$

## Kapittel 3. Praktisk regning med måleenheter



### Mål for Kapittel 3, Praktisk regning med måleenheter.

#### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- Regne med ulike måleenheter, bruke måleredskaper, vurdere hvilke måleredskaper som er formålstjenlige, og vurdere hvor usikre målingene er
- Tolke, lage og bruke skisser og arbeidstegninger på problemstillinger fra kultur- og yrkesliv og presentere og begrunne løsninger

#### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapittelet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapittelet vet jeg

- hvordan jeg regner om mellom milli-, centi-, desi-, hekto- og kilogram/meter.
- hvordan jeg regner om mellom hele timer og minutter, og timer med desimaltall
- hvordan jeg regner om mellom m/s og km/t
- hvordan jeg regner med målestokk
- hva som kjennetegner proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser
- hvordan jeg regner med overslag

Etter dette kapittelet kan jeg forklare

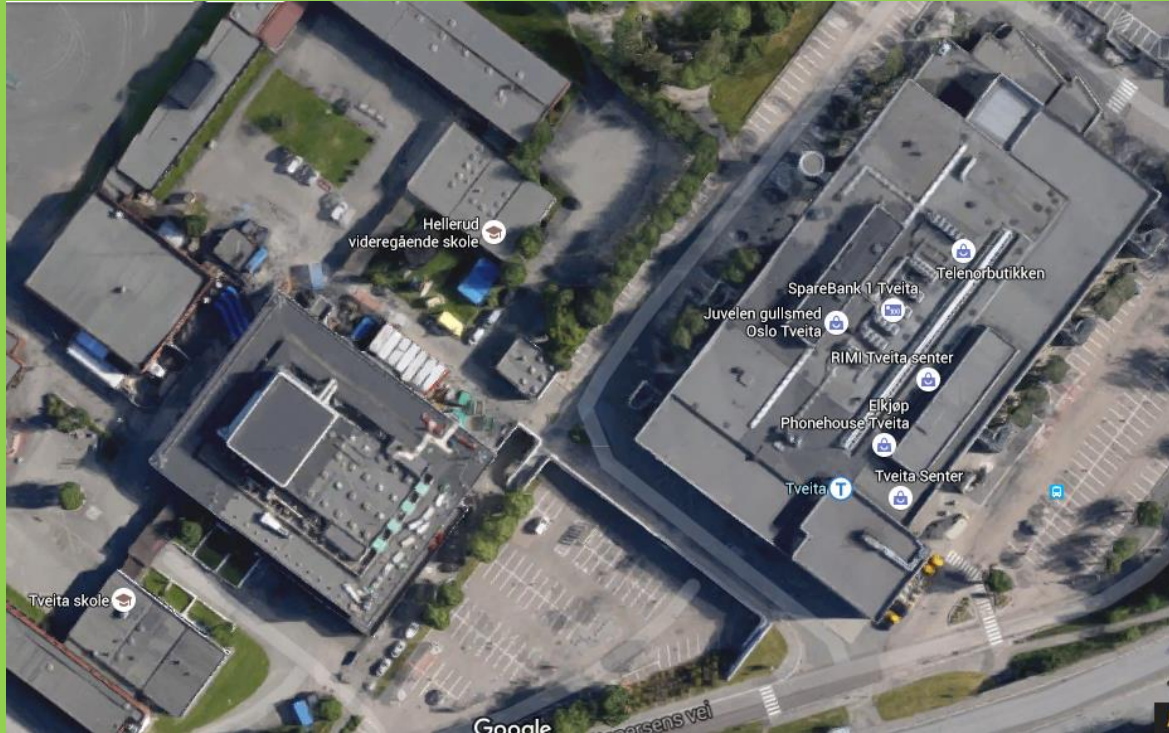
- hvorfor omregninger med enheter er korrekte/ukorrekte
- hvorfor desimaltall i oppgitte timer ikke tilsvarer minutter
- hvorfor omregningen mellom m/s og km/t omfatter regning med 3,6.
- hvorfor noe er/ikke er proporsjonalt eller omvendt proporsjonalt

Etter dette kapittelet kan jeg vurdere og

- gi eksempler på proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser fra hverdagen
- sette direkte inn i formler og foreta beregninger
- lage og løse tekstoppgaver
- vise til bruk av målestokk i dagliglivet og gjøre beregninger med det.
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Bilde og virkelighet

Her ser du et bilde av Hellerud vgs og Tveita-senteret. Som du skjønner er alt på bildet mye mindre enn det faktisk er i virkeligheten.

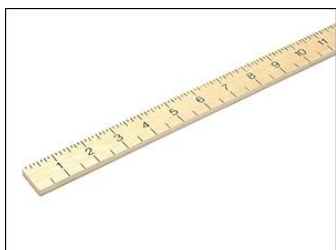


Din oppgave nå er å finne ut hvor mye kortere alt på bildet er i forhold til virkeligheten.

For å klare det må du først komme frem til hva du trenger å vite for å finne forholdet mellom bildet og virkeligheten.

# 1. Lengder

Jonas har en høyde på 179 cm. 179 kaller vi *måltallet* for høyden, og cm kaller vi *målenheten*. Den vanligste målenheten for lengder, strekninger og avstander er meter (m). Lengder som ikke er mye mindre eller mye lengre enn en meter, kan vi måle med en meterstav, en tommestokk eller et målebånd.



Meterstav



Tommestokk



Målebånd

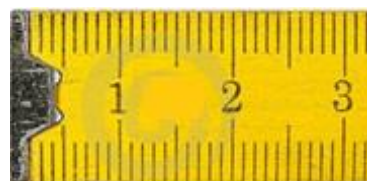
## 1.1 Forstavelene milli, centi, desi og kilo

For små og store lengder er det ofte mer praktisk å bruke millimeter, centimeter, desimeter eller kilometer. Milli, centi, desi og kilo er eksempler på *forstavelser*. De brukes også sammen med andre enheter enn meter.

Dette må du kunne *utenat*:

Forstavelse med forkortelse	Betydning	Eksempler
milli (m)	Tusendel = $1/1000 = 0,001$	3 mm = 0,003 m, 6 mg = 0,006 g
centi (c)	Hundredel = $1/100 = 0,01$	4 cm = 0,04 m, 5 cL = 0,05 L
desi (d)	Tidel = $1/10 = 0,1$	2,5 dm = 0,25 m, 4 dL = 0,4 L
hekto (h)	Hundre = 100	4 hg = 400 g
kilo (k)	Tusen = 1000	3,4 km = 3400 m, 5 kg = 5000 g

Bildet til høyre viser et utsnitt av en meterstav. Mellom tallene 1 og 2 er det 1 cm (centimeter). Det er 100 cm i 1 m. Avstanden mellom de minste delestrekene på bildet er 1 mm (millimeter). Du ser at det er 10 mm i 1 cm. Det blir da  $10 \cdot 100 = 1000$  mm i 1 m.





## 1.2 Omgjøring mellom lengdeenheter

Ofta får du bruk for å *gjøre om* lengder fra en målenhet til en annen. Da er det viktig å vite hva forstavelene betyr.

Hvis vi gjør om en lengde til en målenhet som er *mindre* (for eksempel fra m til cm), blir måltallet *større*.

### Eksempel 1

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 1000 mm eller 100 cm eller 10 dm i 1 m. Derfor er

$$1,8 \text{ m} = 1,8 \cdot 1000 \text{ mm} = 1800 \text{ mm}$$

$$1,8 \text{ m} = 1,8 \cdot 100 \text{ cm} = 180 \text{ cm}$$

$$1,8 \text{ m} = 1,8 \cdot 10 \text{ dm} = 18 \text{ dm}$$

### Eksempel 2

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 10 mm i 1 cm. Derfor er

$$3,5 \text{ cm} = 3,5 \cdot 10 \text{ mm} = 35 \text{ mm}$$

### Eksempel 3

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 10 dm i 1 m. Derfor er

$$0,6 \text{ m} = 0,6 \cdot 10 \text{ dm} = 6 \text{ dm}$$

### Eksempel 4

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 1000 m i 1 km. Derfor er

$$8,2 \text{ km} = 8,2 \cdot 1000 \text{ m} = 8200 \text{ m}$$

### **Oppgave 1**

- Skriv ned høyden din i cm, m og mm.
- Mål sidekantene på ei bok og oppgi lengdene i cm, mm og m.

### **Oppgave 2**

Fyll ut det som mangler i disse omgjøringene mellom lengdeenheter.

$$1,2 \text{ m} = \quad \text{mm}, \quad 2,6 \text{ m} = \quad \text{cm}, \quad 4,85 \text{ m} = \quad \text{dm}$$

$$6,4 \text{ cm} = \quad \text{mm}, \quad 7,2 \text{ dm} = \quad \text{cm}, \quad 5,8 \text{ km} = \quad \text{m}$$

Hvis vi gjør om en lengde til en målenhet som er *større* (for eksempel fra cm til m), blir måltallet *mindre*.

#### Eksempel 5

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 1000 mm eller 100 cm eller 10 dm i 1 m. Derfor er

$$17 \text{ mm} = 17 : 1000 \text{ m} = 0,017 \text{ m}$$

$$178 \text{ cm} = 178 : 100 \text{ m} = 1,78 \text{ m}$$

$$6,5 \text{ dm} = 6,5 : 10 \text{ m} = 0,65 \text{ m}$$

#### Eksempel 6

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 1000 m i 1 km. Derfor er

$$720 \text{ m} = 720 : 1000 \text{ km} = 0,720 \text{ km}$$

#### Eksempel 7

Fra tabellen over forstavelser kan du finne ut at det er 10 mm i 1 cm. Derfor er

$$26 \text{ mm} = 26 : 10 \text{ cm} = 2,6 \text{ cm}$$

### **Oppgave 3**

Fyll ut det som mangler i disse omgjøringene mellom lengdeenheter.

$$45 \text{ mm} = \quad \text{m} \quad 75 \text{ cm} = \quad \text{m} \quad 14 \text{ dm} = \quad \text{m}$$

$$400 \text{ m} = \quad \text{km} \quad 32 \text{ mm} = \quad \text{cm} \quad 68 \text{ cm} = \quad \text{dm} \quad 250 \text{ cm} = \quad \text{km}$$

### **1.3 Mil**

Ofte oppgir vi avstanden mellom to steder i *mil*. Da må du vite at 1 mil = 10 km.

#### Eksempel 8

Ved veikjøring er avstanden mellom Trondheim og Oslo 495 kilometer. Dette tilsvarer 49,5 mil.

Det er 3,6 mil i luftlinje fra Oslo til Drammen. Dette tilsvarer 36 km.

En bil kjører med konstant fart 80 km per time. Den kjører da 160 km = 16 mil på to timer.

### **Oppgave 4**

- Ved veikjøring er distansen mellom Roma og Oslo 2500 kilometer. Hvor mange mil er dette?
- Omkretsen til jorda ved ekvator er ca. 4000 mil. Hvor mange km er dette?
- Et fly holder en fart på 850 km per time. Hvor mange mil kjører flyet på en halv time?

Hvis vi skal *legge sammen* lengder må vi først sørge for at alle lengdene har *samme* målenhet!

## 2. Masse (vekt)

Den grunnleggende måleenheten for masse er gram (g). Litt større masser måler vi gjerne i kilogram (kg), hvor  $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$  (du husker at forstavelsen kilo betyr 1000?). Svært små masser kan måles i milligram (mg), som er  $1/1000 \text{ g} = 0,001 \text{ g}$ .

Vi gjør om masseenheter på samme måte som lengdeenheter. En forskjell er at vi av og til bruker hg (1 hektogram = 100 g) for vekten av enkelte matvarer, mens vi aldri bruker hektometer for lengder.

### Eksempel 9

$$0,8 \text{ kg} = 0,8 \cdot 1000 \text{ g} = 800 \text{ g}$$

$$2,5 \text{ g} = 2,5 \cdot 1000 \text{ mg} = 2500 \text{ mg}$$

$$4,2 \text{ hg} = 4,2 \cdot 100 \text{ g} = 420 \text{ g}$$

$$650 \text{ g} = 650 : 1000 \text{ kg} = 0,650 \text{ kg}$$

$$80 \text{ mg} = 80 : 1000 \text{ g} = 0,08 \text{ g}$$

$$150 \text{ g} = 150 : 100 \text{ hg} = 1,50 \text{ hg}$$

### Oppgave 5

Fyll ut det som mangler i disse omgjøringene mellom masseenheter.

$$\begin{array}{llllll} 0,6 \text{ kg} = & \text{g}, & 300 \text{ g} = & \text{kg}, & 0,4 \text{ g} = & \text{mg}, & 750 \text{ mg} = & \text{g}, \\ 2,13 \text{ hg} = & \text{g}, & 80 \text{ g} = & \text{hg}, & 7 \text{ hg} = & \text{kg}, & 0,54 \text{ kg} = & \text{hg}. \end{array}$$

### 2.1 Tonn

Ofte oppgir vi store masser (mer enn ca. 1000 kg) i *tonn*, forkortet t.  $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$ .

### Eksempel 10

Et billass med jord veier 3,5 t. Dette er lik 3500 kg.

En stor stein veier 7800 kg. Dette er lik 7,8 t.

En mindre stein veier 840 kg. Dette er lik 0,84 t.

### Oppgave 6

- En stor heisekran kan løfte 220 tonn. Hvor mange kg er dette?
- En voksen indisk elefant veier inntil 4500 kg. Hvor mange tonn er dette?
- En nyfødt elefant veier typisk ca. 100 kg. Hvor mange tonn er dette?

Hvis vi skal *legge sammen masser* må vi først sørge for at alle massene har *samme måleenhet!*



### 3. Tid

Den grunnleggende måleenheten for tid er sekund (s). Ofte er et sekund for liten enhet til at det er praktisk, slik at vi bruker en av disse isteden:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ time (ofte forkortet h, hour betyr time på engelsk)} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ dag} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ uke} = 7 \text{ dager}$$

$$1 \text{ måned} = 30 \text{ dager}$$

$$1 \text{ år} = 365 \text{ dager}$$

Det kan være litt vanskelig å gjøre om mellom enkelte av disse enhetene fordi en av disse enhetene ikke er lik 10, 100 eller 1000 ganger en av de andre.

#### Eksempel 11

$1,4 \text{ min} = 1 \text{ min} + 0,4 \cdot 60 \text{ s} = 1 \text{ min } 24 \text{ s}$  (vi pleier ikke å skrive + mellom minuttene og sekundene).

$$134 \text{ s} = 134 : 60 \text{ min} = 2 \text{ min } 14 \text{ s} \quad (\text{fordi } 2 \cdot 60 + 14 = 134).$$

$$45 \text{ min} = \frac{45}{60} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h} = 0,75 \text{ h}.$$

Kl. 9.45 betyr 45 min over kl. 9. Med desimaltall blir det kl. 9,75.

$$2,64 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0,64 \cdot 60 \text{ min} = 2 \text{ h } 38,4 \text{ min} = 2 \text{ h } 38 \text{ min } 24 \text{ s}.$$

#### Eksempel 12

Et kvarter er en kvart time. En kvart betyr  $\frac{1}{4}$ .

$$\text{Ett kvarter er altså } \frac{1}{4} \text{ h} = \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ min} = \frac{60}{4} \text{ min} = 15 \text{ min}.$$

#### Eksempel 13

I hvilket år og måned er vi når det har gått 5,3 år siden 1. januar 2013?

Fordi  $2013 + 5 = 2018$  er vi i 2018. Fordi  $0,3 \cdot 12 = 3,6$  er vi litt over midten i 4. måned, altså i april.

### Oppgave 7

- a) Gjør om 2,6 min til s.
- b) Gjør om 195 s til min og s.
- c) Gjør om 20 min til h.
- d) Gjør om 105 min til h.
- e) Gjør om 3,68 h til h, min og s.
- f) I hvilket år og måned er vi hvis det har gått 7,8 år siden 1. januar 2010?

## 4. Praktisk regning med blant annet lengder, masser og tid

Her er noen eksempler hvor du blant annet trenger å gjøre om mellom måleenheter.

### Eksempel 14

Coca Cola har et energiinnhold på 42 kcal (kilokalorier) per 100 g. Hva er energiinnholdet i 1,5 L (liter) cola?

1 L cola veier omtrent 1 kg. 1,5 L veier da  $1,5 \text{ kg} = 1500 \text{ g}$ .

Det er  $1500 : 100 = 15$  hundregrams porsjoner cola i 1,5 L.

Energiinnholdet i 1,5 L cola er da  $42 \text{ kcal} \cdot 15 = 630 \text{ kcal}$ . Dette er omtrent  $1/3$  av dagsbehovet for energi.

### Eksempel 15

Et kart har målestokk 1: 100 000. Det betyr at en avstand i terrenget er 100 000 ganger større enn på kartet. På kartet er avstanden mellom Bjørke og Granli 5,6 cm. Hva er den *virkelige* avstanden mellom disse to stedene målt i praktiske enheter?

Avstanden er  $5,6 \text{ cm} \cdot 100\,000 = 560\,000 \text{ cm} = 5600 \text{ m} = 5,6 \text{ km}$

### Eksempel 16

En bil kjører 210 km på 3 timer. Hvor mange km og mil kjører den på 1 time? Hvor mange meter kjører den på 1 sekund?

$210 \text{ km} : 3 \text{ h} = 70 \text{ km/h}$ . Dette er *farten* til bilen.

$70 \text{ km} = 7 \text{ mil}$  slik at farten også er 7 mil/h.

$70 \text{ km} = 70\,000 \text{ m}$ . I en time er det  $60 \cdot 60 = 3600 \text{ s}$ . Farten i m/s blir da  $\frac{70\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 19,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Eksempel 17

Lydfarten i luft er omtrent 330 m/s. Hvor mange km går lydsmellet fra et lynnedslag på 8 s?

$$\text{På 8 s går lyden } 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \text{ s} = 2640 \text{ m} = 2,64 \text{ km.}$$

### Eksempel 18

I Norge er enheten for penger norske kroner (NOK). Andre land har andre myntenheter. I Tyskland er enheten euro.

Prisen i NOK på 1 euro kalles *kursen* på euro. Den forandrer seg litt fra dag til dag. 23. mai 2014 var kursen på euro 8,1305 NOK.

Hvor mye kostet 250 euro i norske kroner denne dagen?

Hvor mange euro kunne du få for 1000 NOK?

$$250 \text{ euro kostet } 250 \cdot 8,1305 \text{ NOK} = 2032,63 \text{ NOK.}$$

$$1000 \text{ NOK} = 1000 : 8,1305 \text{ euro} = 122,99 \text{ euro.}$$

### Oppgave 8

- I gjennomsnitt spiser hver nordmann 9,5 kg sjokolade i året. Hvor mange gram blir dette i gjennomsnitt per dag?
- Det er ca. 5 millioner nordmenn. Hvor mange tonn sjokolade spises det i Norge på ett år?

### Oppgave 9



- På et kart med målestokken 1:1 000 000 er avstanden mellom Oslo og Stavanger 30,3 cm. Hvor mange km er avstanden i virkeligheten?
- Avstanden mellom Oslo og Bodø er 840 km. Hvor mange cm er avstanden på et kart som har målestokken 1:1 000 000?

### Oppgave 10



Abdi sykler med farten 18 km/h (kilometer per time).

- Hvor langt sykler han på 2 timer?
- Hva er farten hans målt i m/s?
- Hvor mange meter sykler han på 20 min?
- Hvor lang tid bruker han på å sykle 27 km?

## Oppgave 11

14. juni 2013 var kursen på engelske pund 8,97 kr.

- Hvor mye kostet 300 pund denne dagen?
- Hvor mye måtte man betale i norske kroner for en vare som kostet 79,90 pund?
- Hvor mange pund måtte man betale i pund for en vare som kostet 299 kr?

## 5. Forholdsregning

*Forskjellen* mellom to tall er det første tallet minus det andre.

*Forholdet* mellom to tall er det første tallet dividert med det andre.

### Eksempel 19

Lengden av et rektangulært rom er 8,00 m. Bredden er 5,00 m.

Da er forskjellen mellom lengden og bredden lik  $8,00 \text{ m} - 5,00 \text{ m} = 3,00 \text{ m}$ .

Forholdet mellom lengden og bredden er lik  $8,00 \text{ m} : 5,00 \text{ m} = 1,6$ .

Når vi skal regne ut en forskjell eller et forhold må de to tallene ha samme måleenhet!

## Oppgave 12

Far er 180 cm høy. Sønnen er 120 cm høy. Regn ut forskjellen og forholdet mellom høydene til far og sønn.

Alle forhold kan skrives som et desimaltall. Hvis tallene i forholdet kan forkortes til en brøk med "pene" tall, skriver vi ofte forholdet som et delestykke *uten* å utføre divisjonen.

### Eksempel 20

I en kake skal det være 3 dl sukker og 5 dl mel.

Forholdet mellom sukker og mel blir da  $3 : 5 = 0,6$ . Vi leser forholdet slik: "tre til fem".

På et bestemt kart er det 5 cm mellom stedene A og B. I virkeligheten er det  $500 \text{ m} = 50\,000 \text{ cm}$  mellom A og B.

Forholdet mellom avstanden på kartet og avstanden i virkeligheten blir da  $5 \text{ cm} : 50\,000 \text{ cm} = 1 : 10\,000$ .

Dette forholdet kaller vi *målestokken* til kartet, og det skrives alltid som et delestykke, ikke som desimaltall.

I Matematikk 1P bruker vi forhold i forbindelse med prosentregning, kart, formlike figurer, blandinger og oppskrifter, og prisindekser. Det brukes også i regning med proporsjonale størrelser og i sannsynlighetsregning.

## Oppgave 13

I et glass med 3 dl saftblanding er det 0,5 dl ren saft og 2,5 dl vann. Skriv forholdet mellom saftmengden og vannmengden som et delestykke med "pene" tall, som desimaltall og som prosent.

## Kartog målestokk

Et kart er et forenklet bilde av en del av jorda sett ovenfra. Kartet er mye mindre enn området det dekker. Forholdet mellom en avstand på kartet fra et sted til et annet og avstanden i virkeligheten mellom de samme to stedene, kalles *målestokken* til kartet. På et papirkart skrives den alltid som et delestykke hvor første tallet er 1 og andre tallet et "pent" tall (for eksempel 1000, 50 000, 1000 000).

Vi sier at målestokken 1 : 1000 er *større* enn målestokken 1 : 100 000.

Noen typer tegninger kan også oppfattes som kart, for eksempel en arkitekttegning av en leilighet. Tegninger har som oftest større målestokk enn et kart, for eksempel 1 : 100.

### Eksempel 21

På et kart med målestokk 1 : 50000 er avstanden mellom A og B lik 6 cm. Hvor lang er avstanden i virkeligheten?

Avstanden i virkeligheten er 50000 ganger større enn avstanden på kartet.

Den er da  $6 \text{ cm} \cdot 50000 = 300\,000 \text{ cm} = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$ .

### Eksempel 22

Det er 392 km i luftlinje fra Oslo til Trondheim. Hvor lang er avstanden på et kart med målestokk 1 : 750 000?

Det er naturlig å oppgi avstanden på kartet i cm så vi gjør først om 392 km til cm:

$392 \text{ km} = 392000 \text{ m} = 39200000 \text{ cm}$ .

Avstanden på kartet blir da  $39200000 \text{ cm} : 750000 = 52,3 \text{ cm}$ .

### Eksempel 23

6 cm på et kart tilsvarer 15 km i virkeligheten. Hva er målestokken til kartet?

Her er det enklest å finne forholdet mellom avstanden i virkeligheten og avstanden på kartet selv om målestokken er det omvendte av dette.

$15 \text{ km} = 15000 \text{ m} = 1500000 \text{ cm}$ .  $1500000 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = 25000$ .

Målestokken er derfor 1 : 25 000.

### **Oppgave 14**

På et orienteringskart med målestokk 1 : 5000 er det 8 cm mellom Oppkuven og Liastua. Hvor langt er det i virkeligheten?

### **Oppgave 15**

Avstanden mellom Oslo og Fredrikstad er 78 km i luftlinje. Hva er denne avstanden på et kart i målestokken 1 : 300 000?



## Oppgave 16

Ved å måle på PC-skjermen ser vi at på et kart fra Google maps er 3 cm på kartet lik 600 m i virkeligheten. Hva er målestokken til kartet?

Vi zoomer inn på kartet med en faktor 2. Hva blir målestokken nå?

## Blandinger

Når vi lager mat, blander vi ofte ulike ingredienser. En matoppskrift kan oppgi hvor mye det skal være av hver ingrediens. Oppskriften kan være tilpasset et bestemt antall personer. Hvis dette ikke stemmer med hvor mange som skal serveres, må mengdene forandres.

### Eksempel 24



6 porsjoner		
1	stk stor	lammelår (ca 2 1/2 kg)
3	ts	salt
1	ts	pepper
2	ts	knust rosmarin
2	fedd	hvitløk hakket
1	stk	løk, i båter
3	stk	gulrøtter
8	dl	vann

Bildet ovenfor viser en oppskrift fra internett på lammestek. Mengdene av ingrediensene passer til 6 personer. Hvor mye lammestek trenger vi til 9 personer?

Vi kaller mengden av lammestek til 9 personer for  $x$ . Da kan vi sette opp en forholdslikning og løse den:

$$\frac{x}{2,5} = \frac{9}{6}$$

$$x = \frac{9 \cdot 2,5}{6} = 3,75$$

Vi trenger ca. 3,75 kg stek til 9 personer.

## Oppgave 17

Hvor mye vann og hvor mye salt trenger vi til 9 personer hvis vi skal følge oppskriften i eksempel 10?

### Eksempel 25

På en saftflaske står det at man skal blande en del saftkonsentrat med 9 deler vann. Det betyr at forholdet mellom saftkonsentrat og vann som vi skal blande sammen er 1 : 9. Omvendt skal forholdet mellom vann og saftkonsentrat være 9 : 1. Hvor mye vann skal vi bruke til 0,5 dL saftkonsentrat?

Her hvor det er et «pent» forhold er det ikke nødvendig å sette opp en forholdslikning. Vi ser at det skal være 9 ganger så mye vann som saftkonsentrat. Derfor skal det være  $0,5 \text{ dL} \cdot 9 = 4,5 \text{ dL}$  vann. Hvor mye ferdig saft får vi?

0,5 dL konsentrat pluss 4,5 dL vann gir 5 dL saft.

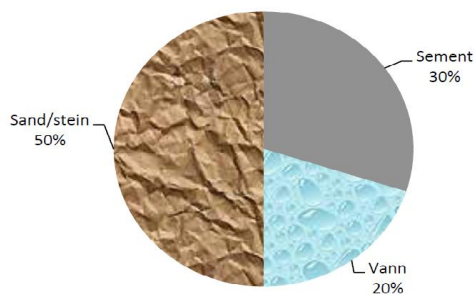
Hva er forholdet mellom saftkonsentrat og ferdig saftblanding?

Forholdet er  $\frac{0,5 \text{ dL}}{5 \text{ dL}} = \frac{1}{10} = 1 : 10$ .

### **Oppgave 18**

Betong er en blanding av sand, sement og vann. Se figuren til høyre.

- Hva er forholdet mellom sand og sement i betongen?
- Hva er forholdet mellom sement og vann?
- Hvor mye sement trengs til 20 kg betong?
- Hvor mye vann skal brukes til 10 kg sement?
- Hvor mye betong blir det av 10 kg sement?





## 6. Proporsjonale størrelser

Eksempler på proporsjonale størrelser:

- Prisen for appelsiner er proporsjonal med antall kilo appelsiner vi kjøper.
- Prisen i norske kroner for en bestemt vare er proporsjonal med prisen i euro.
- Omkretsen av en sirkel er proporsjonal med radien.

### Hvordan kan vi finne ut om to størrelser er proporsjonale?

- 1) Det kan hende at det er oppgitt i oppgaven!
- 2) Vi får vite at hvis den ene størrelsen blir dobbelt så stor, blir den andre også dobbelt så stor. Hvis den ene blir tre ganger så stor, blir den andre tre ganger så stor osv.
- 3) Det kan hende at sammenhengen er gitt med en tabell. Dette er det vanskeligste tilfelle. Hvordan kan vi se om  $y$  er proporsjonal med  $x$  her?

$x$	2	5	8
$y$	10	25	40

Ser vi godt på tallene, oppdager vi antagelig at  $y = 5x$ . Altså er  $y$  proporsjonal med  $x$ .

Det er ikke alltid at tallene er så enkle. Da lager vi en ekstra rad hvor vi regner ut forholdet  $y/x$ :

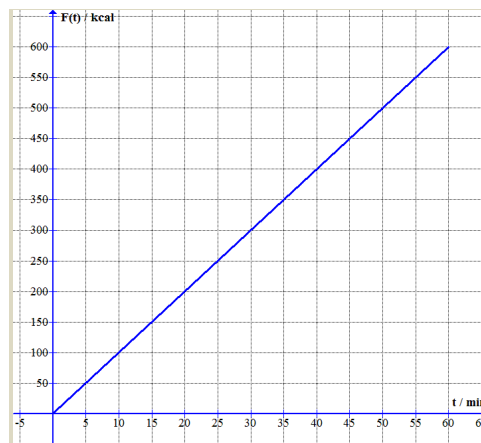
$x$	1	4	9
$y$	6,8	27,2	61,2
$\frac{y}{x}$	6,8	6,8	6,8

Fordi vi får samme verdi for forholdet  $\frac{y}{x}$  i alle tre kolonnene, er  $y$  proporsjonal med  $x$ .

### Oppgave 19

Noman løper på en tredemølle. Grafen viser forbrenningen  $F$  i kilokalorier (kcal) som en funksjon av tida  $t$  i minutter.

Er  $F$  og  $t$  proporsjonale størrelser? Begrunn svaret.



### Oppgave 20

Vi måler omkretsen  $o$  og diameteren  $r$  i tre sylinderformede bokser. Resultatene er framstilt i tabellen under.

d / cm	3,5	5,6	6,8
o / cm	11,0	17,6	21,4

- Undersøk om  $o$  er proporsjonal med  $r$ .
- Stemmer resultatet ditt med formelen  $o = 2\pi r$ ?

### Oppgave 21

En pakke med to ruller toalettpapir koster 12 kr. En pakke med 8 ruller koster 38 kr, og 16 ruller koster 64 kr. Undersøk om prisen er proporsjonal med antall ruller.



## 7. Omvendt proporsjonale størrelser

For noen størrelser er sammenhengen slik at når den ene øker, *minker* den andre. Hvis det i tillegg er slik at når den ene blir dobbelt så stor, blir den andre halvparten så stor, sier vi at de to størrelsene er *omvendt proporsjonale*.

Eksempler på *omvendt proporsjonale størrelser*:

- Utgiften på hver person som skal dele en regning likt er omvendt proporsjonal med antall personer.
- Farten vi kjører med er omvendt proporsjonal med tiden vi bruker på en fast strekning. (Dobbelt så lang tid betyr halvparten så stor fart.)

## Hvordan kan vi finne ut om to størrelser er omvendt proporsjonale?

1. Det kan hende at det er oppgitt i oppgaven.
2. Vi får vite at når den ene størrelsen blir dobbelt så stor, blir den andre halvparten. Hvis den ene blir tre ganger så stor, blir den andre tredjeparten osv.
3. Hvis vi får en tabell med noen sammenhørende verdier av  $x$  og  $y$ , kan vi regne ut  $x \cdot y$  i en tredje rad. Hvis vi da får samme tallet, er  $x$  og  $y$  omvendt proporsjonale.

### Eksempel 26

En klasse har leid et lokale til en elevfest. Leien er 5000 kr.

- a) Hva må hver elev betale hvis det kommer 50 elever på festen?
- b) Kall prisen per deltaker for  $y$  og lag en formel for  $y$  hvis det kommer  $x$  deltakere. Er  $x$  og  $y$  omvendt proporsjonale?

- a) Med 50 elever må hver elev betale  $5000 \text{ kr}/50 = 100 \text{ kr}$ .
- b) Formelen blir  $y = \frac{5000}{x}$ . Vi ser at  $x$  og  $y$  er omvendt proporsjonale.

### Oppgave 22

Tina betaler 400 kr for et dagskort i en alpinbakke.

- a) En dag kjører hun 10 turer. Hva blir prisen per tur?
- b) Forklar hvorfor prisen per tur er omvendt proporsjonal med antall turer.

## 8. Overslagsregning

I Del 1 til eksamen i 1P pleier det å være oppgaver hvor du skal utføre en *overslagsregning*. Det betyr at du *ikke* skal prøve å regne helt nøyaktig, men gjøre en passende *avrunding* av tall i oppgaven og *regne nøyaktig med disse avrundede tallene*.

### Eksempel 27

Oppskåret spekeskinke koster 289 kr kiloen. En pakke inneholder 210 g. Omtrent hvor mye koster pakken?

Når det står "omtrent" betyr det at vi ikke skal regne helt nøyaktig. Derfor runder vi av både kilopris og vekt til "pene tall". Det er naturlig å runde av til 300 kr og 200 g. Vi må også gjøre om 200 g til kg, og det gjør vi slik:  $200 \text{ g} = 200 : 1000 \text{ kg} = 0,2 \text{ kg}$ .

Skinkepakken koster da omtrent  $300 \frac{\text{kr}}{\text{kg}} \cdot 0,2 \text{ kg} = 60 \text{ kr}$ . (Nøyaktig verdi er 60,69 kr.)

Fordi vi rundet av kiloprisen *oppover* og vekten *nedover*, blir feilen vi gjør mindre enn om begge tallene rundes av samme vei.

### Eksempel 28

I en amerikansk nettbutikk koster en app for iPhone 3,95 dollar. Kursen på dollar er 5,78 kr. Omtrent hvor mange kroner koster appen?

Vi runder av til 4 dollar og 6 kr. Appen koster da omtrent  $4 \text{ dollar} \cdot 6 \frac{\text{kr}}{\text{dollar}} = 24 \text{ kr.}$

(Nøyaktig verdi er 22,83 kr.)

Dette blir litt for mye fordi vi rundet av begge tallene *oppover*.

### Oppgave 23

På Nordbysenteret koster 1 hg smågodt 6,95 svenske kroner. Omtrent hvor mye koster 7,2 hg i norske kroner når 1 svensk krone koster 0,88 norske kroner?

### Blandede oppgaver

#### B1

På en planke i et byggevarefirma står det 362. Det betyr at planken er 362 cm lang. Hva er lengden av planken målt i m og i mm?

#### B2

Det høyeste fjellet i verden, Mount Everest i Himalaya, har en høyde på 8848 m. Oppgi høyden i km og i mil.

#### B3

En linjal har lengden 30 cm. Hvor mange ganger må du flytte linjalen for å måle lengden på et bord som er 1,50 m langt?

#### B4



En papirbunke med 250 ark har en tykkelse på 5,0 cm. Hvor tykt er *ett* ark? Oppgi svaret i mm.

#### B5

Det er fire epler i en pose epler som veier 0,820 kg. Hvor mange gram veier hvert eple i gjennomsnitt?

#### B6

100 g cola inneholder 10,6 g sukker. Hvor mye sukker er det i en 1,5 L flaske med cola? 1 L cola veier omtrent 1 kg.

#### B7

I en C-vitamin-tablett er det 75 mg C-vitamin. Hvor mange tablett er trengs det for å få 1 g C-vitamin?

## Eksamensoppgaver

### E1

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)

Skriv av, gjør beregninger, og sett inn tallene som mangler i hver av linjene:

$$4,4 \text{ h} = 4 \text{ h og } \underline{\hspace{2cm}} \text{ min}$$

$$200 \text{ m/s} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km/h}$$

### E2

(Eksamen 1P våren 2011, Del 2)



**Stabburet Leverpostei 100g**  
Den originale Stabburet  
Leverpostei

Det spises over 120 millioner brødskiver med  
Stabburet Leverpostei hvert år

Kilde: [www.stabburet.no](http://www.stabburet.no) (21.08.2010)

Opplysningene ovenfor er hentet fra nettsidene til Stabburet. Bruk disse opplysningene når du løser oppgavene nedenfor.

- Regn ut hvor mange kilogram Stabburet leverpostei som spises i løpet av ett døgn hvis vi regner med at det er 100 g leverpostei i én boks.
- Regn ut hvor mange gram leverpostei som i gjennomsnitt brukes på hver brødskive.
- Regn ut hvor mange brødskiver en boks med 100 g leverpostei rekker til.

### E3

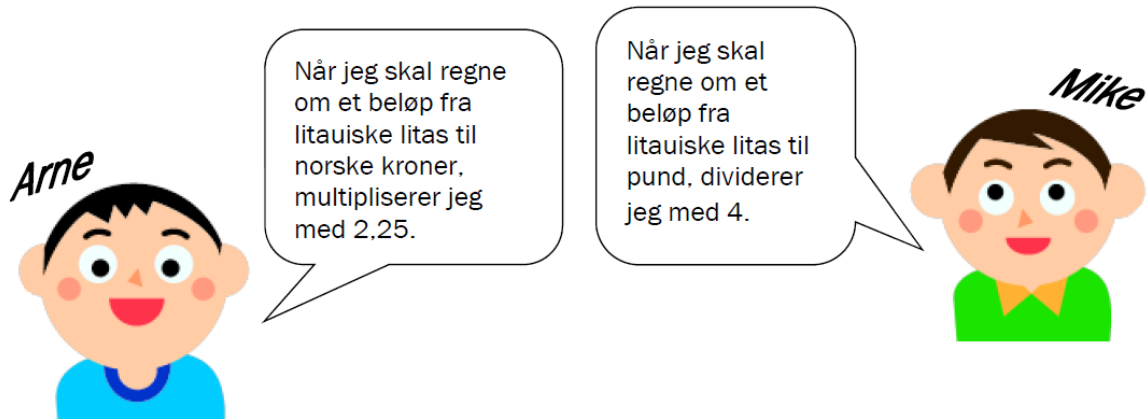
Kursen på dollar var 5,78 NOK 6. juni 2013. Hva kostet 300 dollar denne dagen? Hvor mange dollar kunne du få for 2500 NOK?

#### E4

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)



Mike fra England og Arne fra Norge møttes i Litauen.



Bruk Arnes og Mikes regneregler til å finne ut hvor mange norske kroner et pund svarte til.

#### E5

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)



Andersen kjøper fem bord. I enden av hvert bord står det et tall som forteller hvor mange centimeter bordet er. Se bildet under.

Gjør overslag og finn ut omtrent hvor mye Andersen må betale når bordene koster 8,95 kroner per meter.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

#### E6

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

På flyplassen i Amsterdam koster en mp3-spiller 210 euro. En euro koster 8,33 norske kroner. Gjør et overslag over hvor mye mp3-spillere koster i norske kroner.



### E7

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)



I butikk A koster et beger med 500 g druer 49,90 kroner.

En dag har butikk A følgende tilbud:

**KJØP 3 BEGER MED  
DRUER,  
BETAL FOR 2**



I butikk B koster druene 69,90 kroner per kilogram.

Du skal kjøpe 1,5 kg druer. I hvilken butikk lønner det seg å handle?

### E8

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Liv fyller 41,5 liter drivstoff på bilen sin. Hun betaler 509,62 kroner.

Bruk informasjonen på bildet. Gjør overslag og finn ut om

Liv har en bil som bruker bensin (95) eller diesel (D).



## E9

(Eksamen 1P våren 2010, Del 2)



Arne og Frode skal sykle til Melhus. Arne starter i Trondheim sentrum. Han holder en jevn fart på 18 km/t.

a) Hvor langt har Arne syklet etter 45 minutter?

Frode starter samtidig med Arne, men nærmere Melhus. Han holder jevn fart. Etter  $x$  timer vil Frode være  $y$  km fra Trondheim sentrum, der  $y = 12x + 5$ .

b) Hvor langt er det fra Trondheim sentrum til der Frode starter? Hvor stor er farten til Frode?

Fra Trondheim sentrum til Melhus er det ca. 20 km.


c) Hvem av de to kommer først til Melhus?

## E10

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)

Markus har vært på Island.

I banken betalte han 5,25 norske kroner for 100 islandske kroner (ISK).

Land	Kode	Kurs
Island 	ISK	5,25

### HALLGRÍMSKIRKJA

Aðgöngumiði að turni  
Admission to tower  
Fullorðinn/adult 500 kr.

Nr. 28509



a) Gjør et overslag over hvor mye han måtte betale for å komme inn i Hallgrimskirken.

Markus fant etter hvert en enkel metode for å gjøre overslagsregning fra islandske kroner til norske kroner:

”Jeg stryker først en null på slutten av det islandske beløpet. Så deler jeg det som står igjen, på to. Da finner jeg ut omtrent hvor mange norske kroner det islandske beløpet tilsvarer.”

b)  Forklar hvorfor denne metoden gir et godt overslag.

### E11

(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)



14,90 kroner  
per flaske



48,20 kroner  
per kilogram

Hanna vil kjøpe 6 flasker vann og 2,5 kg druer. Gjør overslag og finn ut omtrent hvor mye hun må betale.

### E12

(Eksamen 1P vår 2014 Del 1)

I en tank er det 616 L olje. Du skal fylle oljen på kanner. I hver kanne er det plass til 15,3 L.

Gjør overslag og finn omtrent hvor mange kanner du trenger.

### E13

(Eksamen høst 2011 Del 1)

Bjørn skal lage havregrøt.

Han har 6 dL havregryn. Bak på posen finner han oppskriften du ser til høyre.

Hvor mange liter vann trenger han?



**E14**

(Eksamen vår 2013 Del 1)

På en pakke grøtris står følgende opplysninger:

Porsjoner	Ris	Vann	Melk
3	1,5 dL	3,0 dL	0,75 L

a) Hvor mye ris, vann og melk trenger du for å lage 10 porsjoner med grøt?

Du har nok vann og ris, men bare 5 L melk.

b) Hvor mange porsjoner grøt kan du lage?

**E15**

(Eksamen 1P vår 2014, Del 1)

I ferdigblandet “Run Light” er forholdet mellom ren saft og vann 1:9.

Hvor mange liter ren saft går med dersom 500 personer skal få 0,2 L ferdigblandet “Run light” hver?

**E16**

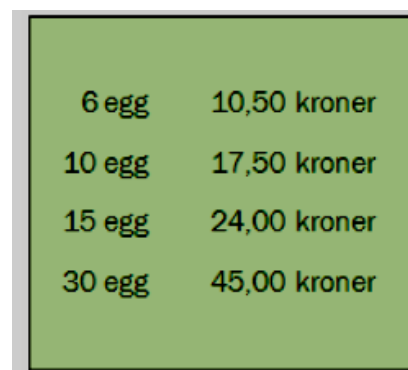
(Eksamen 1P vår 2011 Del 1)

4 cm på et kart tilsvarer 60 km i virkeligheten. Hvilken målestokk har kartet?

**E17**

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

Ove selger egg på torget. Han har laget en plakat som viser hvor mye eggene koster. Se figuren til høyre.



6 egg	10,50 kroner
10 egg	17,50 kroner
15 egg	24,00 kroner
30 egg	45,00 kroner

Undersøk om antall egg og pris er proporsjonale størrelser.

**E18**

(Eksamen 1P vår 2016, del 1)

$x$	2,5	7,5	
$y$	50		200

Gitt tabellen ovenfor,  $x$  og  $y$  er proporsjonale størrelser  
Skriv av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Gjør beregninger og fyll ut tabellen.

**E19**

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)



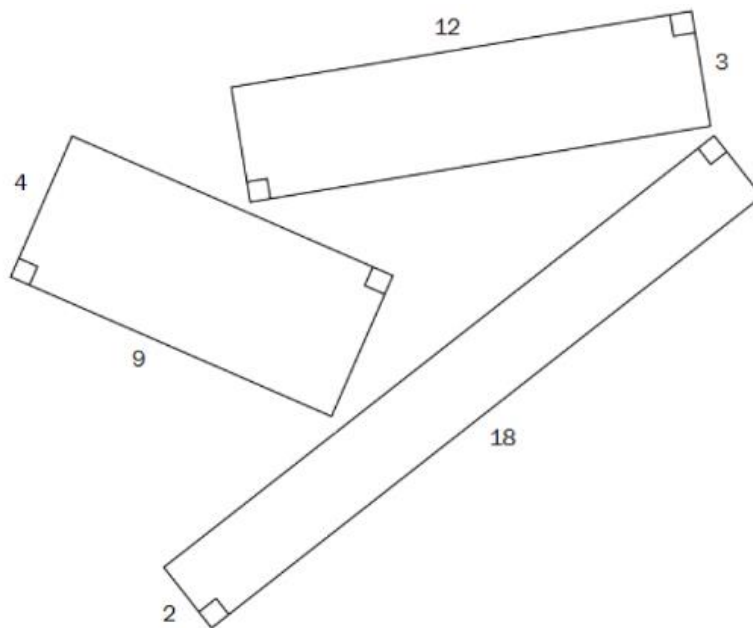
Antall elever	5	10	
Pris per elev (kroner)	600		100

Noen elever skal leie en hytte. Prisen per elev er omvendt proporsjonal med antall elever som blir med på hytteturen.

- Tegn av tabellen ovenfor i besvarelsen din, gjør beregninger og fyll inn tallene som mangler.
- Hvor mye koster det å leie hytten?

## E20

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)



Stian og Sondre har tegnet tre rektangler. Hvert rektangel har areal 36.

Stian påstår at lengde og bredde i alle rektangler med areal 36 er proporsjonale størrelser, mens Sondre mener at lengde og bredde er omvendt proporsjonale størrelser.

Forklar hva det betyr at to størrelser er proporsjonale, og hva det betyr at to størrelser er omvendt proporsjonale.

Avgjør hvem som har rett.

## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 2  $1,2 \text{ m} = 1200 \text{ mm}$   $2,6 \text{ m} = 260 \text{ cm}$   $4,85 \text{ m} = 48,5 \text{ dm}$   $6,4 \text{ cm} = 64 \text{ mm}$   
 $7,2 \text{ dm} = 72 \text{ cm}$   $5,8 \text{ km} = 5800 \text{ m}$

Oppgave 3  $45 \text{ mm} = 0,045 \text{ m}$   $75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$   $14 \text{ dm} = 1,4 \text{ m}$   $400 \text{ m} = 0,4 \text{ km}$   
 $32 \text{ mm} = 3,2 \text{ cm}$   $68 \text{ cm} = 6,8 \text{ dm}$   $250 \text{ cm} = 0,0025 \text{ km}$

Oppgave 4 a) 250 mil b) 40 000 km c) 42,5 mil

Oppgave 5  $0,6 \text{ kg} = 600 \text{ g}$   $300 \text{ g} = 0,3 \text{ kg}$   $0,4 \text{ g} = 400 \text{ mg}$   $750 \text{ mg} = 0,75 \text{ g}$   
 $2,13 \text{ hg} = 213 \text{ g}$   $80 \text{ g} = 0,8 \text{ hg}$   $7 \text{ hg} = 0,7 \text{ kg}$   $0,54 \text{ kg} = 5,4 \text{ hg}$

Oppgave 6 a) 220 000 kg b) 4,5 t c) 0,1 t

Oppgave 7 a) 156 s b) 3 min 15 s c)  $\frac{1}{3} \text{ h}$  d) 1,75 h e) 3 h 40 min 48 sek f) sept. 2017

Oppgave 8 a) 26 g b) 47 500 t

Oppgave 9 a) 303 km b) 84 cm

Oppgave 10 a) 36 km b) 5 m/s c) 6000 m d) 1,5 h

Oppgave 11 a) 2691 kr b) 716,70 kr c) 33,33 pund

Oppgave 12 60 cm, 1,5

Oppgave 13  $1 : 5 = 0,2 = 20 \%$

Oppgave 14 400 m

Oppgave 15 26 cm

Oppgave 16  $1 : 20\,000$ ,  $1 : 10\,000$

Oppgave 17 12 dL, 4,5 ts

Oppgave 18 a) 5 : 3 b) 3 : 2 c) 6 kg d) 6,7 kg e) 33,3 kg

Oppgave 19 Ja

Oppgave 20 a) Ja b) Ja

Oppgave 21 Nei

Oppgave 22 a) 40 kr b)  $y = \frac{400}{x}$

Oppgave 23 ca. 45 NOK

### **Fasit blandede oppgaver**

B1  $362 \text{ cm} = 3,62 \text{ m} = 3620 \text{ mm}$

B2  $8,848 \text{ km} = 0,8848 \text{ mil}$

B3 5

B4 0,2 mm

B5 205 g

B6 159 g

B7 ca. 13

### **Fasit eksamensoppgaver**

**E1** 4 h 24 min    720 km/h

**E2** a) 4320 kg    c) 13,4 g    c) 7,5 brødskiver

**E3.** 1734 NOK    432,52 dollar

**E4.** 10 NOK

**E5.** ca. 190 kr

**E6.** ca. 1600 NOK

**E7.** ca. 100 kr i A og ca. 105 kr i B

**E8.** Bensin

**E9.** a) 13,5 km    b) 5 km, 12 km/h    c) Arne

**E10.** ca. 25 kr (26 er OK)

**E11.** ca. 210 kr (200 er OK)

**E12** ca. 40

**E13** 2 L

**E14.** a) 5 dL, 10 dL, 2,5 L    b) 20

**E15.** 10 L

**E16.** 1 : 1 500 000

**E17.** Nei

**E18**  $y = 150, x = 10$

**E19.** b) 3000 kr

**E20** Sondre



# Kapittel 4. Prosentregning



## Mål for Kapittel 4, Prosentregning.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- tolke og bruke formler som gjelder dagligliv og yrkesliv
- regne med forhold, prosent, prosentpoeng og vekstfaktor

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg regner prosent av en mengde
- hvordan jeg finner ny verdi når prosentavslaget er gitt
- hvordan jeg finner gammel verdi fra nedsatt verdi og oppgitt prosentavslag
- hva prosentpoeng er og hvordan det er annerledes fra prosent
- hva vekstfaktor er og hvordan vi bruker den til å regne med renter og verdier som strekker seg over lang tid

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvorfor prosent er et nyttig verktøy
- hvorfor jeg kan finne ny og original verdi ved å få oppgitt prosentsats
- hvorfor det er nyttig å snakke om prosentpoeng i mange praktiske sammenhenger og ikke prosent

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- gi eksempler på bruk av prosent, prosentpoeng og vekstfaktor i dagliglivet
- lage og løse tekstoppgaver knyttet til prosent
- delta i en diskusjon rundt endring i prosent/verdi og oppgi begrunnelse for argumentene dine
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – omgjøring til 100

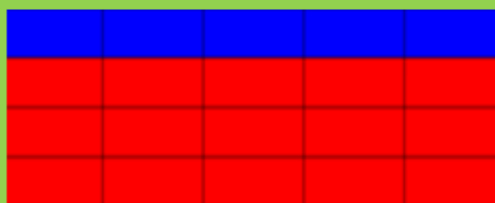
Under ser du tabeller med ulikt antall ruter. Hver tabell er en oppgave, og du skal gjøre deloppgavene under for hver tabell.

Rutene i hver tabell er enten rød eller blå. Din oppgave er:

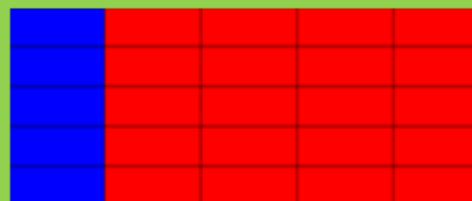
- Tell antall blå ruter og tell antall ruter til sammen i tabellen (både rød og blå)
- Skriv antall blå ruter i forhold til antall ruter til sammen som en brøk

Tenk deg at du kunne kopiere tabellen

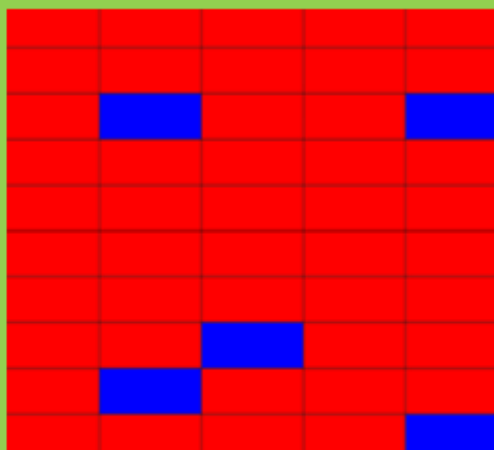
- Hvor mange eksemplarer til sammen av tabellen måtte du hatt for å få 100 ruter til sammen?
- Hvor mange blå ruter ville du da ha hatt? Skriv dette som en ny brøk hvor du bruker dette antallet i telleren og 100 i nevneren
- Hva har du egentlig kommet frem til nå?



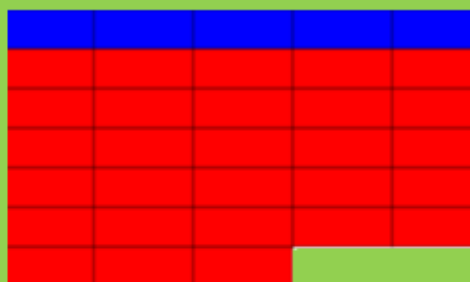
$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{5}{20} * \frac{20}{100} = \frac{5}{100}$$



$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{4}{20} * \frac{20}{100} = \frac{4}{100}$$



$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{9}{50} * \frac{50}{100} = \frac{9}{100}$$



$$\frac{\text{antall blå}}{\text{antall til sammen}} = \frac{5}{20} * \frac{20}{100} = \frac{5}{100}$$

## 1. Å regne ut en prosent

Alle har hørt om prosent, men ikke alle har forstått hva det egentlig er.

Her er et eksempel hvor det er naturlig å bruke prosentregning. Figuren under skal forestille en liten klasse på 10 elever. 4 av disse elevene fikk karakteren 5 i matematikk.

5	5	5	5						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Dette er en annen klasse på 30 elever. Her fikk 6 elever karakteren 5.

5	5	5	5	5	5				

Den største klassen har flest femmere, men alle vil vel likevel si at den minste klassen har best resultater i toppen fordi den største klassen har 3 ganger så mange elever, men bare 1,5 ganger så mange femmer-elever ( $6 : 4 = 1,5$ ).

I slike situasjoner er det naturlig å regne ut *brøkdelen* av femmer-elever i hver klasse og sammenligne størrelsen av brøkene.

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen:  $\frac{4}{10}$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen:  $\frac{6}{30}$

Det er vanlig å gjøre om brøkene til *hundredeler* for å sammenligne dem. Dette gjør vi lettest ved å dividere teller med nevner i hodet eller på kalkulator. Så kan vi skrive svaret som desimaltall, hundredeler eller *prosenttall*:

Brøkdelen av femmer-elever i den minste klassen:  $\frac{4}{10} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\%$

Brøkdelen av femmer-elever i den største klassen:  $\frac{6}{30} = 0,2 = \frac{20}{100} = 20\%$

Vi sier at 40 % av elevene i den minste klassen fikk 5, og 20 % av elevene i den største klassen fikk 5.

Prosent er bare en kortere måte å skrive *hundredeler* på.

25 % betyr  $\frac{25}{100}$ , som er lik 0,25 med desimaltall. 0,25 kaller vi *prosentfaktor* og 25 kaller vi *prosenttallet*.

### Eksempel 1

En sofa koster 6000 kr. Selgeren gir 600 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt gir han?

Vi finner ut hvor stor del 600 er av 6000 ved å regne ut brøken  $\frac{600}{6000}$

$$\frac{600}{6000} = 0,1 = 10 \%$$

Han gir 10 % rabatt.

### **Oppgave 1**

Jonas skal kjøpe en bukse til 500 kroner. Han oppdager en liten flekk på buksen og blir derfor tilbudt 100 kr i avslag. Hvor mange prosent avslag blir han tilbudt? **Uten kalkulator!**

### **Oppgave 2**

Aisha hadde en timelønn på 150 kr. Hun fikk en lønnsøkning på 30 kr timen. Hvor mange prosent utgjorde dette? **Uten kalkulator!**

### Eksempel 2

I en klasse på 25 elever kom 8 elever for sent til 1. time.

- Hvor mange prosent kom for sent?
- Hvor mange prosent kom tidsnok?

Vi regner ut forholdet  $8/25$ . Disse tallene kan vi regne uten kalkulator:

$$\frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32 \%$$

- 32 % kom for sent.
- Resten kom tidsnok:  $100 \% - 32 \% = 68 \%$

### **Oppgave 3**

I en klasse på 20 elever var det 14 jenter. Hvor mange prosent av elevene var jenter? Hvor mange var gutter? **Uten kalkulator**

### Eksempel 3

2817 av 11 200 velgere stemte på AP i et kommunevalg. Hvor mange prosent stemte AP?

Vi gjør om til desimaltall:  $\frac{2817}{11200} = 0,252 = 25,2 \%$

25,2 % av velgerne stemte AP.

#### Oppgave 4

I 2010 var det ca. 4 860 000 innbyggere i Norge. Av disse var 637 356 mellom 10 og 19 år. Hvor stor prosent av befolkningen var mellom 10 og 19 år?

Ofte skal vi finne hvor mange prosent noe *forandrer seg*. Det gir samme type regning som i eksemplene ovenfor

##### Eksempel 4

Ei bukse kostet 600 kr og ble satt ned 200 kr. Hvor mange prosent ble buksa satt ned?

Her skal vi finne ut hvor mye 200 kr er av 600 kr.

Vi gjør om til desimaltall: Prosentforandring =  $\frac{200}{600} = \frac{1}{3} = 0,333$

Buksa ble satt ned med 33,3 %.

Fordi  $\frac{200}{600} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  vil også mange si at den ble satt ned med 1/3 av opprinnelig pris.

#### Oppgave 5

Ei skjorte koster 300 kr. Tre skjorter koster da egentlig 900 kr, men du betaler bare for to, og får derfor 300 kr i rabatt. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du kjøper tre skjorter?

**Uten kalkulator!**

##### Eksempel 5

Jonas veide 80 kg. Etter en periode med mye usunn mat hadde vekten økt til 88 kg. Hvor mange prosent hadde vekten økt?

Vi finner først økningen i kg. Den er 88 kg – 80 kg = 8 kg. Førverdien var 80 kg.

Vi regner ut:  $\frac{8}{80} = 0,1 = 10 \%$

Vekten har økt 10 %. Denne utregningen gjør vi uten kalkulator!

#### Oppgave 6

Timelønnen til Tahir økte fra 160 kr til 176 kr. Hvor mange prosent økte lønnen?

**Uten kalkulator!**

### Eksempel 6

Etter en mageinfeksjon sank vekten til Emma fra 64 kg til 60 kg. Hvor mange prosent minket vekten hennes?

Hun mistet  $64 \text{ kg} - 60 \text{ kg} = 4 \text{ kg}$

Vi finner forandringen i prosent ved å gjøre om til desimaltall

$$\frac{4}{64} = 0,0625 = 6,25 \%$$

Vekten minket 6,25 %.

### Oppgave 7

I 1960 var verdensrekorden på 500 m skøyter for menn 40,20 s. I 2013 var den 34,03 s. Hvor mange prosent sank rekorden fra 1960 til 2013? **Bruk kalkulator**

## 2. Prosentregning

I oppgavene over har vi brukt desimaltall i utregningen. Det kan vi fortsatt gjøre når prosenttallet er oppgitt.

En annen metode som kanskje er lettere å forstå, er først å finne ut hvor mye 1 % tilsvarer. Deretter kan vi finne ut hvor mye prosenttallet som er oppgitt tilsvarer.

Denne metoden kalles ofte "Veien om 1" og kan også brukes til å løse andre problemer som omhandler forhold mellom to tall.

I eksemplene under viser vi begge metodene. Du velger selv hvilken du vil bruke.

### Eksempel 7

På en skole er det 600 elever. 20 % av elevene går på yrkesfag. Hvor mange elever går på yrkesfag?

#### Metode 1:

Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{600}{100} = 6 \text{ elever}$$

$$20 \% : 20 \cdot 6 = 120$$

120 elever går på yrkesfag.

#### Metode 2:

Vi gjør om til desimaltall:

$$20 \% = \frac{20}{100} = 0,20$$

$$600 \cdot 0,20 = 120$$

### Oppgave 8

I en klasse på 30 elever hadde 60 % valgt 1P. Hvor mange elever hadde valgt 1P? Ikke bruk kalkulator!

### Eksempel 8

I en klasse på 25 elever kom 32 % av elevene for sent. Hvor mange elever kom for sent?

#### **Metode 1:**

Vi finner ut hvor mange elever 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{25}{100} = 0,25 \text{ elever}$$

$$32 \% : 32 \cdot 0,25 = 8$$

#### **Metode 2:**

Vi gjør om til desimaltall:

$$32 \% = \frac{32}{100} = 0,32$$

$$0,32 \cdot 25 = 8$$

8 elever kom for sent. Sammenlign med eksempel 2.

### **Oppgave 9**

På en skole med 548 elever gikk 31 % av elevene på Vg1. Hvor mange elever gikk på Vg1?

Fordi prosenttallet ikke er helt nøyaktig, vil svaret ikke bli et helt tall.

Da må du her runde det av til nærmeste heltall!

### Eksempel 9

Under et salg er det 40 % rabatt på en bluse. Vanlig pris er 400 kr. Hvor mange kroner blir det gitt i rabatt?

#### **Metode 1:**

Vi finner ut hvor mange kroner 1 prosent utgjør:

$$1 \% : \frac{400}{100} = 4 \text{ kr}$$

$$40 \% : 40 \cdot 4 \text{ kr} = 160 \text{ kr}$$

#### **Metode 2:**

Vi gjør om til desimaltall:

$$40 \% = \frac{40}{100} = 0,40$$

$$0,40 \cdot 400 \text{ kr} = 160 \text{ kr}$$

Rabatten er 160 kr.

### **Oppgave 10**

I en klasse på 30 elever sluttet 13,3 % i løpet av skoleåret. Hvor mange av elevene i klassen sluttet?

### **Oppgave 11**

I en bestemt type kunstgjødsel er det 17 % nitrogen, 13 % kalium og 5 % fosfor. Hvor mange kilogram nitrogen, kalium og fosfor er det i en sekk med 40 kg gjødsel?

### **Oppgave 12**

På de fleste matvarer unntatt mat betales en merverdiavgift (mva) på 25 %. Hvor stor er merverdiavgiften på en vare som koster 90 kr uten mva?

### 3. Finne "førverdien" i prosentregning

#### Eksempel 10

Hvis prisen øker 10 % på en vare som koster 500 kr, regner vi ut prisøkningen i kroner slik:

$$500 \cdot 0,10 = 50$$

Hva om vi isteden får vite at 10 % økning tilsvarer 50 kr, og ut fra dette skal beregne prisen før økningen?

Her viser vi bare metode 1, vi finner først hvor mange kroner 1 % utgjør, så 100 %:

$$1\%: \frac{50}{10} = 5 \text{ kr}$$

$$100\%: 100 \cdot 5 \text{ kr} = 500 \text{ kr}$$

Prisen før økningen var 500 kr

#### Oppgave 13

En TV ble satt ned med 20 %. Da ble den 1000 kr billigere. Hvor mye kostet den før den ble satt ned? Ikke bruk kalkulator!

#### Eksempel 11

15 % av elevene på en skole er dagligrøykere. Dette utgjør 60 elever. Hvor mange elever er det på skolen?

Vi finner først ut hvor mange elever 1 % utgjør, så 100 %:

$$1\%: \frac{60}{15} = 4 \text{ elever}$$

$$100\%: 100 \cdot 4 \text{ elever} = 400 \text{ elever.}$$

Det er 400 elever på skolen. Sjekk gjerne at 15 % av 400 virkelig er lik 60!

#### Oppgave 14

Marius jobbet 4 timer overtid en bestemt uke. Dette utgjorde 12,5 % av arbeidstimene hans. Hvor mange timer jobbet han denne uka?



#### 4. Vekstfaktor.

Mye prosentregning handler om å finne en ny verdi når vi kjenner førverdien og vet hvor mange prosent førverdien øker eller minker. Da er begrepet **vekstfaktor** svært nyttig.

Vekstfaktoren er **desimaltallet** som forteller oss hvor mange prosent den nye verdien er av den gamle verdien etter en endring.

**Hvis verdien øker er vekstfaktoren større enn 1**

##### Eksempel 12

a) Prisen på en bukse stiger med 13 %.

1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?

Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er  $100 \% + 13 \% = 113 \%$  av den gamle prisen.

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $113 \% = \frac{113}{100} = 1,13$ , er vekstfaktoren 1,13

b) Årslønna til Tina økte med 4 %

1) Hvor mange prosent er den nye lønna av den gamle lønna?

Den gamle lønna er 100 %. Den nye lønna er  $100 \% + 4 \% = 104 \%$  av den gamle lønna.

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $104\% = \frac{104}{100} = 1,04$ , er vekstfaktoren 1,04.

##### Eksempel 13

Hva er vekstfaktorene som svarer til en økning på 16 %? På 30 %? På 3 %? På 2,5 %? På 100 % ?

16 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 16 \% = 116 \% = 1,16$ .

30 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 30 \% = 130 \% = 1,30$  (eller 1,3).

3 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 3 \% = 103 \% = 1,03$ .

2,5 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = 1,025$ .

100 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 100 \% = 200 \% = 2,00$  (eller 2).

100 % økning er altså en *fordobling*.

#### Oppgave 15

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en økning på 17 %, 60 %, 6 %, 7,5 %, 0,5 % og 200 %.

$$\text{Ny verdi} = \text{f\o rverdi} \cdot \text{vekstfaktor}$$

#### Eksempel 14

På de fleste varer vi kjøper, er noe av prisen vi betaler en såkalt merverdiavgift (mva) til staten. På mange varer er mva 25 % av prisen uten mva, som er den prisen butikken egentlig tar for varen.

Prisen *uten* mva på en mobiltelefon er 3040 kr. Hva er prisen *med* mva?

Vekstfaktoren som svarer til 25 % økning er  $100 \% + 25 \% = 125 \% = 1,25$ .

Prisen med mva =  $3040 \text{ kr} \cdot 1,25 = 3800 \text{ kr}$ .

(Det er altså denne prisen vi må betale i butikken.)

#### Oppgave 16

På mat er merverdiavgiften (mva) 15 %. Et brød koster 23,13 kr *uten* mva. Hva er prisen *med* mva?

#### Hvis verdien synker er vekstfaktoren mindre enn 1

#### Eksempel 15

a) En T-skjorte blir satt ned 30 %.

1) Hvor mange prosent er den nye prisen av den gamle prisen?

Den gamle prisen er 100 %. Den nye prisen er  $100 \% - 30 \% = 70 \%$  av den gamle prisen

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $70 \% = \frac{70}{100} = 0,70$ , er vekstfaktoren 0,70.

b) Verdien av en bil sank med 6 % i løpet av et halvt år.

1) Hvor mange prosent er den nye verdien av den gamle verdien?

Den gamle verdien er 100 %. Den nye verdien er  $100 \% - 6 \% = 94 \%$  av den gamle.

2) Hva er vekstfaktoren?

Siden  $94 \% = \frac{94}{100} = 0,94$ , er vekstfaktoren 0,94

#### Oppgave 17

Ei bukse koster 500 kr i butikk A. I butikk B koster den 20 % *mindre*. Regn med vekstfaktor på samme måte som tidligere og finn hvor mye buksa koster i butikk B

Verdt å merke seg: Når noe blir mindre, kan det i oppgaver stå at det *minker, minsker, blir lavere, avtar, settes ned* eller *reduseres*.

### Eksempel 16

Hva er vekstfaktorene som svarer til en minking på 38 %? På 5 %? På 1,5 %? På 95 %?

38 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 38 \% = 62 \% = 0,62$ .

5 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 5 \% = 95 \% = 0,95$ .

1,5 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 1,5 \% = 98,5 \% = 0,985$ .

95 % minking gir vekstfaktoren  $100 \% - 95 \% = 5 \% = 0,05$ .

### Oppgave 18

Skriv opp vekstfaktorene som svarer til en minking på 17 %, 50 %, 6 %, 7,5 % og 0,5 %.

### Oppgave 19

Hvor stor blir den nye verdien i forhold til den gamle hvis noe minker med 50 %?

Med 100 %?

### Oppgave 20

En ny bil koster 420 000 kr. Etter ett år er verdien redusert med 15 %. Bruk vekstfaktor og regn ut verdien til bilen etter ett år

## 5. Flere prosentvise forandringer etter hverandre

### Eksempel 17

I en frisørsalong kostet en hårklipp 400 kr. Ett år senere hadde prisen økt med 5 %, og etter enda ett år hadde den økt med 10 % til. Hva var prisen til slutt? Hvor mange prosent hadde prisen økt i løpet av disse to årene?

Vi bruker vekstfaktor og finner:

Pris etter ett år:  $400 \text{ kr} \cdot 1,05 = 420 \text{ kr}$

Pris etter to år:  $420 \text{ kr} \cdot 1,10 = 462 \text{ kr}$

$$\frac{462 \text{ kr}}{400 \text{ kr}} = 1,155 = 115,5\%$$

Prisen har økt med  $115,5 \% - 100 \% = 15,5 \%$ .

Legg merke til at den samlede prisøkningen er *mer* enn  $5 \% + 10 \% = 15 \%$ !

Det er ikke nødvendig å regne ut prisen etter ett år. Vi kan heller regne slik:

Pris etter to år:  $400 \text{ kr} \cdot 1,05 \cdot 1,10 = 462 \text{ kr}$

## Oppgave 21

I 2010 var timeprisen på et bilverksted 900 kr. Den økte med 6 % i 2011 og 8 % i 2012. Hva var timeprisen i 2012? Hvor mange prosent steg timeprisen fra 2010 til 2012? Løs helst oppgaven uten å regne ut timeprisen i 2011 (se eksempel 18).

### Eksempel 18

Prisen på et klesplagg er 500 kr. Prisen minker først med 30 % og etter en stund øker den igjen med 30 %. Hva er prisen til slutt?

Prisen til slutt:  $500 \text{ kr} \cdot 0,70 \cdot 1,30 = 455 \text{ kr}$

Hvorfor kommer ikke prisen tilbake til 500 kr i **eksempel 19**?

1. 30 % avslag på 500 kr blir 150 kr, slik at ny pris blir 350 kr.
2. Økningen på 30 % skal regnes av 350 kr, ikke 500 kr, slik at økningen blir bare 105 kr.
3. Sluttprisen blir da 455 kr.

## Oppgave 22

Prisen på en vare var 200 kr. Den ble satt opp med 20 %. Salget gikk dårlig, så etter en stund ble prisen satt ned med 20 %. Hva ble da prisen til slutt? Hvorfor ble ikke denne prisen 200 kr?

## Oppgave 23

Spiller det noen rolle for sluttprisen på en vare om den først stiger 30 % og så synker 20 %, eller om den først synker 20 % og så stiger 30 %?

### Eksempel 19

Sparing av penger på en bankkonto er en vanlig anvendelse av flere prosentvise tillegg. Hvis vi setter for eksempel 10 000 kr i banken 1. januar, vil vi etter ett år få *renter* av pengene slik at beløpet på kontoen øker. Renten er en viss prosent av det beløpet vi har på kontoen. Renteprocenten forandrer seg ofte, men her antar vi at prosenten holder seg fast på 3 % gjennom mange år. Da regner vi slik:

Etter ett år har vi i banken:  $10000 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10300 \text{ kr}$ .

Etter to år har vi i banken:  $10300 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10609 \text{ kr}$ .

Etter tre år har vi i banken:  $10609 \text{ kr} \cdot 1,03 = 10927,27 \text{ kr}$ .

Vi ser at beløpet øker mer og mer for hvert år, fordi vi får rente også av de forrige års rente. Hvis vi vil regne ut hvor mye vi har etter 10 år, kan vi regne ut det direkte ved å legge merke til at vi ganger med 1,03 for hvert år som går. 1,03 multiplisert med seg selv ti ganger kan vi skrive som potensen  $1,03^{10}$ , som er lik 1,343916.

Etter ti år har vi i banken:  $10000 \text{ kr} \cdot 1,03^{10} = 13439,16 \text{ kr}$ .

Legg merke til at penger i banken alltid regnes nøyaktig på øret, altså med to desimaler, selv om minste mynten som brukes nå er 1 krone.

### Oppgave 24

Finn først ut hvordan du regner ut en potens på kalkulatoren din, for eksempel  $1,035^{10}$ .

Du setter 5000 kr i banken til 3,5 % årlig fast rente. Hvor mye har du i banken etter 5 år?  
Etter 10 år? Etter 20 år?

#### Eksempel 20

Det er vanlig å anta at verdien av en bil avtar med en fast prosent hvert år, inntil den blir vraket. En bil koster 380 000 kr som ny. Verdien minker 15 % i året i 10 år. Hvor mye er bilen verdt etter 10 år?

15 % minking svarer til vekstfaktoren  $100 \% - 15 \% = 85 \% = 0,85$ . For hvert år som går, finner vi verdien ved å multiplisere forrige års verdi med 0,85. Etter 10 år har vi multiplisert nybilverdien med 0,85 10 ganger. Da får vi:

Verdien etter 10 år:  $380000 \text{ kr} \cdot 0,85^{10} = 74800 \text{ kr}$  (litt avrundet).

### Oppgave 25

En bærbar PC koster 9800 kr som ny. Vi regner med at verdien minker med 25 % i året, inntil ingen vil ha den lenger når den blir mer enn fem år. Hvor mye er PCen verdt etter 5 år?



#### Eksempel 21

Årslønna til Mona var 389 500 kr i 2012. Den hadde økt med 2,5 % siden 2011. Hva var årslønna hennes i 2011?


Husk at 2,5 % økning gir vekstfaktoren  $100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = 1,025$ .

$$x \cdot 1,025 = 389500$$

$$x = \frac{389500}{1,025} = 380000$$

Årslønna til Mona var 380 000 kr i 2011.

### Oppgave 26

Tina veide 5150 g da hun var 7 uker gammel. Da hadde hun lagt på seg 12 % siden hun var 5 uker. Hvor mye veide hun da hun var 5 uker gammel? 



### Eksempel 22

Prisen på en mobiltelefon er 3990 kr medregnet 25 % merverdiavgift (mva). Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften?

$$x \cdot 1,25 = 3990$$

$$x = \frac{3990}{1,25} = 3192$$

Prisen uten mva er 3192 kr.

Merverdiavgiften er  $3990 \text{ kr} - 3192 \text{ kr} = 798 \text{ kr}$ .

### Oppgave 27



Prisen på et brød er 26,60 kr, medregnet 15 % mva. Hva er prisen uten mva? Hvor stor er merverdiavgiften på brødet?



### Eksempel 23

Elevtallet i en klasse ved skoleslutt var 27. Det var 10 % *lavere* enn ved skolestart. Hvor mange elever var det ved skolestart?

Her er det så enkle tall at mange sikkert vil se svaret med en gang, men regnemåten er slik:

Her har elevtallet *minket* så vekstfaktoren må være mindre enn 1.


Vekstfaktoren er  $100 \% - 10 \% = 90 \% = 0,90$ .

$$x \cdot 0,90 = 27$$

$$x = \frac{27}{0,90} = 30$$

Det var 30 elever ved skolestart.

### Oppgave 28

Etter at Jostein hadde vært på en ukes fottur, veide han 76 kg. Dette var 5 % mindre enn han veide like før turen. Hvor mye veide han før turen? 

### Oppgave 29

Hassan tjener 138 kr timen. Dette er 8 % mindre enn Saras timelønn. Hva er Saras timelønn?



### Oppgave 30

I juni og juli 2013 ble det i Oslo anmeldt 88 innbrudd i villaer. Dette var en nedgang på

42,5 % fra året før. Hvor mange innbrudd ble anmeldt i 2012?



#### Eksempel 24

Prisen på en vare er satt opp med 5 % fire ganger. Nå koster den 243 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

Vekstfaktoren er  $100 \% + 5 \% = 105 \% = 1,05$ . Vi kaller den opprinnelige verdien for  $x$ . Da kan vi sette opp likningen

$$x \cdot 1,05^4 = 243$$

$$x \cdot 1,2155 = 243$$

$$x = \frac{243}{1,2155} = 200$$

Varen kostet opprinnelig 200 kr.

### Oppgave 31

Verdien til en aksje har sunket 3 % fem ganger på rad. Nå er den verdt 89 kr. Hva var den

verdt opprinnelig?



## 6. Prosentpoeng

Hvis oppslutningen om et politisk parti økte fra 18 % til 22 %, sier vi at den økte med 4 *prosentpoeng*.

Vi sier det slik fordi oppslutningen *ikke* økte med 4 *prosent*! For å regne ut økningen i *prosent*, kan vi regne slik:

$$\text{Økningen i prosent: } \frac{4}{18} = 0,222 = 22,2 \%$$

### Oppgave 32

I en spørreundersøkelse svarte 50 % at de var for at Oslo skal søke om å få vinter-OL i 2022. I neste undersøkelse hadde dette økt til 55 %.

- Hvor mange *prosentpoeng* hadde oppslutningen økt?
- Hvor mange *prosent* hadde den økt?

### Oppgave 33

I 2002 røykte 29 % av alle nordmenn over 16 år daglig. I 2012 var dette sunket til 16 %.

- Hvor mange *prosentpoeng* hadde andelen røykere minket?
- Hvor mange *prosent* hadde andelen røykere minket?

## Blandede oppgaver

### B1

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)

Tidligere kostet en vare 50 kroner. Nå koster varen 90 kroner.  
Hvor mange prosent har prisen økt med?

### B2

Tidligere kostet en vare 90 kroner. Nå koster varen 50 kroner.  
Hvor mange prosent har prisen minket med?

### B3

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)

I løpet av noen år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time.  
Hvor mange prosent steg timelønnen?

### B4

(Eksamen 1P våren 2015, Del 1)

Skriv som prosent



- a) 0,451
- b)  $\frac{5}{25}$

### B5

(Eksamen 2P våren 2015, Del 1)

En vare koster i dag 240 kr. Prisen er da satt ned med 20 %.

Hvor mye kostet varen **før** prisen ble satt ned?

### B6



- a) I et borettslag ble det stemt over et forslag som krevde 2/3 flertall for å bli vedtatt. 46 av 74 stemte for forslaget. Ble forslaget vedtatt?
- b) I et annet borettslag stemte 81 for og 39 mot et forslag som også krevde 2/3 flertall. Ble dette forslaget vedtatt?

### B7


(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

Det bor ca. 7,2 milliarder mennesker på jorda. 15 % har ikke tilgang til rent vann. Omtrent hvor mange mennesker har ikke tilgang på rent vann?

### B8

(Eksamen 2P våren 2008, Del 2)

I butikker ser en ofte tilbud av typen ”Ta tre, betal for to”.  
Du får altså tre varer til prisen for to.

- a) En klesbutikk hadde et slikt tilbud på T-skjorter. Der kostet én T-skjorte 129 kroner. Hvor mange prosent avslag vil du få ved å benytte deg av tilbudet ”Ta tre, betal for to”?
- b)  I tegneseriestripen nedenfor har Pondus tolket tilbudet annerledes. Hvor mange prosent avslag fikk han?



### B9



Hos en frisør betaler du full pris for de fire første klippene, men får 50 % rabatt på det femte. Hvor mange prosent rabatt får du hvis du ser på disse fem klippene samlet?

### B10

(Eksamen 2P våren 2011, Del 1)

Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din og fyll inn det som mangler.

Prosentvis endring	Vekstfaktor
+ 2 %	
- 68 %	
	0,25
	2

### B11

a) I følge Aftenposten 20. juni 2013 har antall leverte brev per postkasse gått ned fra 750 i år 2000 til 450 i 2012. Hvor mange prosent har antall brev per postkasse minket?



b) Posten antar at i 2020 vil antall brev ha falt til 230 per postkasse i året. De sier at da har to tredjedeler av posten forsvunnet på 20 år. Undersøk om denne påstanden er riktig.

### B12

(Eksamen våren 2013, Del 1)



En vare koster nå 210 kr. Prisen er da satt ned med 30 %. Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

**B13**

I mai 2013 eksporterte norske bedrifter varer og tjenester for 72,9 milliarder kroner. Dette var 11,2 % mindre enn i mai 2012. Hvor stor var eksporten i mai 2012?

**B14**

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 2)

Siri setter inn 12 000 kroner på en ny bankkonto. Hun lar pengene stå urørt og får 4,5 % rente per år.

Hvor mye vil hun ha på kontoen etter 15 år?

**B15**

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Stian har en bil som i dag er verdt 270 000 kroner. Verdien til bilen har avtatt med 10 % det siste året. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 10 % hvert år i årene framover.

- 1) Hvor mye vil bilen være verdt om ett år?
- 2) Hvor mye var bilen verdt for ett år siden?

**B16**

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)



En vare selges i to forskjellige butikker. Prisen er den samme i begge butikkene. I butikk A settes prisen opp med 20 %. I butikk B settes prisen først opp med 10 % og så etter noen dager med 10 % til. Marit påstår at prisen da fremdeles er den samme i begge butikkene.

Forklar Marit hvorfor dette ikke er riktig. Bruk gjerne et eksempel når du forklarer.

**B17**

(Eksamen 1P våren 2012, Del 1)

En bil koster 250 000 kroner. Bilens verdi avtar med 15 % per år.

Forklar hvilket av regnestykkene nedenfor som kan brukes for å finne hvor mye bilen er verd etter 10 år.

- 1)  $250\,000 - 10 \cdot \frac{250\,000 \cdot 15}{100}$
- 2)  $250\,000 \cdot 0,15^{10}$
- 3)  $250\,000 \cdot 0,85^{10}$

**B18**

Fra 2009 til 2012 steg norske boligpriser i gjennomsnitt med 8,3 % hvert år. Hvor mange prosent steg boligprisene totalt fra 2009 til 2012? (Nei, svaret er ikke 24,9 %!)

**B19**

(Eksamen 1P våren 2010, Del 2) 

Ola skal bygge hus. Huset vil koste 2 300 000 kroner. Han har 150 000 kroner i banken. Resten må han låne. I Husbanken får han låne 80 % av det huset vil koste. Renten i Husbanken er 4 % per år. Resten av pengene må han låne i en privat bank til 6 % rente per år.

- Hvor mye penger får Ola låne i Husbanken, og hvor mye må han låne i den private banken?
- Hvor mange kroner må han til sammen betale i renter i Husbanken og den private banken det første året?

Ola kan trekke fra 28 % av rentekostnadene på skatten. Dette kalles et skattefradrag.

- Hvor store blir renteutgiftene til Ola det første året, dersom vi tar hensyn til skattefradraget?

**B20**

En bensinstasjon reklamerer for bilvask: "Kjøp kupongkort med 5 vask, betal for 3. Spar 40 %." Stemmer dette?


**B21**

(Eksamen 1P våren 2014, Del 2)

Prisen på en vare er satt opp 10 % fem ganger. Opprinnelig kostet varen 246 kroner.

- Hvor mye koster varen nå?
- Hvor mange prosent er prisen totalt satt opp?

Prisen på en annen vare også satt opp 10 % fem ganger. Nå koster varen 550 kroner.

-  Hva kostet denne varen opprinnelig?

## Fasit

Fasit øvingsoppgaver	Fasit blandede oppgaver
Oppgave 1 20 %	B1 80 %
Oppgave 2 20 %	B2 44,4%
Oppgave 3 70 % , 30 %	B3 15 %
Oppgave 4 13,1 %	B4 a) 45,1 % b) 20 %
Oppgave 5 33,3 %	B5 300 kr
Oppgave 6 10 %	B6 a) Nei b) Ja
Oppgave 7 15,3 %	B7 1,08 milliarder
Oppgave 8 18	B8 a) 33,3 % b) 60 %
Oppgave 9 170	B9 10 %
Oppgave 10 4	B10 1,02 0,32 -75% +100%
Oppgave 11 6,8 kg 5,2 kg 2,0 kg	B11 a) 40 % b) Ja, omtrent
Oppgave 12 22,50 kr	B12 300 kr
Oppgave 13 5000 kr	B13 82,1 milliarder
Oppgave 14 32 timer	B14 23223,39 kr
Oppgave 15 1,17 1,60 1,06 1,075 1,005, 3	B15 1) 243 000 kr 2) 300 000 kr
Oppgave 16 26,60 kr	B17 Alternativ 3
Oppgave 17 400 kr	B18 27,0 %
Oppgave 18 0,83 0,50 0,94 0,925 0,995	B19 a) 1 840 000 kr, 310 000 kr b) 92 200 kr c) 66384 kr
Oppgave 19 Halvparten, null	B20 Ja
Oppgave 20 357 000 kr	B21a) 396 kr b) 61 % c) 341 kr
Oppgave 21 1030 kr 14,48 %	
Oppgave 22 192 kr. Fordi grunnlaget før nedgangen er større enn før økningen.	
Oppgave 23 Nei	
Oppgave 24 5938,43 kr, 7052,99 kr, 9948,94 kr	
Oppgave 25 2326 kr	
Oppgave 26 4105 g	
Oppgave 27 23,13 kr, MVA er 3,47 kr.	
Oppgave 28 80 kg	
Oppgave 29 150 kr	
Oppgave 30 153	
Oppgave 31 104 kr	
Oppgave 32 a) 5 %-poeng b) 10 %	
Oppgave 33 a) 13 %-poeng b) 44,8 %	

# Kapittel 5. Lengder og areal



## Mål for Kapittel 5, Lengder og areal.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bruke og grunngi bruk av formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning til beregninger i praktisk arbeid
- løse problem som gjelder lengde, vinkel, areal og volum

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg regner om mellom ulike lengdeenheter
- hva omkrets er og hvordan jeg beregner det for ulike figurer (enkle og sammensatte)
- hvordan jeg regner ut en ukjent side i en rettvinklet trekant ved bruk av Pytagoras
- hvordan jeg regner arealet av de grunnleggende figurene kvadrat, rektangel, trekant, parallelogram, rombe, trapes og sirkel
- hva formlikhet er og hvordan løse en oppgave baret på formlikhet

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvorfor Pytagoras ligning stemmer
- hvorfor formelen for arealer av figurene stemmer
- hvorfor formlikhet er nyttig i dagliglivet og hvordan formlikhet knyttes til målestokk hvorfor å løse oppgaver med areal av sammensatte figurer kan løses på ulike måter

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- sammenligne areal av ulike figurer og løse oppgaver knyttet til dette.
- lage og løse oppgaver knyttet til omkrets, areal og formlikhet
- forklare nytten ved kunnskap om areal og lengder i dagliglivet
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Geometri på veggen

Ta med mobiltelefonen din ut, ta bilde av en av skolens vegger og ta en utskrift av bildet.

Deretter skal du lage geometrioppgaver fra bildet til en medelev.

Dette kan være oppgaver om:

- Å beskrive geometriske figurer på bildet
- Å finne lengder og omkrets til geometriske figurer på bildet
- Å finne eller gjenkjenne geometriske figurer på bildet
- Å regne arealet til områder på bildet (dette trenger ikke være kjente figurer)
- Å bruke Pytagoras sin læresetning for å finne lengder til geometriske figurer på bildet
- Å beskrive vinkler til geometriske figurer på bildet

Husk at du må kunne løse oppgavene selv.

## Målenheter for lengde

Vi repeterer først lengdeenheter. Grunnenheten for lengde er meter. Ofte er det mer praktisk å bruke mm, cm, dm eller km. Se tabellen nedenfor.

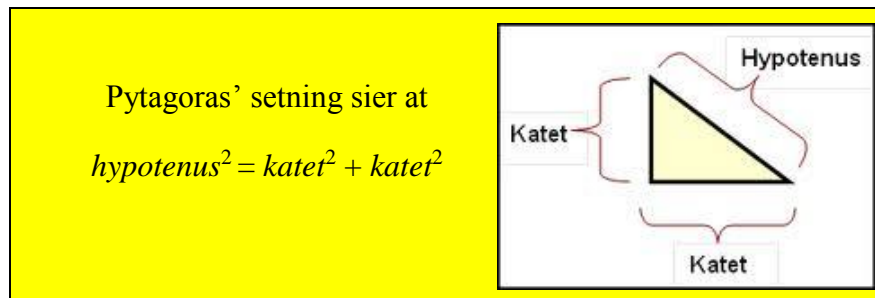
Forstavelse	Betydning	Eksempel
milli (m)	Tusendel = $1/1000 = 0,001$	3 mm = 0,003 m
centi (c)	Hundredel = $1/100 = 0,01$	4 cm = 0,04 m
desi (d)	Tidel = $1/10 = 0,1$	2,5 dm = 0,25 m
kilo (k)	Tusen = 1000	3,4 km = 3400 m

For avstander brukes også mil. 1 mil = 10 km.

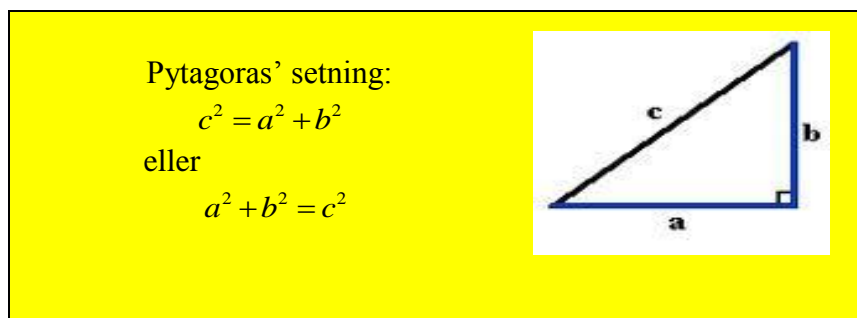
## 1. Beregning av sidelengder i rettvinklede trekanter

I en *rettvinklet* trekant er *katetene* de to sidene som danner vinkelen på  $90^\circ$ .

Den tredje (og lengste) siden, heter *hypotenusen*.



Hvis vi kaller lengdene av de to katetene for  $a$  og  $b$ , og lengden av hypotenusen for  $c$  (se figuren under), kan vi skrive setningen på en kortere måte:



### Eksempel 1

Se figuren til høyre. Vi kjenner katetene og skal finne hypotenusen.

Her er  $a = 12$  og  $b = 5$ . Da finner vi hypotenusen slik:

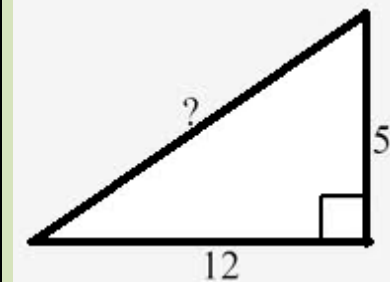
$$c^2 = 12^2 + 5^2$$

$$c^2 = 144 + 25$$

$$c^2 = 169$$

$$c = \sqrt{169} = 13$$

$c$  er 13 cm





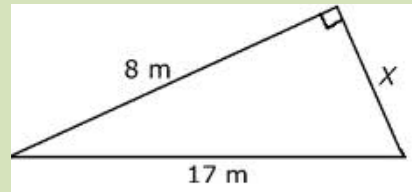
## Oppgave 1

Katetene i en rettvinklet trekant er 7 cm og 8 cm. Hvor lang er hypotenusen? Tegn en pen figur før du løser oppgaven.

### Eksempel 2

Her skal vi finne den ukjente kateten på figuren til høyre. Ikke la deg forvirre av at trekanten er snudd på figuren!

Vi kaller lengden av den ukjente kateten for  $x$  og bruker Pytagoras. Her er det lurt å sette hypotenusen på *høyre* side av likningen slik at den ukjente kommer på *venstre* side.



$$x^2 + 8^2 = 17^2$$

$$x^2 + 64 = 289$$

$$x^2 = 289 - 64$$

$$x^2 = 225$$

$$x = \sqrt{225} = 15$$

Den andre kateten er 15 m.

## Oppgave 2

I en rettvinklet trekant er hypotenusen 20 cm. Den ene kateten er 10 cm. Hvor lang er den andre kateten? Tegn en pen figur før du løser oppgaven.

## 2. Omkrets

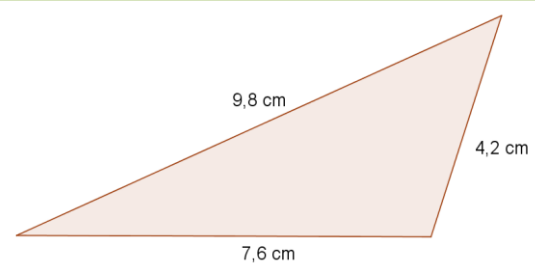
*Omkretsen* av en figur viser hvor langt det er rundt hele figuren.

Omkretsen av en trekant eller en firkant kan vi finne ved å legge sammen lengdene av alle sidene.

### Eksempel 3

Omkretsen av trekanten til høyre er

$$7,6 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm} + 9,8 \text{ cm} = 21,6 \text{ cm}.$$



#### Eksempel 4

Omkretsen av rektangelet til høyre er

$$12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$



Pass på at alle lengdene du legger sammen har *samme målenhet!*

#### **Oppgave 3**

- På en rektangelformet tomt er to av sidene 20 m og 30 m. Hvor stor er omkretsen av tomta?
- I en trekant er lengden av sidene 6 cm, 1,5 dm og 0,20 m. Finn omkretsen.
- I en rettvinklet trekant er hypotenusen 5 cm, og den ene kateten er 4 cm. Finn omkretsen av trekanten.
- I et rektangel er den korteste siden 6 cm. Forholdet mellom den lengste og den korteste siden er 3 : 2. Finn omkretsen av rektangelet.

Omkretsen av *sirkel* kan vi regne ut med formelen  $o = \pi d = 2\pi r$ .

Her er  $r$  radien i sirkelen,  $d = 2r$  er diameteren, og  $\pi$  (pi) er det berømte tallet 3,1415....

Se om du finner  $\pi$  på en egen tast på kalkulatoren.

#### Eksempel 5

I sirkelen til høyre er radien 6 cm.

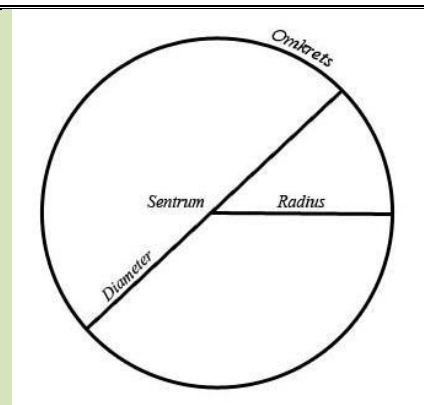
Diameteren er da  $6 \text{ cm} \cdot 2 = 12 \text{ cm}$ .

Omkretsen kan vi regne ut slik:

$$o = \pi d = \pi \cdot 12 \text{ cm} = 37,7 \text{ cm}$$

eller slik:

$$o = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm} = 37,7 \text{ cm}$$





### Eksempel 6

Omkretsen av en trestamme er 182 cm. Hvor stor er radien av treet hvis vi regner med at tverrsnittet av treet er en perfekt sirkel?

Her er omkretsen oppgitt og radien er ukjent. Hvis vi bruker formelen for omkretsen av en sirkel, får vi en likning som vi løser slik:

$$2\pi r = o$$

$$2 \cdot \pi \cdot r = 182$$

$$r = \frac{182}{2\pi} = 29,0$$

Radien til trestammen er 29,0 cm.

Når du regner ut  $\frac{182}{2\pi}$  må du taste det inn slik på kalkulatoren:  $182 : (2 * \pi)$ . Sjekk at du får ca. 29,0 på din egen kalkulator!

### Oppgave 4

a) Radien til en tallerken er 13 cm. Hvor stor er omkretsen av tallerkenen?



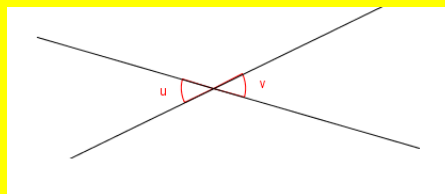
b) Du har 2,0 m dekorasjonsbånd som du vil sy fast som en sirkel til pynt på en duk. Hvor stor blir radien og diameteren i denne sirkelen?

## 4. Formlike figurer

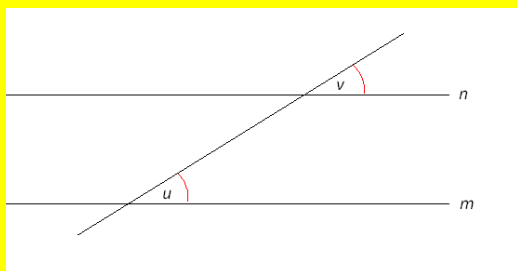
To geometriske figurer er *formlike* hvis vi kan forstørre den ene figuren slik at den blir nøyaktig lik den andre. To sirkler er alltid formlike. Det samme er to kvadrater. Her skal vi bare se på formlike *trekanter*.

### Vinkler i formlike trekanter

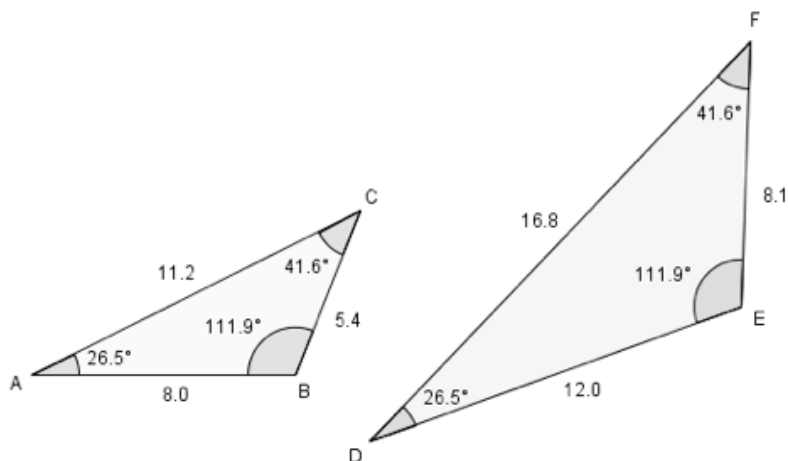
- Vinklene i trekantene er parvis like store
- Summen av vinklene i en trekant er alltid  $180^\circ$
- Toppvinkler er like store



- Samsvarende vinkler ved parallelle linjer er like store



De to trekantene nedenfor er altså formlike.



På denne figuren sier vi at vinkel D er *samsvarende* med vinkel A, og siden DF er samsvarende med siden AC.

Nå regner vi ut *forholdet* mellom de tre parene med samsvarende sider:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{16,8}{11,2} = 1,5 \quad \frac{DE}{AB} = \frac{12,0}{8,0} = 1,5 \quad \frac{EF}{BC} = \frac{8,1}{5,4} = 1,5$$

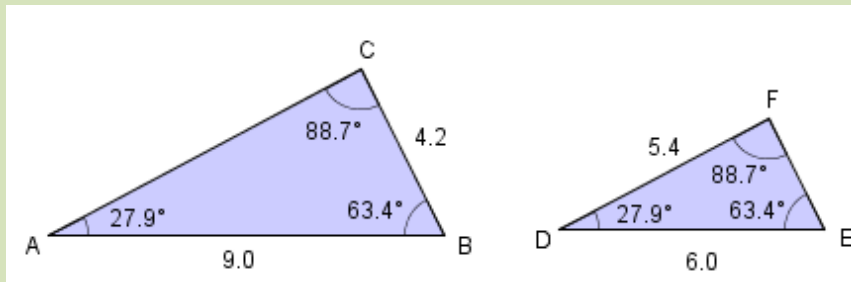
Dette betyr at hver side i den største trekanten er 1,5 ganger så lang som den samsvarende siden i den minste trekanten.

For to formlike trekanter  $ABC$  og  $DEF$  er

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Vinkel D må da samsvare med vinkel A og vinkel E med vinkel B.

### Eksempel 7



Regn ut lengden av siden  $AC$  i trekanten ovenfor.

Vi ser at de to trekantene er formlike og at lengden av siden  $DF$ , som samsvarer med  $AC$ , er oppgitt. Da kan vi sette opp en forholdslikning som viser at to forhold er like store. Det er lurt å sette opp forholdene slik at den ukjente siden står over brøkstreken:

$$\frac{AC}{5,4} = \frac{9,0}{6,0}$$
$$AC = \frac{9,0 \cdot 5,4}{6,0}$$
$$AC = 8,1$$

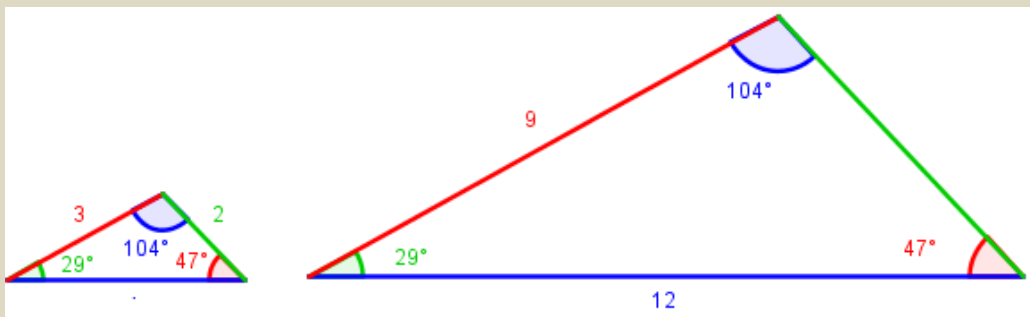
Regn ut lengden av siden  $EF$  i trekanten ovenfor.

$EF$  samsvarer med  $BC$ . Da kan vi sette opp og løse en likning:

$$\frac{EF}{4,2} = \frac{6,0}{9,0}$$
$$EF = \frac{6,0 \cdot 4,2}{9,0}$$
$$EF = 2,8$$

### Oppgave 5

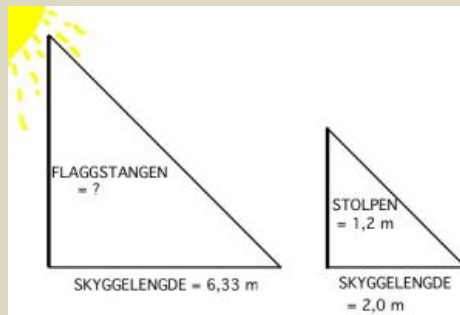
Regn ut lengden av de to ukjente sidene i trekantene nedenfor. Sett selv passende bokstaver på hjørnene i trekantene.



## Oppgave 6

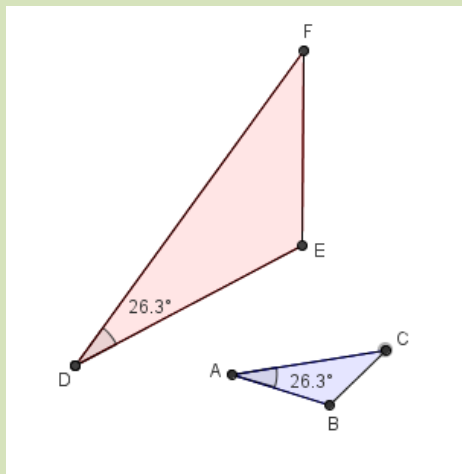
Finn og Torleif kranglet høylydt. Det var 17. mai, og saken gjaldt en flaggstang. Finn mente at den ikke kunne være høyere enn 4 meter, mens Torleif var bomsikker på at den måtte være minst 5 meter! Så kom de på den "lyse" ideen å se på en gjerdestolpe i nærheten. Den var 1,2 meter høy, og kastet en skygge som var 2 meter lang. Flaggstangens skygge var 6,33 meter. Hvem av de to hadde rett?

En figur viser at oppgaven kan løses ved å bruke formlike trekanter:



Det kan hende at du må *forklare* hvorfor to oppgitte trekanter er formlike.

### Eksempel 8



Her får du i tillegg vite at vinkel B =  $109,7^\circ$  og vinkel F =  $44,0^\circ$ . Forklar at trekantene er formlike.

Vi må nå undersøke om vinkel E er lik vinkel B, og om vinkel C er lik vinkel F. Vi kan regne ut den manglende vinkelen i hver trekant ved å bruke at *summen av alle tre vinklene i en trekant alltid er  $180^\circ$* . Da finner vi

$$\text{Vinkel E} = 180^\circ - 26,3^\circ - 44,0^\circ = 109,7^\circ$$

$$\text{Vinkel C} = 180^\circ - 26,3^\circ - 109,7^\circ = 44,0^\circ$$

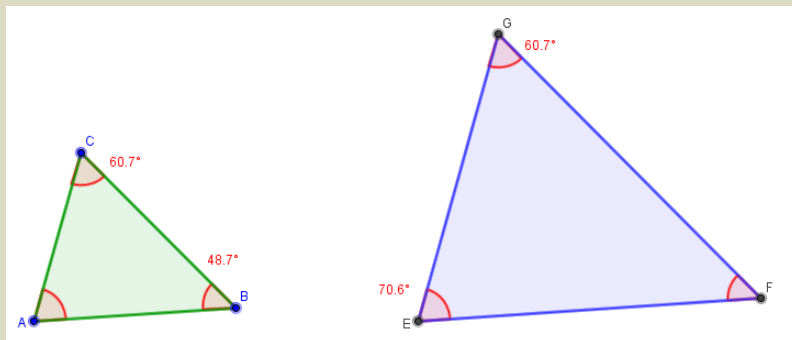
Altså er vinklene i de to trekantene parvis like store og trekantene er formlike.

### Oppgave 7

a) Finn  $\angle A$

b) Finn  $\angle F$

c) Forklar at  $\triangle ABC$  og  $\triangle EFG$  er formlike

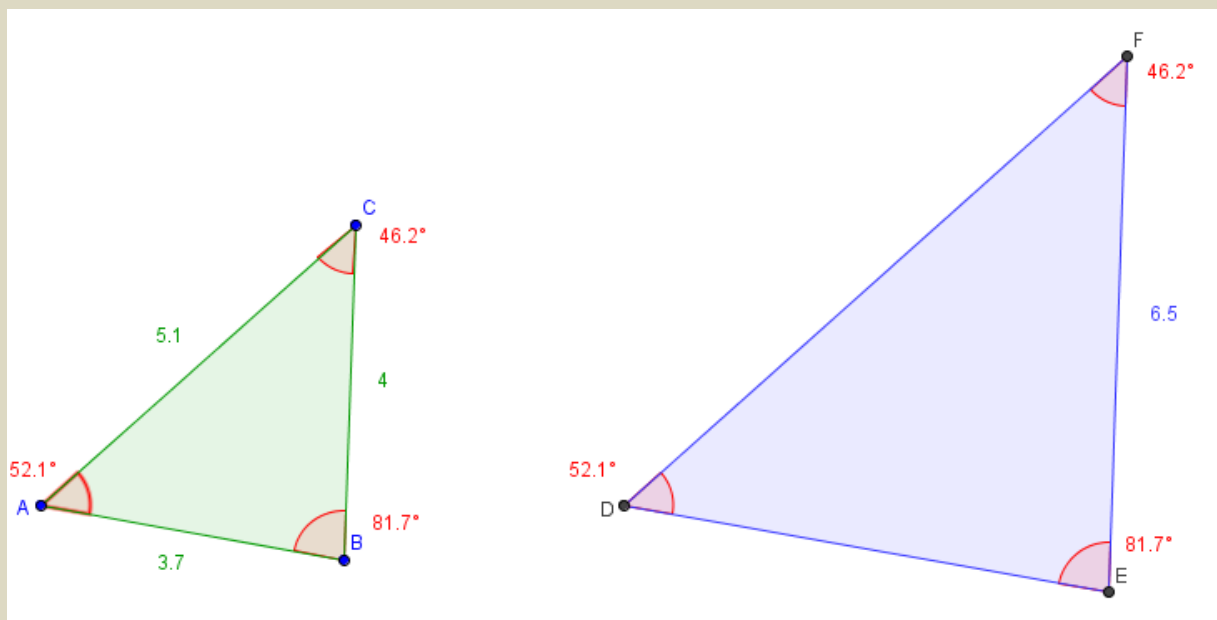


### Oppgave 8

Trekantene  $ABC$  og  $DEF$  er formlike.

a) Hvor lang er  $DE$ ?

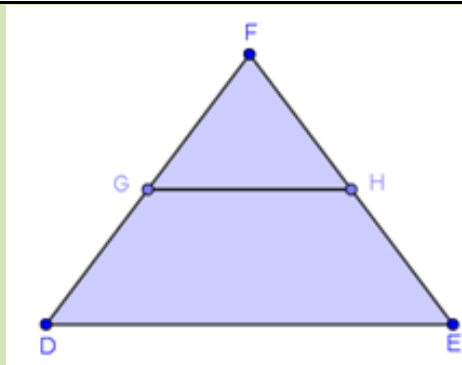
b) Hvor lang er  $DF$ ?



### Eksempel 9

På figuren til høyre er sidene  $DE$  og  $GH$  parallelle. Forklar at trekantene  $DEF$  og  $GHF$  er formlike.

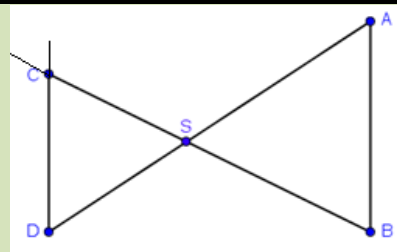
Fordi  $DE$  og  $GH$  er parallelle, må vinkel  $G$  og vinkel  $D$  være like store. Det samme gjelder vinkel  $H$  og vinkel  $E$ . Vinkel  $F$  er felles for begge trekantene. Altså er de formlike.



### Eksempel 10

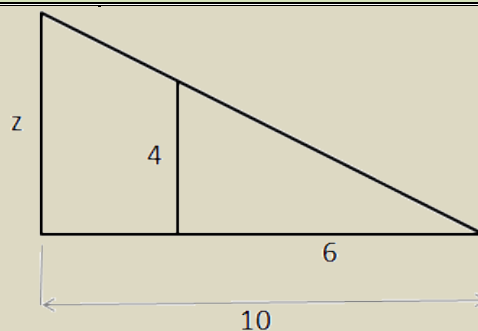
På figuren til høyre er  $AB$  og  $CD$  parallelle. Forklar at  $ABS$  og  $CDS$  er formlike.

De to vinklene i hjørnet  $S$  er opplagt like store. Ved å forlenge sidene  $SC$  og  $DC$ , ser vi at vinkel  $B$  og vinkel  $C$  er like store. Da to vinkler i de to trekantene er parvis like store må også den tredje vinkelen være det, og trekantene er formlike.



### Oppgave 9

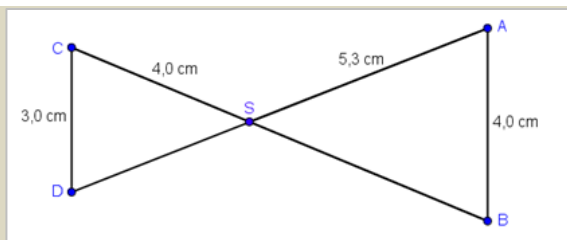
Bruk formlikhet til å finne lengden  $z$  på figuren til høyre.





### Oppgave 10

Regn ut lengdene av  $DS$  og  $BS$ .

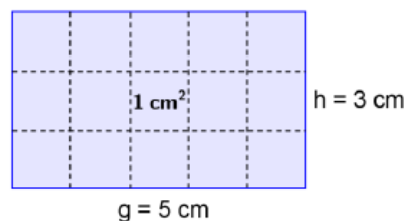


## 5. Areal av enkle figurer

Arealet av en figur viser hvor stor figuren er. De vanligste målenhetene for areal er  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$  og  $\text{km}^2$ .

Hvis arealet av ei hustomt er  $550 \text{ m}^2$ , betyr det at det er plass til 550 kvadrater, hvert med sidekant 1 m, på tomten. Hvert av disse kvadratene har et areal på  $1 \text{ m}^2$ .

Vi kan regne ut arealet av “pene”, regelmessige figurer hvis vi har nok opplysninger om figuren. Det er enklest å regne ut arealet av et *rektangel*.



I et rektangel som har en grunnlinje på 5 cm og en høyde på 3 cm, kan vi få plass til  $3 \cdot 5 = 15$  kvadrater som hver har et areal på  $1 \text{ cm}^2$ . Det betyr at arealet er  $15 \text{ cm}^2$ . Se figuren.

Vi kan altså finne arealet til et rektangel ved å multiplisere grunnlinjen med høyden. (Ofte sier vi heller lengde og bredde istedenfor grunnlinje og høyde.)

Vi får da formelen  $A = g \cdot h$  for arealet til et rektangel.

### Eksempel 11

Arealet av rektangelet til høyre er

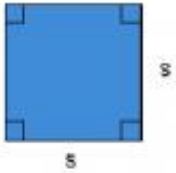

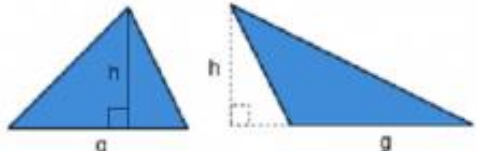
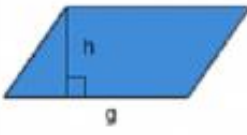
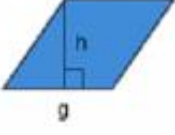
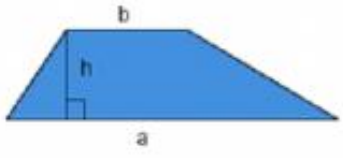

$$A = g \cdot h = 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2 .$$



Legg merke til at vi tar med *målenheter både i formelen og svaret*.

Du må aldri bruke cm, m eller andre *lengde*-enheter som målenhet for *areal*. Det er nesten like galt som å måle høyden din i sekunder!

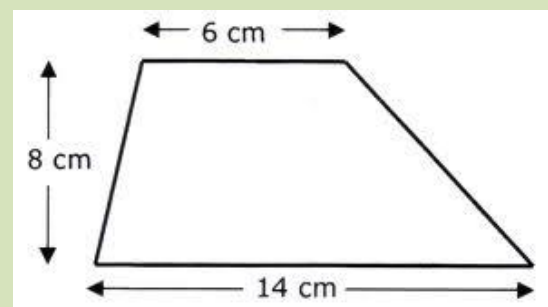
Vi repeterer navn og arealformler på noen figurer du skal ha sett på ungdomsskolen...

<p>Kvadrat</p>  <p><math>A = s^2</math></p>	<p>Rektangel</p>  <p><math>A = g \cdot h</math></p>	<p>Trekant</p>  <p><math>A = \frac{g \cdot h}{2}</math></p>
<p>Parallelogram</p>  <p><math>A = g \cdot h</math></p>	<p>Rombe</p>  <p><math>A = g \cdot h</math></p>	<p>Trapes</p>  <p><math>A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}</math></p>
<p>Sirkel</p>  <p><math>A = \pi r^2</math> <math>d = 2r</math></p>		

### Eksempel 12

Et trapes er en firkant hvor to av sidene er *parallelle*. Arealet av trapeset til høyre er

$$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(14 \text{ cm} + 6 \text{ cm}) \cdot 8 \text{ cm}}{2} = \frac{20 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = 80 \text{ cm}^2$$





### Eksempel 13

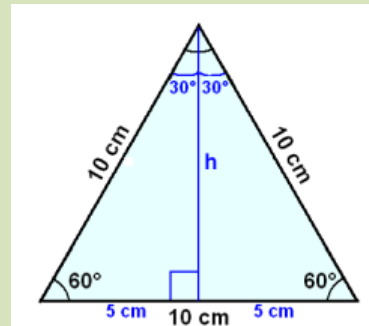
Figuren viser en *likesidet* trekant. I en likesidet trekant er alle tre sidene like lange, og alle vinklene er  $60^\circ$ . For å regne ut arealet av trekanten må vi først finne høyden. Da bruker vi Pytagoras slik som i eksempel 2:

$$h^2 + 5^2 = 10^2$$

$$h^2 = 100 - 25$$

$$h^2 = 75$$

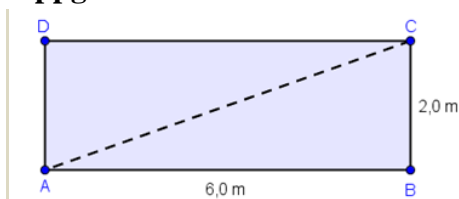
$$h = \sqrt{75} = 8,66$$



Arealet av trekanten er:

$$\frac{gh}{2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 8,66 \text{ cm}}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

### Oppgave 11

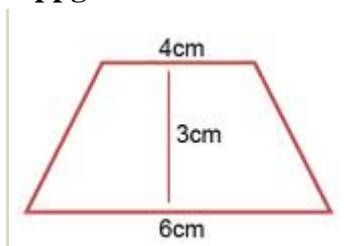


Regn ut arealet og omkretsen av rektangelet  $ABCD$  og av trekanten  $ABC$ .

### Oppgave 12

Lokket på en hermetikkboks er en sirkel med radius 2,8 cm. Finn arealet og omkretsen av lokket.

### Oppgave 13



Regn ut arealet av trapeset ovenfor uten å bruke kalkulator.

### Oppgave 14



Finn arealet av en likebent trekant hvor de to like sidene er 6 cm og den tredje siden er 8 cm.



#### Eksempel 14

Hva er grunnlinjen i en trekant som har areal  $20 \text{ cm}^2$  og høyde 5 cm?

Vi bruker formelen for arealet av en trekant og setter opp og løser en likning:

$$\frac{g \cdot h}{2} = A$$

$$\frac{g \cdot 5}{2} = 20$$

$$5g = 20 \cdot 2 = 40$$

$$g = \frac{40}{5} = 8$$

Grunnlinjen er 8 cm.

### Oppgave 15

Hva er lengden av et rektangel som har areal  $56 \text{ cm}^2$  og bredde 7 cm?

### Oppgave 16



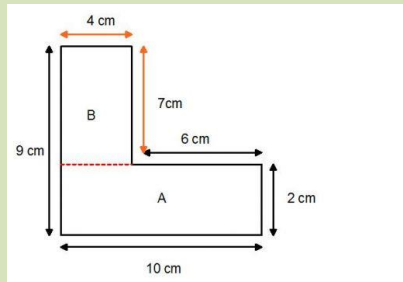
Hva er radien i en sirkel med areal  $100 \text{ cm}^2$ ?

## 6. Areal av sammensatte figurer

Med “sammensatt figur” mener vi her en figur som ikke er med i oversikten på side 7, men som vi kan dele opp slik at arealet av figuren likevel kan beregnes med disse arealformlene.

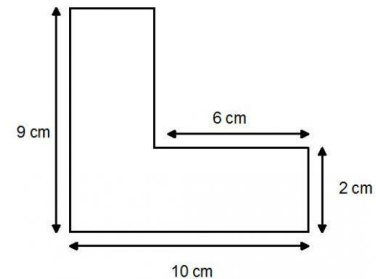
### Eksempel 15

Vi vil beregne arealet av figuren til høyre. Da kan vi først dele den opp i to rektangler og finne sidene i begge rektanglene:



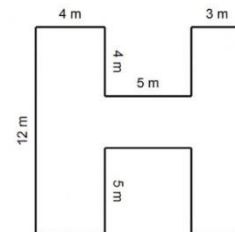
Arealet blir

$$10\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} + 4\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} = 20\text{ cm}^2 + 28\text{ cm}^2 = 48\text{ cm}^2.$$



### **Oppgave 17**

Beregn arealet av figuren til høyre.



### Eksempel 16

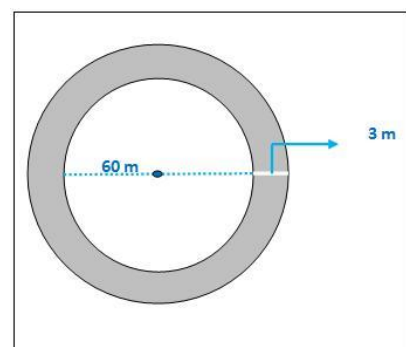
Rundt en sirkelformet park med diameter 60 m skal det legges en tre meter bred grusvei. Finn arealet av veien.

Radien til parken er  $60\text{ m} : 2 = 30\text{ m}$ .

Arealet av veien blir arealet av en sirkel med radius 33 m minus arealet av en sirkel med radius 30 m. Se figuren.

$$A = \pi \cdot (33\text{ m})^2 - \pi \cdot (30\text{ m})^2 = 3421\text{ m}^2 - 2827\text{ m}^2 = 594\text{ m}^2$$

Arealet av grusveien er  $594\text{ m}^2$ .



## Oppgave 18



Ei DVD-plate har en diameter på 12,0 cm. Innerst er det et hull med en diameter på 1,5 cm. Finn arealet av selve DVD-plata.



## 7. Overslagsregning med lengder<sup>[OBJ]</sup>

I noen eksamensoppgaver fra del 1 med beregning av lengder eller arealer, er tallene slik at du må gjøre et *overslag* når du ikke kan bruke kalkulator

I noen slike oppgaver må du bruke Pytagoras for å regne ut en høyde. Ofte blir ikke høyden et helt tall, men for eksempel  $\sqrt{30}$ . Da må du typisk tenke at  $\sqrt{30}$  er større enn 5, men mindre enn 6, for å kunne besvare oppgaven. I oppgavene E2, E3, E6 og E10 må du tenke slik.

### Eksempel 17

En trekant A har en omkrets på 22 cm. Trekant B er rettvinklet, med kateter på 6 cm og 7 cm. Hvilken trekant har størst omkrets?

Vi finner først hypotenusen i trekant B:

$$x^2 = 6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$$

$$x = \sqrt{85}$$

Fordi  $\sqrt{81} = 9$ , er hypotenusen litt lengre enn 9 cm. Omkretsen av B blir da litt lengre enn  $6 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$ .

Omkretsen til B er litt større enn omkretsen til A.

### Eksempel 18

Omtrent hvor stor er omkretsen og hvor stort er arealet av en sirkel med radius 4 m?

Vi runder av  $\pi$  til 3. Da får vi:

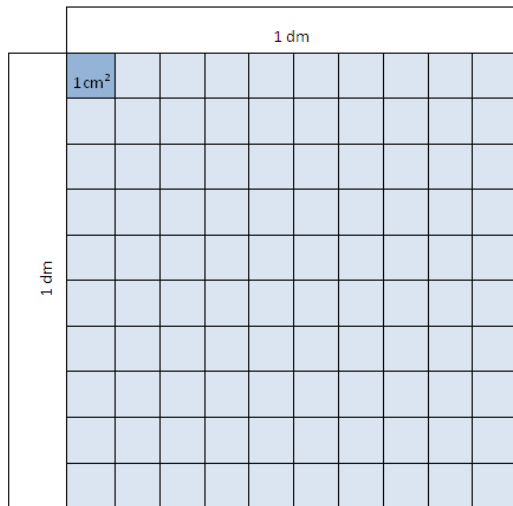
$$\text{Omkrets: } 2\pi r \approx 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ m} = 6 \cdot 4 \text{ m} = 24 \text{ m}$$

$$\text{Areal: } \pi r^2 \approx 3 \cdot (4 \text{ m})^2 = 3 \cdot 16 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2$$

Fordi  $\pi$  er litt større enn 3, vil 25 m og 50 m<sup>2</sup> være enda bedre overslag. Hvis det ikke er nøyaktig nok å bruke  $\pi$  lik 3 (for eksempel i oppgave E5), kan du prøve å øke svarene med 5 % uten kalkulator fordi 3,14 er omtrent 5 % større enn 3.

## 8. Regning med arealenheter

Fordi  $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$ , tror mange at  $1 \text{ dm}^2$  er lik  $10 \text{ cm}^2$ . Det er feil! Figuren og regningen under viser at  $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$ .



$$1 \text{ dm}^2 = 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$

### Oppgave 19

- a)  $1 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^2$
- b)  $1 \text{ km}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$
- c)  $1 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- d)  $1 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^2$

### Oppgave 20

Når utbyggingen på Oslo Lufthavn (Gardermoen) er ferdig, blir arealet av terminalen  $117\,000 \text{ m}^2$ . En journalist påstår at dette er  $117 \text{ km}^2$ . Er det riktig?

Hvis du vil ha et areal i  $\text{m}^2$ , og sider eller radier er oppgitt i  $\text{cm}$ , er det lurt å gjøre om lengdene til meter før du setter inn i formler.

#### Eksempel 19

Et rektangel har sidene  $120 \text{ cm}$  og  $80 \text{ cm}$ . Finn arealet uttrykt i  $\text{m}^2$ .

Vi gjør om sidene slik at de har lengdeenhet meter:

$$120 \text{ cm} = 1,20 \text{ m}, \quad 80 \text{ cm} = 0,80 \text{ m}.$$

$$\text{Arealet: } 1,20 \text{ m} \cdot 0,80 \text{ m} = 0,96 \text{ m}^2.$$

### Oppgave 21

En sirkel har en radius på  $4,5 \text{ dm}$ . Finn arealet i  $\text{m}^2$  og i  $\text{cm}^2$ .

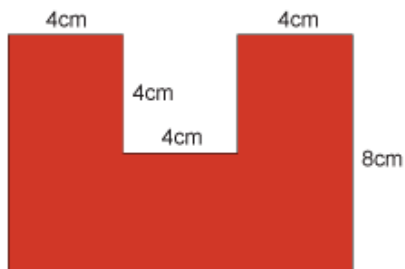
## Blandede oppgaver

### B1

- a) Badehåndkleet Hären, som selges av Ikea, veier  $400 \text{ g/m}^2$ .  
Håndkleet måler  $150 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ . Hvor mye veier det?
- b) Håndkleet Åfjärden veier  $600 \text{ g/m}^2$ . Det har målene  $70 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ . Hvor mye veier det?

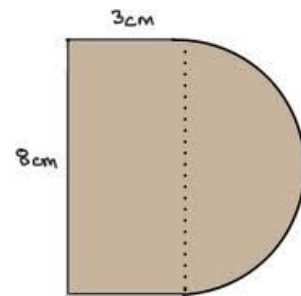
### B2

Finn arealet av den fargede figuren under.



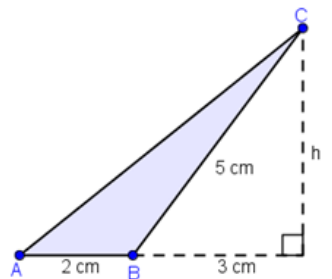
### B3

Finn arealet av figuren til høyre. Figuren består av et rektangel og en halvsirkel.



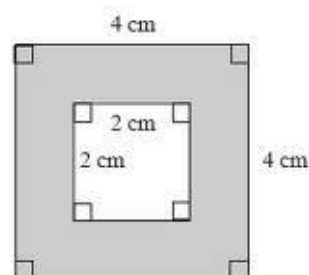
### B4

- a) Finn høyden  $h$  i trekanten til høyre.
- b) Regn ut arealet av trekanten  $ABC$ .



### B5

Hvor mange prosent utgjør det fargede området av hele kvadratet?



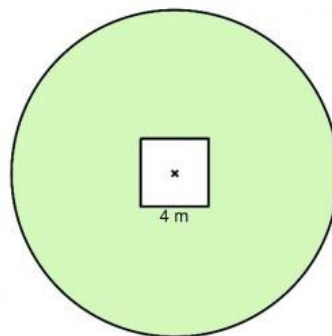


**B6**

🤔 I en sirkelformet hage med radius 10 m er det et hellelagt kvadratisk område med side 4 m i midten.

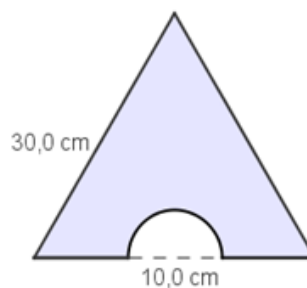
Det skal sås gress i hagen. Gjør et overslag (uten kalkulator) over hvor mange pakker gressfrø som trengs når det skal brukes 15 g frø/m<sup>2</sup> og det er 1 kg frø i hver pakke.

(Det skal selvfølgelig ikke brukes frø på kvadratet i midten.)

**B7**

🤔 Figuren til høyre viser en likesidet trekant med sider 30,0 cm. Utskjæringen er en halvsirkel med diameter 10,0 cm.

- Regn ut høyden i trekanten.
- Regn ut arealet av den fargede figuren.
- Regn ut omkretsen av den fargede figuren.

**B8**

- 🤔
- Finn avstanden mellom langsiden og kortsiden på bordplaten. (Tips: Tegn bordet sett ovenfra, sett på mål, bruk Pytagoras).
  - Finn arealet av bordplaten.

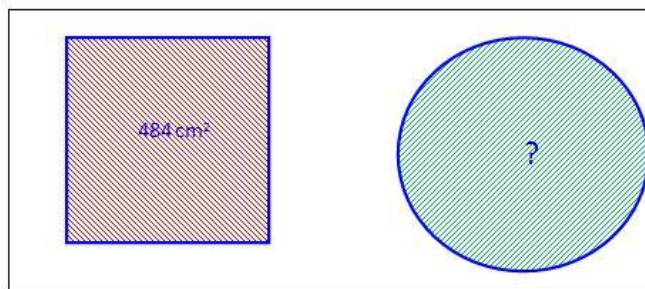


**B9**

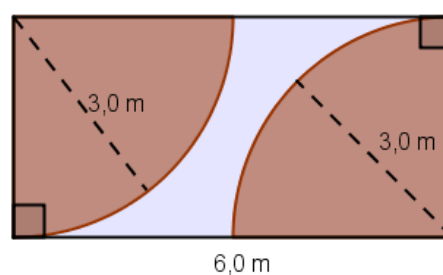
Sirkelen og kvadratet til høyre har samme areal,  $484 \text{ cm}^2$ .

a) Avgjør uten regning om det er siden i kvadratet eller diameteren i sirkelen som er størst.

b) Regn ut radien i sirkelen.

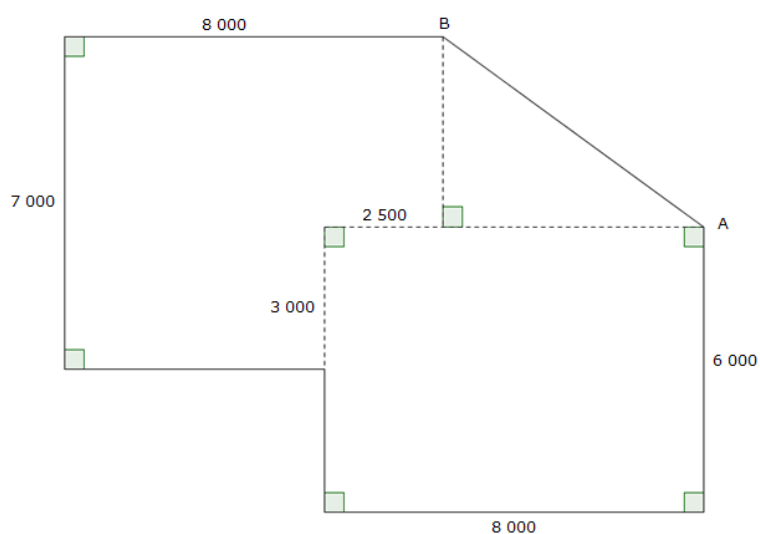
**B10**

Regn ut arealet av det blå området (området i midten) på figuren til høyre.

**B11**

Snekkeren skal sette opp et bygg. Grunnflaten har form som vist på tegningen nedenfor. Alle målene er gitt i millimeter (mm).

Vis at grunnflaten til bygget har et areal på  $107,5 \text{ m}^2$ .



## Eksamensoppgaver

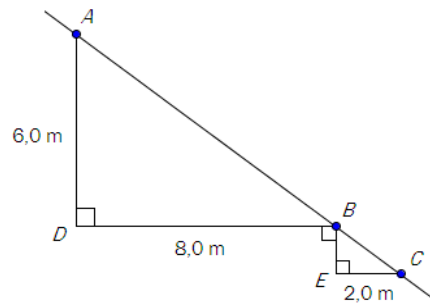
Husk: Ikke kalkulator på Del 1 oppgaver!

### E1

(Eksamen 1P, Vår 2010, Del 1)

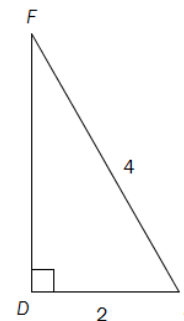
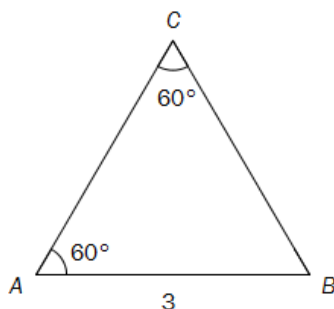
Figuren viser to trekanter og en rett linje som går gjennom punktene A, B og C. Bruk målene som er gitt på figuren, og regn ut

- avstanden fra A til B
- avstanden fra B til E



### E2

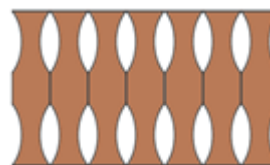
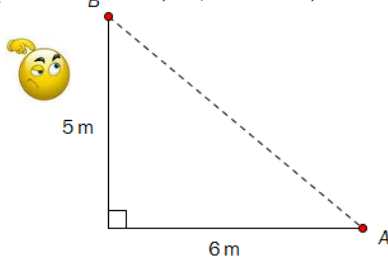
(Eksamen 1P, Vår 2012, Del 1)



Gjør beregninger og finn ut hvilken av trekantene ovenfor som har størst omkrets.

### E3

(Eksamen 1P, Høst 2011, Del 1)

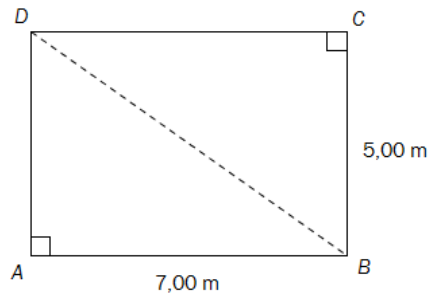


Kari vil sette opp et gjerde langs den stiplede linjen fra punkt A til punkt B. Gjerdet selges i ferdige lengder på 1 m.

Hvor mange lengder må hun kjøpe?

#### E4

(Eksamen 1P, Høst 2011, Del 2)



Frode skal sette opp en grunnmur til en hytte. Grunnflaten i hytten skal ha form som et rektangel med sider 7,00 m og 5,00 m. Se figuren ovenfor.

Regn ut hvor lang diagonalen  $BD$  må være.

#### E5

(Eksamen 1P, Høst 2010, Del 1)

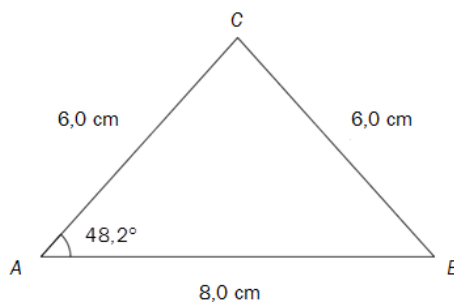


Rune trenger 61 m kabel. Han har en kabel som er rullet opp på en trommel. Trommelen har en diameter på 50 cm, og kabelen går 40 ganger rundt trommelen.

Gjør *overslag* og finn ut om det er nok kabel på trommelen.

#### E6

(Eksamen 1P, høst 2012, Del 1)



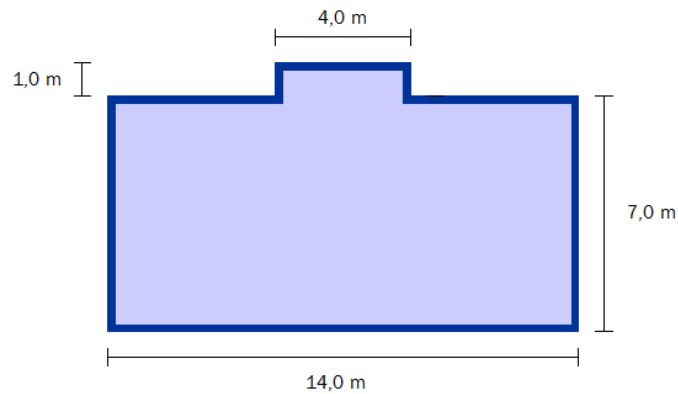
Gjør beregninger og avgjør om påstandene nedenfor er riktige.

a)  $\angle C = 83,6^\circ$

b) Arealet av  $\triangle ABC$  er mindre enn  $20 \text{ cm}^2$

**E7**

(Eksamen 1P, Høst 2011, Del 2)



Svein skal bygge hytte. Han skal lage grunnmur og gulv av betong. Se figuren ovenfor. Det mørkeblå området er grunnmuren. Denne skal være 0,25 m bred.

a) Bestem arealet av det lyseblå og av det mørkeblå området på figuren.

**E8**

(Eksamen 1P, Vår 2011, Del 1)

Maria har tegnet en sirkel med radius 2 cm.

Tommy vil tegne en sirkel som har fire ganger så stort areal som sirkelen til Maria.

Hvor stor må radius i denne sirkelen være?

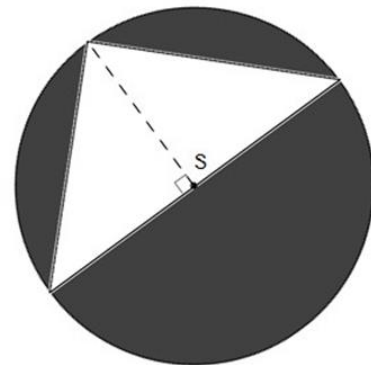
**E9**

(Eksamen 1P, Vår 2012, Del 1)



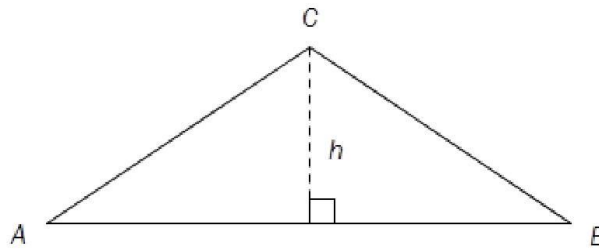
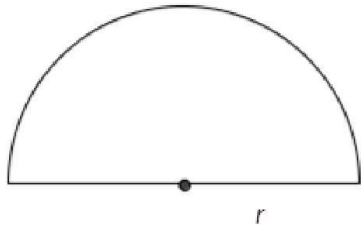
Til høyre ser du en sirkel med sentrum S og radius 4,0.

Sett  $\pi = 3,0$  og finn ut omtrent hvor stort arealet av det mørke området på figuren er.



**E10**

(Eksamen 1P, Vår 2013, Del 1)



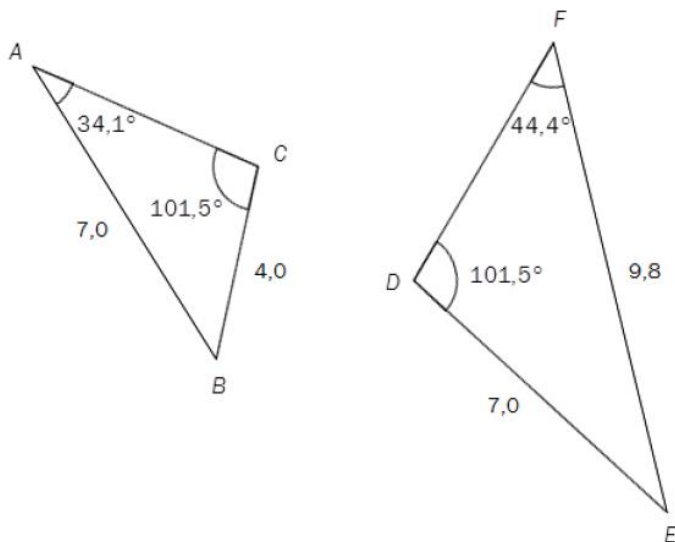
Et område har form som en halvsirkel med radius  $r = 1,0$  m. Et annet område har form som en likebent trekant  $ABC$ , der  $AB = 3,0$  m og høyden  $h = 1,0$  m. Se figurene ovenfor.

Gjør beregninger (uten kalkulator!) og avgjør

- hvilket av de to områdene som har størst areal
- hvilket av de to områdene som har størst omkrets

**E11**

(Eksamen vår 2013 Del 1)



- Vis at de to trekantene ovenfor er formlike.
- Bestem lengdene av sidene  $AC$  og  $DF$ .

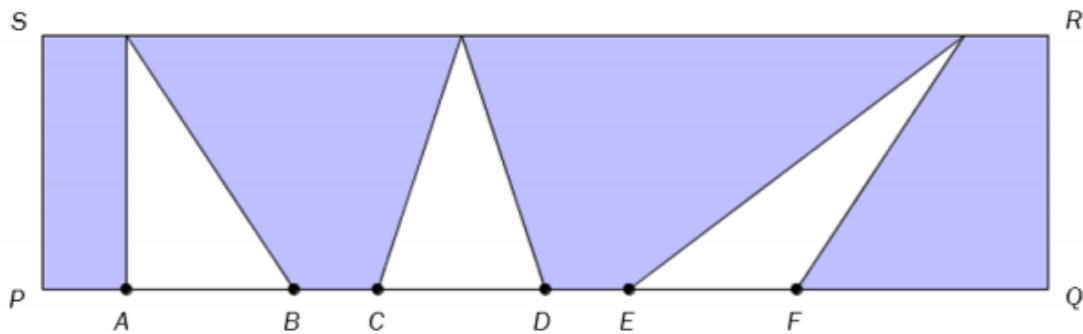
**E12**

(Eksamen høst 2010 Del 1)

Tegn et rektangel der den lengste siden er 9 cm og forholdet mellom den lengste og den korteste siden er 3 : 2.

**E13**

(Eksamen 1P vår 2015, del 1)

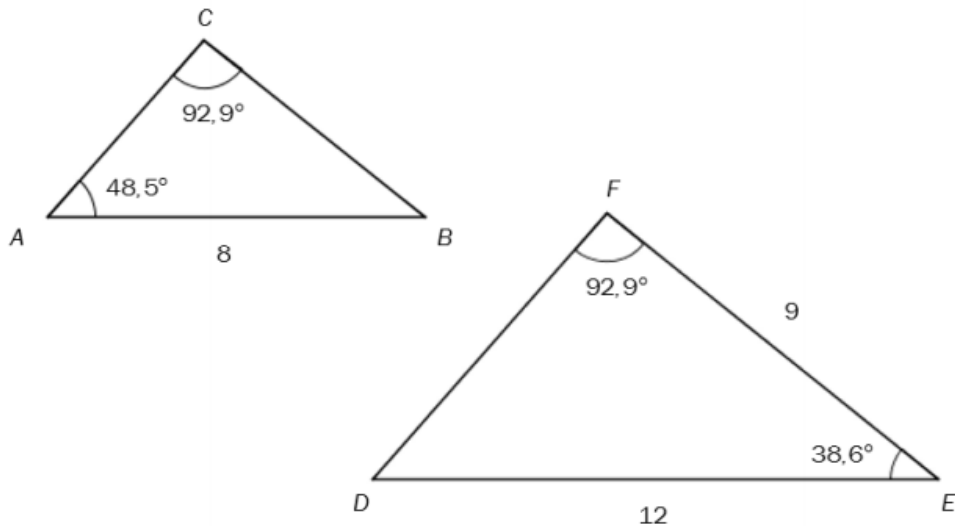


Figuren ovenfor viser et rektangel  $PQRS$ .  $PQ = 12$  cm,  $QR = 3$  cm og  $AB = CD = EF = 2$  cm

Bestem arealet av det blå området.

**E14**

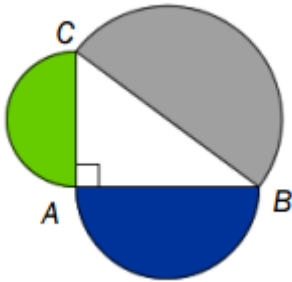
(Eksamen 1P vår 2015, del 1)



- Forklar at de to trekantene ovenfor er formlike
- Bestem lengden av siden BC ved regning.

**E15**

(Eksamen 1P, vår 2016, del 1)



Gitt trekanten  $ABC$  slik at  $AB = 8$  og  $BC = 10$ . Se figuren ovenfor.

Vis at arealet av den grønne og den blå halvsirkelen til sammen er like stort som arealet av den grå halvsirkelen.

## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 10,6 cm

Oppgave 2 17,3 cm

Oppgave 3 a) 100 m b) 41 cm = 4,1 dm = 0,41 m c) 12 cm d) 30 cm

Oppgave 4 a) 81,7 cm b) 31,8 cm = 0,318 m

Oppgave 5 4 og 6

Oppgave 6 Finn (3,8 m)

Oppgave 7 a)  $\angle A = 70,6^\circ$  b)  $\angle B = 48,7^\circ$ Oppgave 8 a)  $DE = 6,01$  b)  $DF = 8,29$ 

Oppgave 9 6,67

Oppgave 10  $DS = 3,98$  cm  $BS = 5,33$  cmOppgave 11  $A_{ABCD} = 12,0$  m<sup>2</sup>,  $O_{ABCD} = 16,0$  m,  $A_{ABC} = 6,0$  m<sup>2</sup>,  $O_{ABC} = 14,3$  mOppgave 12  $A = 24,6$  cm<sup>2</sup>,  $O = 17,6$  cmOppgave 13 15 cm<sup>2</sup>Oppgave 14 17,9 cm<sup>2</sup>

Oppgave 15 8 cm

Oppgave 16 5,64 cm

Oppgave 17 99 m<sup>2</sup>Oppgave 18 111,3 cm<sup>2</sup>Oppgave 19 a) 100 dm<sup>2</sup> b) 1 000 000 m<sup>2</sup> c) 10 000 cm<sup>2</sup> d) 0,01 dm<sup>2</sup>Oppgave 20 Nei, det er 0,117 km<sup>2</sup>Oppgave 21  $0,64$  m<sup>2</sup> = 6400 cm<sup>2</sup>



### Fasit blandede oppgaver

- B1 a) 600 g b) 168 g
- B2  $80 \text{ cm}^2$
- B3  $49,1 \text{ cm}^2$
- B4 a) 4 cm b)  $4 \text{ cm}^2$
- B5 75 %
- B6 5 pakker (ca. 4,5 kg)
- B7 a) 26,0 cm b)  $350 \text{ cm}^2$  c) 95,7 cm
- B8 a) 0,88 m b)  $0,88 \text{ m}^2$
- B9 b) 12,4 cm
- B10  $3,86 \text{ m}^2$

### Fasit eksamensoppgaver

- E1 a) 10 m b) 1,5 m
- E2 Trekanten til høyre (omkretsene er 9 og  $6 + \sqrt{12}$ .  $\sqrt{12}$  er større enn 3.)
- E3 8 ( $AB = \sqrt{61}$  som er større enn 7 og mindre enn 8)
- E4 8,60 m
- E5 Ja, så vidt
- E6 a) Ja ( $180^\circ - 48,2^\circ - 48,2^\circ = 83,6^\circ$ ) b) Ja (høyden er  $\sqrt{20}$ , som er mindre enn 5)
- E7  $90,4 \text{ m}^2$ ,  $11,6 \text{ m}^2$
- E8 4 cm
- E9 ca. 32
- E10 a) halvsirkelen b) trekanten
- E12 Den korteste siden er 6 cm
- E11 b)  $AC=5,0 \text{ cm}$ ,  $DF=5,6 \text{ cm}$
- E13  $27 \text{ cm}^2$
- E14 b)  $BC = 6 \text{ cm}$
- E15 Hint: Bruk at arealet til en halvsirkel blir  $A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

# Kapittel 6. Volum og overflate



## Mål for Kapittel 6, Volum og overflate.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bruke og grunngi bruk av formlikhet, målestokk og Pytagoras' setning til beregninger i praktisk arbeid
- løse problem som gjelder lengde, vinkel, areal og volum

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hvordan jeg regner mellom ulike volumenheter
- hvordan jeg finner volum til prismer, sylindre, pyramider, kjegler og kuler
- hvordan jeg beregner overflateareal

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hva volum er
- hvorfor en regner ut volum for figurene etter de ulike formlene
- hva overflateareal er og hvorfor det er viktig å kunne noe om

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- sammenligne volum i ulike figurer
- gi praktiske eksempler på bruk av volum og overflateareal
- lage og løse sammensatte tekstoppgaver knyttet til volum og overflateareal
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Bygg din egen figur

Du skal bygge en volumfigur, også kalt romfigur, med volum på 1,5 liter. Figuren skal ha form som et rektangulært prisme. Det vil si at bunnen skal være et rektangel, og de fire veggene skal stå rett opp.

Før du begynner byggingen må du gjøre noen beregninger. Før du begynner må du finne figurens mål.

- a) Skriv av dette regnearket:

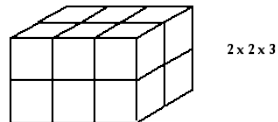
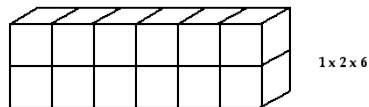
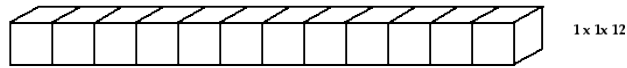
	A	B	C	D	E	F
1	DEN REKTANGULÆRE BUNNEN			Volumet til prismet		
2	Lengde	Bredde	Areal cm <sup>2</sup>	Høyde	Volum cm <sup>3</sup>	Volum L
3						

- b) Lag formler i de grå feltene.
- c) Prøv deg frem med ulike verdier i de gule feltene slik at du til slutt finner målene til et rektangulært prisme som har volum = 1,5 L.
- d) Klipp ut bunnen og alle sideveggene utfra målene du fant i oppgave c). Sett figuren sammen ved hjelp av tape.
- e) Test om ditt rektangulære prisme faktisk har volum på 1,5 L. Hvordan kan du gjøre dette?
- f) Hvordan ser din figur ut sammenlignet med figurene til de andre i klassen? Har alle figurene likt volum? Er alle figurene like?
- g) Hva tror du skjer med volumet til figuren din dersom du dobler enten lengden, bredden eller høyden? Hva tror du skjer med volumet dersom du dobler alle tre? Bruk regnearket til å finne det ut.

## 1. Hva er volum?

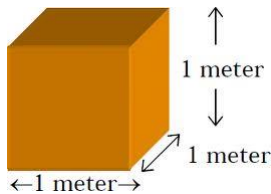
Volumet av en gjenstand viser hvor mye den rommer. Mer presist angir det hvor mange *enhetsterninger* som får plass i gjenstanden. Figuren under viser tre gjenstander som alle inneholder nøyaktig 12 enhetsterninger og derfor har like stort volum.

One cubic unit::



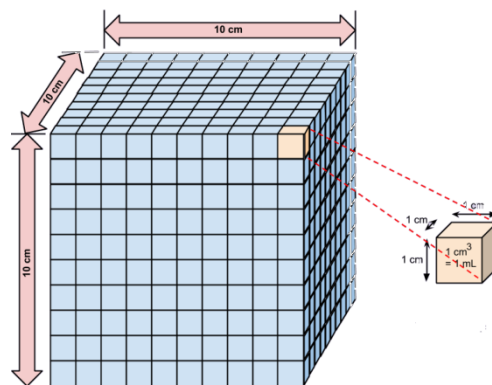
## 2. Volumenheter

En enhetsterning kan ha sidekant 1 mm, 1 cm, 1 dm eller 1 m. De tilsvarende volumene av enhetsterningen er da  $1 \text{ mm}^3$ ,  $1 \text{ cm}^3$ ,  $1 \text{ dm}^3$  og  $1 \text{ m}^3$ . Dette er altså de vanlige målenhetene for volum.  $1 \text{ m}^3$  leser vi som «en kubikkmeter».



Denne terningen har et volum på  $1 \text{ m}^3$ .

Av og til må du gjøre om fra en volumenhet til en annen. Da er det lett å lure seg selv. For eksempel er det 10 cm i 1 dm, men figuren nedenfor viser at det er  $1000 \text{ cm}^3$  i  $1 \text{ dm}^3$ .



Det er ofte mest praktisk å oppgi volumet av små gjenstander i  $\text{dm}^3$ . Fordi  $\text{dm}^3$  brukes så ofte, har vi et eget navn på denne enheten, nemlig *liter*. Både L og l brukes som forkortelse for liter. Liter, desiliter og milliliter brukes vanligvis for volum av *væsker*, mens vi gjerne bruker  $\text{dm}^3$  og  $\text{cm}^3$  for volumet av faste stoffer eller gjenstander.

1 liter (1 L) er det samme som  $1 \text{ dm}^3$ .  
 1 desiliter (1 dL) = 0,1 L, slik at  $1 \text{ L} = 10 \text{ dL}$ .  
 1 centiliter (1 cL) = 0,01 L slik at  $1 \text{ L} = 100 \text{ cL}$ .  
 1 milliliter = 1 mL = 0,001 L (=  $1 \text{ cm}^3$ ), slik at  $1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$ .

Her er eksempler på hvordan vi kan gjøre om mellom volumenheter:

$$1 \text{ m}^3 = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ L}$$

$$1 \text{ mm}^3 = 0,1 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} = 0,001 \text{ cm}^3$$

### Oppgave 1

- a) Gjør om  $1 \text{ dm}^3$  til  $\text{cm}^3$ . Vis utregningen på samme måte som i eksemplet ovenfor.
- b) Gjør om  $1 \text{ dm}^3$  til  $\text{m}^3$ . Vis utregningen på samme måte som i eksemplet ovenfor.

**Husk:**  
*Lengder* oppgis med *lengdeenhet*, for eksempel m.  
*Arealer* oppgis med *arealenheter*, for eksempel  $\text{m}^2$ .  
*Volumer* oppgis med *volumenheter*, for eksempel  $\text{m}^3$ .

### 3. Hvordan kan vi måle volum?

Volumet til små mengder av vann og av stoffer som flyter utover, kan vi måle ved å putte dem i en *målesylinder* eller et *målebeger*.



Målesylinder (gradert i mL)



Målebeger (litermål)

I matlaging brukes ofte *teskje*, som er 5 mL, eller *spiseskje*, som er 15 mL.

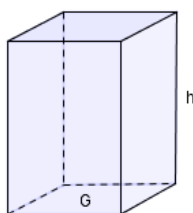
For å finne volumet av små, uregelmessige gjenstander kan vi gjøre slik:



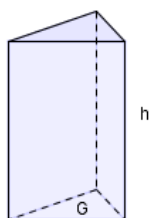
(Subtract betyr å trekke fra.)

#### 4. Volum av enkle gjenstander

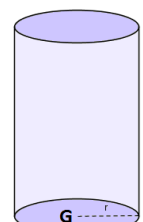
For mange gjenstander kan vi finne *volumformler*. Her er de som er aktuelle i 1P:



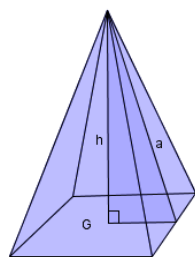
Firkantet prisme  
 $V = G \cdot h$



Trekantet prisme  
 $V = G \cdot h$

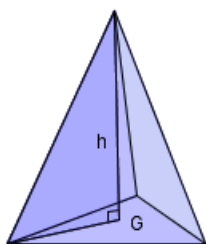


Sylinder  
(sirkelprisme)  
 $V = G \cdot h$



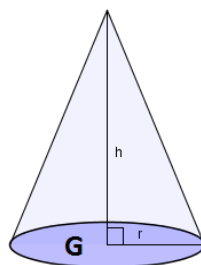
Firkantet pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



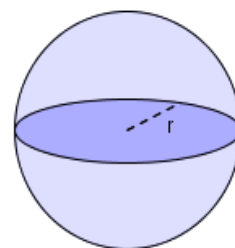
Trekantet pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



Kjegle

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



Kule

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

I disse formlene er  $G$  arealet av grunnflaten. Du ser at i figurene er grunnflaten et *rektangel*, en *trekant* eller en *sirkel*, og arealet av disse figurene skal du vite fra før hvordan du regner ut.

Legg merke at volumet av en pyramide er tredjedelen av et prisme med samme grunnflate og høyde som pyramiden, mens volumet av en kjegle er tredjedelen av en sylinder med samme grunnflate og høyde som kjeglen.

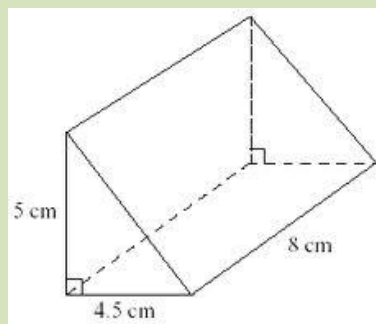
### Eksempel 1

Figuren til høyre viser et trekantet, liggende, prisme. Grunnflaten er en trekant, og arealet av grunnflaten er da

$$G = \frac{4,5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{2} = 11,25 \text{ cm}^2$$

Volumet av prismet blir

$$V = G \cdot h = 11,25 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^3$$

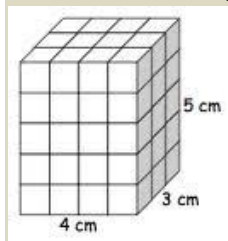


Legg merke til at vi tar med målenheter i hele regnestykket!

### Oppgave 2

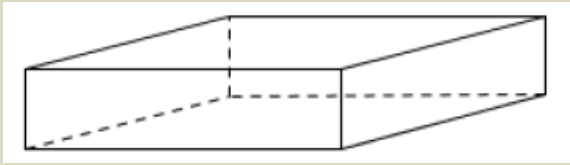
(løs denne oppgaven uten kalkulator)

Finn volumet av prismet nedenfor. Ta med målenheter (cm, cm<sup>2</sup> og cm<sup>3</sup>) i hele regnestykket!



### Oppgave 3

(Løs denne oppgaven uten kalkulator)



Et badebasseng har form som et rett firkantet prisme med lengde 6,0 meter, bredde 4,0 meter og høyde 1,5 meter.

a) Hvor stort volum har bassenget?

For å fylle bassenget med vann brukes en vannpumpe som gir 300 liter vann per minutt.

b) Hvor lang tid tar det å fylle bassenget?

### Oppgave 4

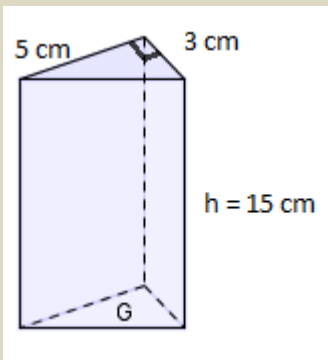
En kartong med appelsinjuice har målene:

Høyde 24,0 cm, bredde 6,6 cm og dybde 6,4 cm.

Hvor mye rommer juicekartongen? Gi svaret i liter.

### Oppgave 5

Finn volumet av det trekantede prismet. Ta med målenheter i hele regnestykket!





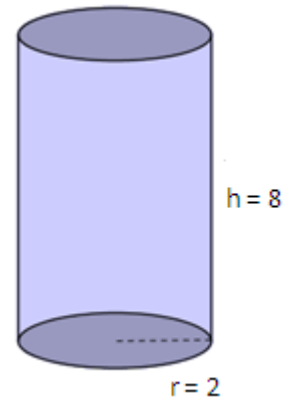
### Eksempel 2

Figuren til høyre viser en sylinder. Arealet av grunnflaten er

$$G = \pi r^2 = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 = 12,57 \text{ cm}^2$$

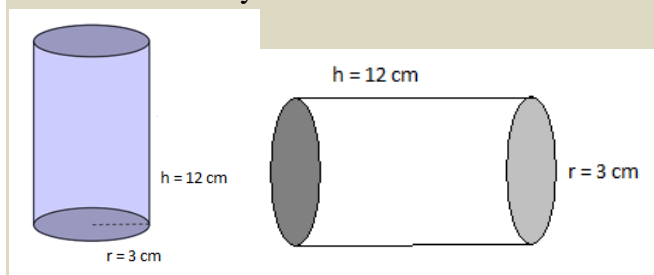
Volumet av sylindren:

$$V = G \cdot h = 12,57 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 100,5 \text{ cm}^3$$



### Oppgave 6

Finn volumet av sylindren nedenfor.



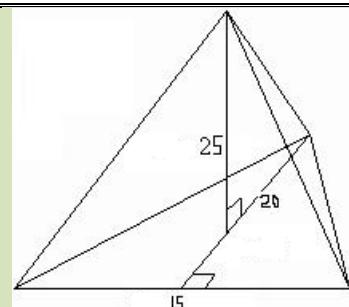
### Eksempel 3

Figuren til høyre viser en trekantet pyramide. Målene er gitt i cm. Arealet av grunnflaten er

$$G = \frac{15 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

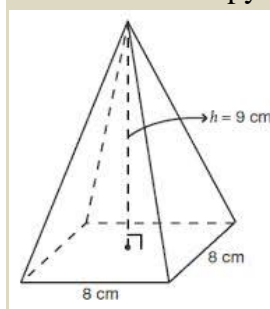
Volumet av pyramiden:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{150 \text{ cm}^2 \cdot 25 \text{ cm}}{3} = 1250 \text{ cm}^3$$



### Oppgave 7

Finn volumet av pyramiden nedenfor. Ta med målenheter i hele regnestykket!



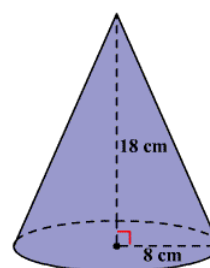
#### Eksempel 4

Figuren til høyre viser en kjegele.  
Arealet av grunnflaten er

$$G = \pi r^2 = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2 = 201 \text{ cm}^2$$

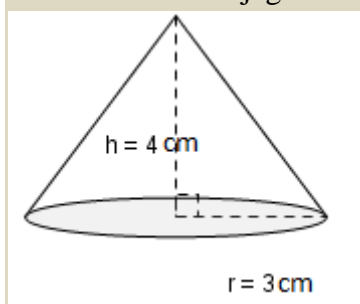
Volumet av kjegele:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{201 \text{ cm}^2 \cdot 18 \text{ cm}}{3} = 1206 \text{ cm}^3$$



#### Oppgave 8

Finn volumet av kjegele nedenfor. Ta med målenheter i hele regnestykket!



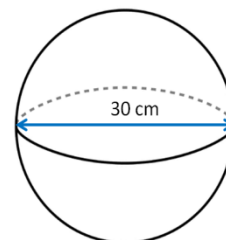
#### Eksempel 5

For å regne ut volumet av kula til høyre, må vi først finne radien.  
Radien er halvparten av diameteren slik at  
 $r = d/2 = 30 \text{ cm}/2 = 15 \text{ cm}$ .

Volumet av kula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi(15 \text{ cm})^3}{3} = 14140 \text{ cm}^3$$

Da  $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ , kan vi også skrive  $V = 14,140 \text{ dm}^3$



#### Oppgave 9



- a) Finn volumet av to kuler med diameter 4 cm og diameter 8 cm.  
b) Hva er forholdet mellom volumet av den største og volumet av den minste? Kunne du tenkt ut dette svaret *uten* å regne ut volumene?



## 5. Finne høyder eller radius i gjenstander med oppgitt volum

### Eksempel 6

En boks har en kvadratisk bunn med side lik 7 cm. Hvor høy må den være for å romme 1 liter?

Da  $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$  må vi enten gjøre om volumet til  $\text{cm}^3$  eller sidene til dm. Vi velger det første, slik at volumet av prismet er  $V = 1000 \text{ cm}^3$ .

Grunnflatearealet er  $G = 7 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 49 \text{ cm}^2$ .

Nå kjenner vi  $V$  og  $G$  og kan finne  $h$  ved å løse en enkel likning:

$$V = Gh$$

$$49 \cdot h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{49} = 20,4$$

Høyden må være 20,4 cm for at boksen skal romme 1 L.

Vi kunne også funnet formelen  $h = \frac{V}{G}$  og satt inn tallene i den.

### **Oppgave 10**

Bildet viser en flaske Voss vann. Flasken er 18,4 cm høy og har en innvendig diameter på 5,1 cm.

- a) Vis at flasken rommer 375 mL vann. (Dette er det samme som å finne det innvendige volumet til flasken.)

I en flaske Voss vann er det igjen 250 mL vann.

- b) Hvor høyt i flasken står vannet?



### Eksempel 7

En sylinderformet hermetikkboks har en høyde på 8 cm. Hva må den innvendige radien være for at den skal romme 300 mL?

Vi kjenner volumet og høyden og kan da finne grunnflatearealet  $G$  ved å løse en likning. Husk at 300 mL = 300 cm<sup>3</sup>.

$$V = Gh$$

$$G = \frac{V}{h} = \frac{300 \text{ cm}^3}{8 \text{ cm}} = 37,5 \text{ cm}^2$$

Grunnflaten er en sirkel slik at  $G = \pi r^2$ . For å finne  $r$  må vi løse en likning:

$$\pi r^2 = 37,5$$

$$r^2 = \frac{37,5}{\pi} = 11,94$$

$$r = \sqrt{11,94} = 3,45$$

Radien må være 3,45 cm for at volumet skal bli 300 mL.

### **Oppgave 11**

I en målesylinder er høyden av vannet lik 18 cm når volumet av vannet er 120 mL.

Finn diameteren i sylindere.



### Eksempel 8

En sandhaug har omtrent form som en kjege med diameter 3,0 m i bunnen, og høyde 0,9 m. Sanden legges jevnt ut over en rektangulær plass med mål 6 x 8 m. Hvor dypt blir sandlaget?

Volumet av sandhaugen:

$$V = \frac{Gh}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (1,5 \text{ m})^2 \cdot 0,9 \text{ m}}{3} = 2,12 \text{ m}^3$$

Arealet av plassen:  $G = 6 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$ .

Høyden av sandlaget:

$$h = \frac{V}{G} = \frac{2,12 \text{ m}^3}{48 \text{ m}^2} = 0,044 \text{ m} = 4,4 \text{ cm}$$



### Oppgave 12

Keopspyramiden i Egypt har en kvadratisk grunnflate med side 230 m og høyde 147 m.

Tenk deg at all steinen i pyramiden legges jevnt utover et kvadratisk område som er 1 km på hver side. Hvor tykt ville steinlaget blitt? Vi ser bort fra hulrom inne i pyramiden.



## 6. Volum av sammensatte gjenstander

### Eksempel 9

Hva er volumet av figuren til høyre? Målene er i cm.

Figuren består av et rett prisme og et trekantet, liggende prisme.

Arealet av grunnflaten i det rette prismet er  $80 \text{ cm}^2$ .

Volumet av det rette prismet er  $80 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} = 560 \text{ cm}^3$ .

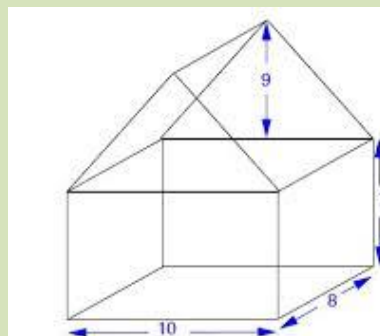
Arealet av grunnflaten i det trekantede prismet er

$$\frac{10 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm}}{2} = 45 \text{ cm}^2.$$

Volumet av det trekantede prismet er

$$45 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 360 \text{ cm}^3.$$

Volumet av hele figuren:  $560 \text{ cm}^3 + 360 \text{ cm}^3 = 920 \text{ cm}^3$ .



### Oppgave 13

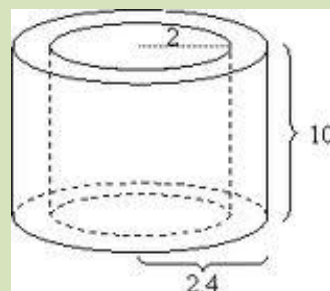
Vi antar at isen til venstre består av en kjeks-kjegle fylt med is og en halvkule av is på toppen. Høyden i kjekskjeglen 12 cm og radien på toppen av kjeglen (og dermed også i halvkulen) er 3 cm.

Finn det samlede volumet av isen i kjeglen og i halvkula.



### Eksempel 10

Figuren viser en bit av et metallrør. Den ytre radien er 2,4 cm og den indre radien 2,0 cm. Lengden av rørbiten er 10 cm. Hva er volumet av metallet i rørbiten?



Volumet av metallet er volumet av sylindere med størst radius minus volumet av hullet i midten, som også er en sylinder.

Volumet av den største sylindere:

$$G \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,4 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} = 181 \text{ cm}^3.$$

Volumet av hullet i midten:

$$G \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,0 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} = 126 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumet av metallet i røret: } 181 \text{ cm}^3 - 126 \text{ cm}^3 = 55 \text{ cm}^3.$$

### Oppgave 14

Figuren viser tre betongrør. Den ytre radien er 0,4 m og tykkelsen av betongveggen er 0,1 m. Lengden av hvert rør er 1,5 m.



Finn det samlede volumet av betongen i alle tre rørene.

### Oppgave 15

Figuren viser et stearinlys med et sylinderformet hull i midten. Den ytre radien er 4 cm og radien av hullet i midten er 2 cm. Høyden av lyset er 10 cm, og dybden av hullet i midten er 4 cm.



Regn ut volumet av all stearinen i lyset.

## 7. Areal av overflater

Grensen mellom en gjenstand og omgivelsene rundt kaller vi *overflaten* til gjenstanden.

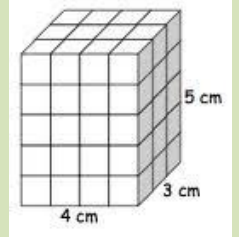
### Eksempel 11

Overflaten av det rette prismet til høyre består av 6 rektangler. To og to av rektanglene er like.

Arealet av overflaten kan vi da finne slik:

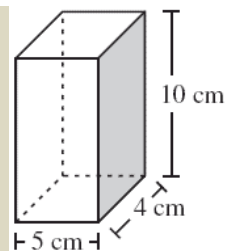
$$2 \cdot (4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}) =$$

$$2 \cdot (20 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2) = 2 \cdot 47 \text{ cm}^2 = 94 \text{ cm}^2.$$



### Oppgave 16

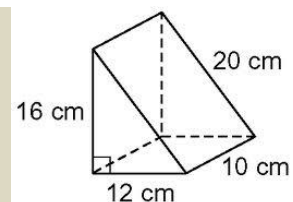
Figuren til høyre viser en liten pappboks med både bunn og topp. Hvor mange  $\text{cm}^2$  papp måtte brukes for å lage boksen?



### Oppgave 17



- Sjekk at det stemmer at hypotenusen i trekantene i prismet til høyre er 20 cm, gitt lengdene av katetene.
- Regn ut arealet av overflaten til det trekantede prismet.

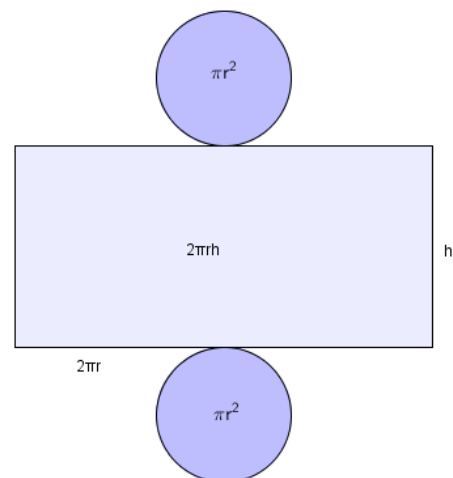


Overflaten til en sylinder består av to sirkler (hvis sylinderen har både topp og bunn) og et rektangel. Den ene siden i rektangelet er lik omkretsen i bunnen, nemlig  $2\pi r$ . Den andre siden i rektangelet er lik høyden til sylinderen.

Arealet av overflaten blir altså

$$2\pi rh + 2\pi r^2$$

NB! I noen oppgaver er sylinderen en gjenstand uten topp og/eller bunn. Da blir det selvfølgelig ikke *to* sirkler å beregne arealet av. Tenk alltid før du regner!



### Oppgave 18

Hermetikkboksen til høyre har *diameter* 11 cm og høyde 15 cm.

- Hva er arealet av papiret som er limt rundt boksen?
- Hva er arealet av metallplaten som boksen består av?

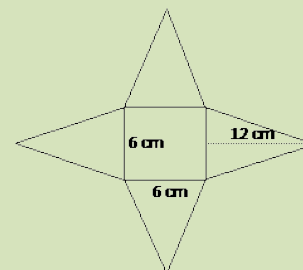
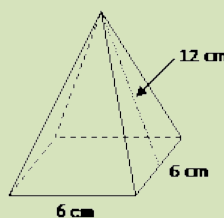


### Eksempel 12

Hvis vi bretter ut en kvadratisk pyramide, ser vi at den består av et kvadrat og fire trekner.

Hvis vi er så heldige at høyden i trekanten er oppgitt, er det lett å finne arealet av overflaten.

For pyramiden til høyre er overflatearealet



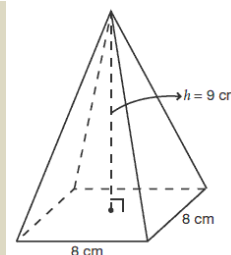
$$6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} + 4 \cdot \frac{6 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2} =$$

$$36 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$$

### Oppgave 19



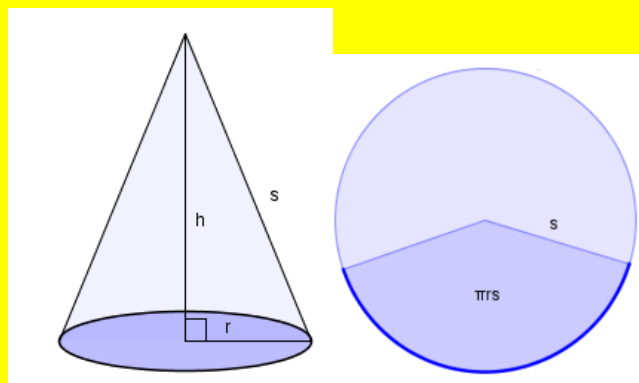
- Bruk Pytagoras' setning til å finne høyden i *trekantene* i pyramiden til høyre. (Høyden i *pyramiden* er, som du ser, 9 cm.)
- Hva er arealet av overflaten av pyramiden?





Arealet av sideflaten til en kjegle:

Sideflaten er en del av sirkel hvis den brettes ut og arealet er  $\pi \cdot r \cdot s$ .



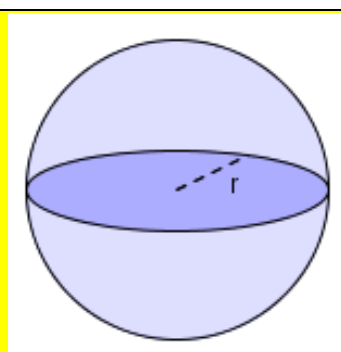
### Eksempel 13

En kjegle har radius 5 cm og høyde 10 cm. Regn ut arealet av sideflaten.

Først finner vi lengden  $s$  (se figuren) ved hjelp av Pytagoras:

$$s = \sqrt{5^2 + 10^2} \text{ cm} = \sqrt{125} \text{ cm} = 11,2 \text{ cm}.$$

Arealet av sideflaten er da  $\pi r s = \pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 11,2 \text{ cm} = 176 \text{ cm}^2$ .



Arealet av overflaten til ei kule er gitt ved formelen

$$4\pi r^2$$

## 8. Flere eksempler på oppgaver med volum og overflate

*Prøv å løse disse oppgavene selv før du ser på løsningen!*

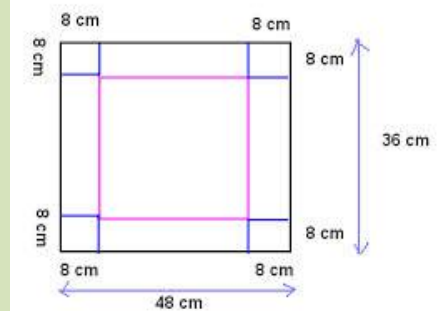
### Eksempel 14

Vi skal lage en pappeske ved å klippe vekk de fire kvadratene i hjørnene på papp-platen til høyre og deretter brette opp sidene og lime dem sammen. Hvor mange liter vil esken romme?

Sidene i grunnflaten blir  $48 \text{ cm} - 8 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$ . Fordi vi skal ha volumet i liter, som er det samme som  $\text{dm}^3$ , gjør vi om siden til  $3,2 \text{ dm}$ . Høyden i esken blir  $8 \text{ cm} = 0,8 \text{ dm}$ .

Grunnflaten blir  $3,2 \text{ dm} \cdot 3,2 \text{ dm} = 10,24 \text{ dm}^2$ .

Volumet blir  $10,24 \text{ dm}^2 \cdot 0,8 \text{ dm} = 8,2 \text{ dm}^3 = 8,2 \text{ L}$ .



### Eksempel 15

Tverrsnittet av en biltunnel er tilnærmet en halvsirkel med radius  $5,0 \text{ m}$ . Tunnelen er  $1,6 \text{ km}$  lang.

- Hvor mange kubikkmeter fjellmasse ble fjernet under byggingen av tunnelen?
- $1 \text{ m}^3$  stein veier ca.  $2800 \text{ kg}$ . En lastebil kan frakte  $30$  tonn stein. Hvor mange billass tilsvarende steinen som ble fjernet?



- Volumet av steinen som er tatt ut må være lik volumet av tunnelen. Tunnelen er en liggende, halv sylinder.

Grunnflaten av tunnelen er  $\frac{\pi \cdot (5,0 \text{ m})^2}{2} = 39,3 \text{ m}^2$ .

«Høyden» av halvsylinderen er lengden av tunnelen, altså  $1,6 \text{ km} = 1600 \text{ m}$ .

Volumet av tunnelen blir  $39,3 \text{ m}^2 \cdot 1600 \text{ m} = 62900 \text{ m}^3$ .

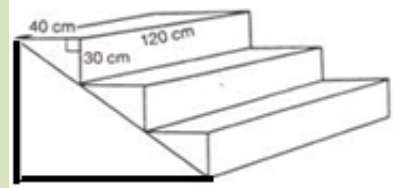
- $2800 \text{ kg} = 2,8 \text{ t}$  (tonn). Steinen som ble tatt ut veier  $62900 \text{ m}^3 \cdot 2,8 \text{ t/m}^3 = 176000 \text{ t}$ .

Antall lass blir  $176000 \text{ t} : 30 \text{ t} = 5900$  (passe avrundet).



### Eksempel 16

Tegningen viser en betongtrapp. Hvor mye betong trengs for å støpe trappen? Oppgi svaret i  $m^3$ .



Trappen består av tre like liggende trekantede prismer som utgjør trinnene i trappen, og et større trekantet prisme som utgjør sokkelen. Det raskeste er å legge sammen grunnflatearealene til alle fire prismene, og så multiplisere med høyden i prismene (120 cm). Vi regner alle lengdene i m.

Samlet areal av grunnflatene:

$$3 \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ m} + 1,2 \text{ m} \cdot 0,9 \text{ m} = 1,44 \text{ m}^2.$$

Volumet av betongen:

$$1,44 \text{ m}^2 \cdot 1,2 \text{ m} = 1,7 \text{ m}^3 \text{ (passe avrundet).}$$

## Eksamensoppgaver

### E1

(Høst 2011, Del 1)

En pakke melis har tilnærmet form som et rett prisme med lengde 8 cm, bredde 6 cm og høyde 16 cm.

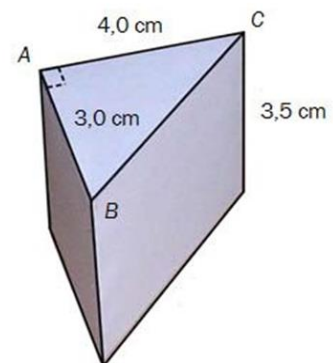
Vil melisen få plass i en sylindrerformet boks med diameter 12 cm og høyde 10 cm? (*Overslagsregning!*)



### E2

(Vår 2011, Del 1)

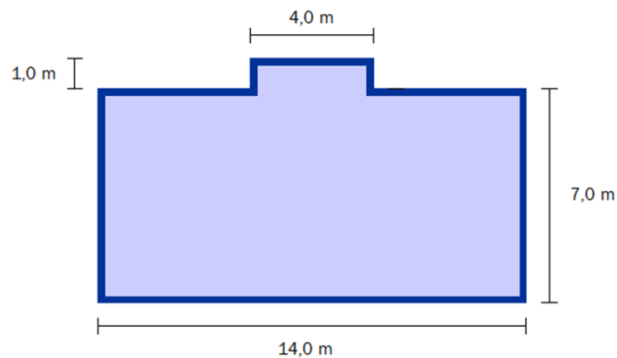
En kloss har form som et rett trekantet prisme.  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 3,0 \text{ cm}$ ,  $AC = 4,0 \text{ cm}$  og høyden er 3,5 cm. Se skissen til høyre.



- 1) Regn ut volumet av klossen. (Ikke kalkulator!)
- 2) Regn ut overflaten av klossen. (Ikke kalkulator!)

### E3

(Høst 2012, Del 2)



Svein skal bygge hytte. Han skal lage grunnmur og gulv av betong. Se figuren ovenfor. Det mørkeblå området er grunnmuren. Denne skal være 0,25 m bred.

a) Bestem arealet av det lyseblå og av det mørkeblå området på figuren.

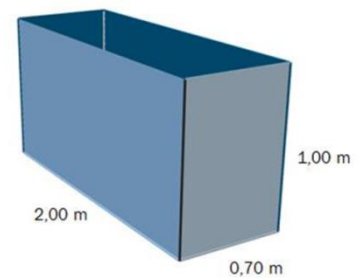
I det lyseblå området skal Svein legge et 10 cm tykt betonglag. Grunnmuren skal være 40 cm høy.

b) Hvor mange kubikkmeter betong trenger han?

### E4

(Vår 2013, Del 2)

Familien Hansen har hytte på fjellet. I kjelleren har de en beholder der de samler opp regnvann. Beholderen har form som et rett firkantet prisme. Se skissen ovenfor.




a) Hvor mange liter rommer beholderen?

Når det regner, vil alt vannet som treffer hyttetaket, bli ledet ned i beholderen. Hyttetaket er tilnærmet horisontalt og har et areal på  $70 \text{ m}^2$ . En dag da familien reiser fra hytta, er beholderen tom. I løpet av den neste uken regner det 12 mm.

b) Hvor høyt i beholderen står vannet når familien kommer tilbake etter denne uken?

En annen dag familien reiser fra hytta, står vannet 10 cm høyt i beholderen. Når de kommer tilbake, står vannet 85 cm høyt.

c)  Hvor mange millimeter har det regnet den tiden de var borte?

## E5

(Vår 2012, Del 2)

Kåre har kjøpt en sparedusj. Når han brukte det gamle dusjhodet, tok det 35 s å fylle en tilters bønne med vann. Når han bruker sparedusjen, tar det 65 s å fylle den samme bønne.

Kåre dusjer i åtte minutter hver dag.

- a) Vis at Kåre brukte ca. 137 L vann hver dag når han dusjet med det gamle dusjhodet, og at han bare bruker ca. 74 L hver dag når han bruker sparedusjen.

For å varme opp én liter vann til normalt varmt dusjvann, kreves en energimengde på 0,035 kWh. Kåre må betale 1,10 kroner for 1 kWh.

- b) Hvor mye kostet det per år for Kåre å dusje med det gamle dusjhodet?

Sparedusjen Kåre kjøpte, kostet 400 kroner.

- c) 🤔 Hvor lang tid går det før han har spart inn denne investeringen?

Kåre har også et badekar. Badekaret har form som et rett firkantet prisme med lengde 140 cm og bredde 50 cm. Kåre fyller badekaret slik at vannhøyden er 30 cm.

- d) 🤔 Hva koster det Kåre å fylle badekaret med normalt varmt dusjvann?

## E6

(Vår 2013, Del 2)

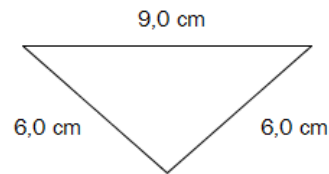


En haug med tørr sand har form tilnærmet lik en kjegle. Radius i kjeglen er 1,5 ganger så stor som høyden i kjeglen.

- a) Bestem volumet av haugen med tørr sand dersom radius i kjeglen er 1,35 m.
- b) Bestem hvor høy kjeglen er dersom haugen med sand har et volum på  $8,0 \text{ m}^3$ .

**E7**

(Høst 2012, Del 2)



Til venstre ovenfor ser du et glass med stett. Vi regner at den delen av glasset som fylles med drikke, har form som en kjegle. Diameteren i toppen av kjeglen er 9,0 cm, og sidekantene er 6,0 cm. Se tverrsnittet til høyre ovenfor.

- Bestem høyden i kjeglen.
- Hvor mange centiliter vann er det plass til i glasset?

**E8**

(Vår 2010, Del 2)



Bildet viser en sylinderveformet lagertank for dieselloilje. Omkretsen til tanken er 48 meter. Personen på bildet er 184 cm høy.

- Omtrent hvor høy er tanken?
- Omtrent hvor stort volum har tanken?

Tanken skal males utvendig. Det går med 1 liter maling til  $10 \text{ m}^2$ .

- Omtrent hvor mange liter maling går det med til å male tanken?

## E9

(Høst 2010, Del 2)



En ost har form som en sylinder. Den er 34,0 cm i diameter og 4,0 cm høy. Osten veier 3,0 kg.

a) Finn volumet av osten.

Osten har en 2 mm tykk skorpe.

c) Hvor stor del av osten utgjør skorpen?

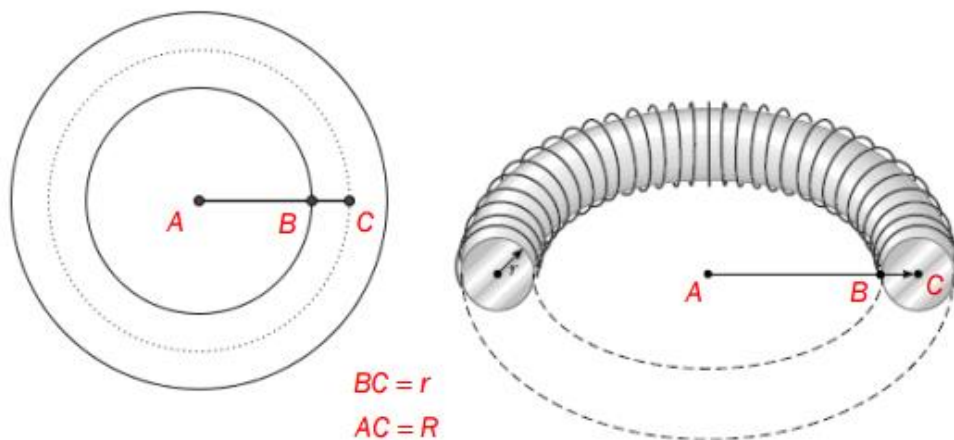
Gunnar kjøper 250 g ost. Han får et ostestykke formet som en sirkelsektor.

c) 🤔 Hvor mange grader er denne sirkelsektoren?



## E10

(Vår 2016, Del 2)



Bildet ovenfor viser en torus. Torusen er laget av et aluminiumsrør. Figurene viser tverrsnitt av torusen.

Volumet  $V$  av en torus er gitt ved

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

Der  $BC = r$  er radius i aluminiumsrøret og  $AC = R$  er avstanden fra sentrum i det sirkelformede hullet i midten av torusen til sentrum i aluminiumsrøret.

I en torus er  $r = 5,1$  cm og  $R = 20,4$  cm

a) Bestemt volumet av denne torusen. Gi svaret i liter.

I en annen torus er  $R = 10,2$  cm. Torusen har  $V = 8,6$  L.

b) Bestem omkretsen av sirkelen med radius  $AB$ .



## E11

(Høst 2011, Del 2)

Kari vil bake en kake. Hun finner oppskrifter på tre runde kaker i ulike størrelser. Alle kakene har tilnærmet form som sylindre med høyde 7 cm.



Liten kake:  
- Diameter 20 cm  
- Beregnet til  
10 personer



Medium kake:  
- Diameter 26 cm  
- Beregnet til  
16 personer



Stor kake:  
- Diameter 30 cm  
- Beregnet til  
25 personer

a) For hvilken kakestørrelse er det beregnet mest kake per person?

Kakene er dekket med marsipan på toppen og på siden. Marsipanlaget er tilnærmet 3 mm tykt.

b) 🤔 Omtrent hvor mye marsipan går med for å lage den store kaken?

Kari går til butikken for å kjøpe marsipan. En marsipanpølse har form som en sylinder med diameter 4 cm og lengde 20 cm.

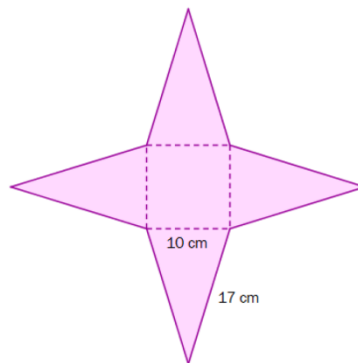
c) 🤔 Hvor mange marsipanpølser må Kari kjøpe for å ha nok marsipan til den store kaken?

## E12

(Vår 2012, Del 2)



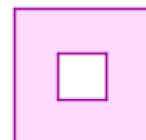
Mary har laget et pyramidekort. Grunnflaten i kortet er et kvadrat. Sidene i pyramiden er likebeinte trekkanter. Under ser du mønsteret hun brukte.



I tillegg til selve pyramiden har hun laget en kvadratisk ramme, som hun kan tre ned over pyramiden for å holde den sammen.

- Vis ved regning at høydene i de fire likebeinte trekantene på figuren over er ca. 16 cm, og bruk dette til å regne ut overflaten til pyramidekortet. (Vi ser her bort fra rammen som er tredd over kortet.)
- Vis at pyramidekortet er ca. 15 cm høyt.

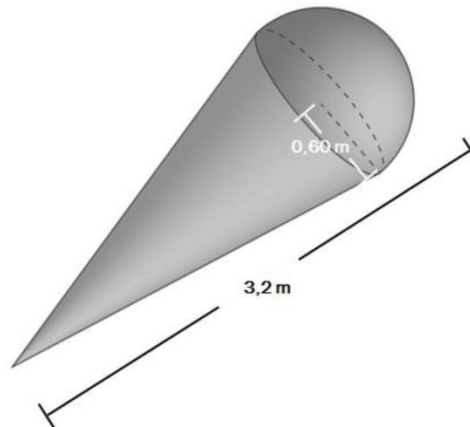
Hullet i rammen som tres over kortet, er et kvadrat. Hullet skal være så stort at rammen blir liggende 10 cm over grunnflaten i pyramiden.



- Regn ut hvor stort hullet i rammen må være.

### E13

(høst 2013, Del 2)



Tore har laget en stor modell av en kuleis. Modellen har tilnærmet form som en kjegle med en halvkule i enden. Toppen av kjeglen har radius 0,60 m, og modellen er 3,2 m lang. Se skissen ovenfor.

a) Regn ut volumet av modellen.

Modellen skal lakeres. En boks lakk er nok til  $2,2 \text{ m}^2$ .

b) Hvor mange bokser vil gå med for å lakkere modellen?

### Fasit øvingsoppgaver

- Oppgave 1 a)  $1000 \text{ cm}^3$  b)  $0,001 \text{ m}^3$   
Oppgave 2  $60 \text{ cm}^3$   
Oppgave 3 a)  $36 \text{ m}^3$  b)  $120 \text{ min} = 2 \text{ h}$   
Oppgave 4  $1 \text{ L}$   
Oppgave 5  $112,5 \text{ cm}^3$   
Oppgave 6  $339,12 \text{ cm}^3$   
Oppgave 7  $192 \text{ cm}^3$   
Oppgave 8  $37,7 \text{ cm}^3$   
Oppgave 9 a)  $33,5 \text{ cm}^3$ ,  $268 \text{ cm}^3$  b)  $8$   
Oppgave 10 b)  $12,2 \text{ cm}$   
Oppgave 11  $2,9 \text{ cm}$   
Oppgave 12  $2,6 \text{ m}$   
Oppgave 13  $170 \text{ cm}^3 = 1,7 \text{ dL}$   
Oppgave 14  $0,99 \text{ m}^3$   
Oppgave 15  $450 \text{ cm}^3$   
Oppgave 16  $220 \text{ cm}^2$   
Oppgave 17 b)  $672 \text{ cm}^2$   
Oppgave 18 a)  $518 \text{ cm}^2$  b)  $708 \text{ cm}^2$   
Oppgave 19 a)  $9,85 \text{ cm}$  b)  $222 \text{ cm}^2$

### Fasit eksamensoppgaver

- E1 Ja  
E2 1)  $21 \text{ cm}^3$  2)  $54 \text{ cm}^2$   
E3 a)  $90,3 \text{ m}^2$   $11,7 \text{ m}^2$  b)  $13,5 \text{ m}^3$   
E4 a)  $1400 \text{ L}$  b)  $0,60 \text{ m}$  c)  $15 \text{ mm}$   
E5 b)  $1925 \text{ kr}$  c)  $165 \text{ d}$  d)  $8,10 \text{ kr}$   
E6 a)  $1,72 \text{ m}^3$  b)  $1,5 \text{ m}$   
E7 a)  $4,0 \text{ cm}$  b)  $85 \text{ cm}^3 = 8,5 \text{ cL}$   
E8 a) ca.  $10 \text{ m}$  b) ca.  $1800 \text{ m}^3$  (avhengig av svaret i a) c) ca.  $66 \text{ L}$   
E9 a)  $3630 \text{ cm}^3 = 3,63 \text{ dm}^3$  b) ca.  $12 \%$  c)  $30^\circ$   
E10 a) Ca.  $10,5 \text{ L}$  ( $\approx 10\,475 \text{ cm}^3$ ) b) Ca.  $35 \text{ cm}$   
E11 a) Medium b) ca.  $400 \text{ cm}^3$  c)  $2$   
E12 a)  $420 \text{ cm}^2$  c)  $3,8 \text{ cm}$   
E13 a)  $1,43 \text{ m}^3$  b)  $4 \text{ bokser}$

# Kapittel 7. Økonomi



## Mål for Kapittel 7, Økonomi.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- Redegjøre for og regne med prisindeks, kroneverdi, reallønn og nominell lønn og beregne inntekt, skatt og avgifter
- vurdere forbruk og bruk av kredittkort og sette opp budsjett og regnskap ved hjelp av regneark,
- undersøke og vurdere ulike former for lån og sparing

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva (konsum)prisindeks, kroneverdi, reallønn, nominell lønn, brutto- og nettolønn er
- hva renter er
- hva trekkgrunnlag er og hvordan skatt beregnes av dette
- hva forskjellen på serie- og annuitetslån er
- hvordan en setter opp et budsjett

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan trekkgrunnlaget beregnes og hva som påvirker det
- hvordan regne i Excel og bruke innbygde funksjoner
- hvordan et kredittkort fungerer og hva forskjellen på et kredittkort og et betalingskort er.

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- strukturere et budsjett i Excel
- delta i en diskusjon rundt budsjett og bruk av penger i hverdagen
- diskutere hvilke låne- og sparemetoder som er best i en gitt situasjon
- analysere og diskutere personlig økonomi
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Familien Hansen vurderer hytte

Nedenfor ser du en oversikt over familien Hansens faste inntekter og utgifter for en måned. De vurderer å ta opp lån for å kjøpe ei hytte. Det vil i så fall koste dem ca. 3000 kroner i måneden i avdrag og renter.

Familien Hansen har ikke helt oversikt over familieøkonomien, og er usikker på om de har råd til å kjøpe hytta. De har derfor spurt klassen vår om vi kan avgjøre om de har råd til hytta, og eventuelt komme med forslag til hva de kan gjøre for å få råd til den.

Familien Hansens inntekter og utgifter:

Netto lønn, Herr Hansen:	25.500 kr
Huslån, avdrag (nedbetaling over 15 år):	-21.260 kr
Mat og drikke:	-8.000 kr
Klær	-3.000 kr
Huslån, renter (3,10%)	-7.900 kr
Bil (inkl. lån, vedlikehold og forbruk)	-3.500 kr
Netto lønn, Fru Hansen	28.350 kr
Sparing	-2.000 kr
Barnehage og AKS	-4.500 kr
TV, internett, telefon	-1.500 kr
Strøm	-950 kr
Div. forbruk	-3.000 kr
Barnetrygd	1.950 kr

Kan du lage en oversikt over Familien Hansens økonomi, og gi dem råd på hva de bør velge?

## 1. Lønn, feriepenger, skatt og avgifter

### 1.1 Lønn

Vi har to hovedformer for lønn, *tidslønn* og *prestasjonslønn*.

Har du tidslønn bestemmes lønna av den tiden du jobber. Eksempler på slik lønn er timelønn, månedslønn og årslønn. Månedslønn og årslønn er som regel basert på at man jobber 37,5 timer per uke og at det er 52 uker i et år.

Antall timer i et arbeidsår blir da  $37,5 \cdot 52 = 1950$  timer.

Antall timer per måned er da  $1950 \text{ timer} / 12 \text{ måneder} = 162,5$  timer.

Dersom du jobber flere timer enn avtalt kan du ha krav på *overtidsbetaling*.

Overtidsbetalingen er et prosentvis tillegg av timelønna, og ofte avhengig av tid på døgnet, eller om det er hverdag eller helgedag.

#### Eksempel 1

Du jobber på sykehjem og timelønna er 150 kr. En måned arbeider du 20 timer og i tillegg 10 kveldstimer med 50 % overtid.

Tidslønn:	$20 \cdot 150 \text{ kr} =$	3000 kr
Overtidsbetaling:	$10 \cdot (150 \text{ kr} \cdot 1,50) =$	2250 kr
Total lønn:		<u>5250 kr</u>

#### Oppgave 1

Hanne arbeider 37,5 timer hver uke. Hun har en timelønn på 225 kr. Hvor mye får hun utbetalt i bruttolønn (lønn før skatt) hver uke?

#### Oppgave 2

Siri har en årslønn på 375 500 kr. Hva blir timelønna til Siri dersom du regner med 1950 arbeidstimer i løpet av ett år?

#### Oppgave 3

Bjørn plukker moreller. Han får 12 kroner for hver kg han plukker.

En dag plukket han 135 kg i løpet av 10 timer

- Hva var bruttolønna til Bjørn denne dagen?
- Hva ble timelønna?

#### Oppgave 4

Arild jobber hver lørdag i en fiskebutikk. Han har arbeidstid fra kl 11:00 til kl 18:30. En måned jobber han fire lørdager. Han får 50% overtidstillegg etter kl 17:00. Hva er bruttolønna til Arild denne måneden når timelønna er 120 kr?

### Oppgave 5

Maria er butikkmedarbeider. Timelønnen hennes er 155 kr. En måned arbeidet hun 120 timer for vanlig timelønn og 15 timer for 50 % tillegg.  
Finn lønna til Maria denne måneden.

### Oppgave 6

Alex jobber på en bensinstasjon. Månedslønna hans er 26 000 kr.

a) Finn timelønna når det er 162,5 arbeidstimer i en måned.

En måned arbeider han i tillegg 15 timer overtid. 10 av disse timene får han 50 % tillegg for, mens for de siste 5 får han 100 % tillegg.

b) Finn ut hvor mye Alex tjener totalt i løpet av måneden.

Har du prestasjonslønn, bestemmes lønna av hva du gjør, uten å ta hensyn til hvor lang tid du bruker på det. To forskjellige typer slik lønn er *akkordlønn* og *provisjonslønn*.

*Akkordlønn* er at du får betalt en fast sum for å utføre et bestemt arbeid.

#### Eksempel 2

Du får 1000 kr for å vaske leiligheten, uansett hvor lang tid du bruker på det. Jo kortere tid du bruker på det jo høyere er timelønnen.

#### Eksempel 3

Du tjener 50 kr per skjorte du vasker og stryker. Dersom du vasker og stryker 5 skjorter, tjener du  $50 \text{ kr} \cdot 5 = 250 \text{ kr}$ .

### Oppgave 7

Thomas tjener 800 kr for å vaske stua og rommet sitt hver uke. Finn den faktiske timelønna til Thomas dersom han bruker

a) 5 timer på jobben

b) 2 timer på jobben

### Oppgave 8

Thea tjener forskjellige beløp for ulike oppgaver hjemme:

<u>Oppgave</u>	<u>Sum per oppgave</u>
Oppvask	75 kr
Klesvask	50 kr
Gå tur med hunden	60 kr
Passe lillebror i 1 time	25 kr

En uke tar Thea oppvasken 4 ganger, klesvasken 2 ganger, hun går 4 turer med hunden og passer lillebror i totalt 6 timer.

Hvor mye tjener Thea denne uken?



## Oppgave 9

Vegard er snekker og gir et tilbud på 27 000 kr for en jobb. Han regner med å bruke 10 arbeidsdager på jobben. Hver arbeidsdag er på 7,5 timer. Hvor stor timelønn har Vegard beregnet at han skal ha?

*Provisjonslønn er at du får betalt en viss prosent av det du selger for. Ofte får man en lav timelønn i tillegg – eventuelt en fast lav månedslønn.*

*Eksempel 4:* Du jobber som telefonselger og selger abonnement for bladet “Hverdagsmatematikk”. Timelønna er 150 kr og provisjonen er 20 % av det du selger for. En kveld jobber du 3 timer og selger abonnementer for 2000 kr.

Tidslønn:	$3 \cdot 150 \text{ kr} =$	450 kr
Provisjon:	$0,20 \cdot 2000 \text{ kr} =$	400 kr
Total lønn:		<u>850 kr</u>

## Oppgave 10

Per arbeider som telefonselger. Han har en fast timelønn på 105 kr. I tillegg får han 15 kroner for hvert salg han oppnår. En uke arbeidet Per 15 timer. Han oppnådde 90 salg denne uka.

- Hvor mye hadde Per i brutto ukelønn denne uka?
- Hva ble den virkelige timelønna til Per denne uka?

## Oppgave 11

Svein jobber som selger. Han har en fast månedslønn på 20 000 kr. I tillegg skal Svein ha 5% provisjon av salget som overstiger 100 000 kr. En måned solgte han for 250 000 kr. Finn bruttolønna til Svein denne måneden.

## Oppgave 12

Alan arbeider som telefonselger for bladet “Sport og geometri”. Han har fast timelønn lik 160 kr. Provisjonen hans er 15 % av det han selger for. En uke arbeider han 10 timer og selger abonnementer for 3000 kr. Finn ut hva han tjener denne uka.

## Oppgave 13

Hanna selger husalarmer og får to ulike lønstilbud når hun starter i jobben:

Tilbud A: Hun tjener 50 kr per husalarm hun selger.

Tilbud B: Hun tjener 100 kr per time og 10 kr per husalarm hun selger.

Hanna regner med å arbeide 20 timer i løpet av en uke og i løpet av den tiden selge 100 husalarmer.

- Beregn lønna til Hanna dersom hun velger tilbud A.
- Beregn lønna til Hanna dersom hun velger tilbud B.

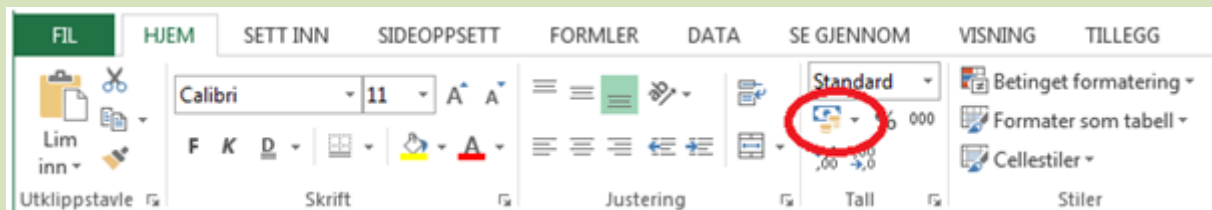
## Lønnsberegning i Excel

Når vi skal bruke Excel, ønsker vi at dokumentet skal være mest mulig dynamisk. Det vil si at vi skriver inn de relevante opplysningene i starten av dokumentet og henter dem inn videre i Excel-arket. Hvis opplysningene endres, så vil hele dokumentet med utregninger endre seg automatisk.

*Eksempel 5:* Du jobber på sykehjem og timelønnen er 150 kr. En måned arbeider du 20 timer og i tillegg 10 kveldstimer med 50 % overtid.

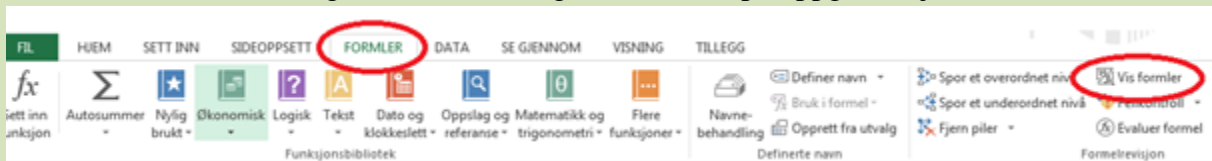
	A	B
1	Timelønn vanlig tid	kr 150,00
2	Timelønn overtid	150 %
3	Timer vanlig tid	20
4	Timer kveld	10
5		
6	Tidslønn	kr 3 000,00
7	Overtidslønn	kr 2 250,00
8	Total lønn	kr 5 250,00

For å få frem **kr 150,00** må du trykke på «seddel- og mynssymbolet» på oppgavelinjen etter at du har skrevet inn 150.



Fordelen er at du alltid får to desimaler i krone tallene dine.

For å få frem formler velger du **Formler** og **Vis formler** på oppgavelinjen



	A	B
1	Timelønn vanlig tid	150
2	Timelønn overtid	1,5
3	Timer vanlig tid	20
4	Timer kveld	10
5		
6	Tidslønn	=B3*B1
7	Overtidslønn	=B4*B1*B2
8	Total lønn	=SUMMER(B6:B7)

Husk alltid å vise hvilke formler du har brukt!

## 1.2 Feriepenger

Feriepenger er spesielt for Norge. Når du har ferie, trekkes du i lønn for de dagene du har ferie. Da får du i stedet for utbetalt feriepenger. Feriepenger utbetales den måneden du skal ha sommerferie, vanligvis i juni eller juli. Dette blir gjort for at alle arbeidstakere skal kunne ha penger når de skal ha ferie.

Feriepengene et år er på 10,2 % av brutto årslønn året før. Det vil si at feriepene for 2015 beregnes av årslønna i 2014 (uten feriepene du fikk i 2014)

For personer over 60 år er feriepene på 12,5 %, fordi de har en ekstra ferieuke.

### Eksempel 6

Hanna er 32 år. I 2014 hadde hun en brutto årslønn på 365 000 kr.

Hvor mye skal Hanna få utbetalt i feriepenger i 2015?

Siden Hanna er 32 år skal hun ha 10,2 % i feriepenger.

$$365\,000\text{ kr} \cdot 0,102 = 37\,230\text{ kr}$$

Hanna skal få utbetalt 37 230 kr i feriepenger i 2015.

### Eksempel 7

Vebjørn er 62 år. I 2014 hadde han en brutto årslønn på 506 250 kr inkludert 50 250 kr i feriepenger for 2014.

Hvor mye skal Vebjørn få utbetalt i feriepenger i 2015?

Vi må først finne brutto årslønn uten feriepenger:

$$506\,250\text{ kr} - 50\,250\text{ kr} = 456\,000\text{ kr}$$

Fordi Vebjørn er over 60 år, så skal han ha 12,5 % i feriepenger

$$456\,000\text{ kr} \cdot 0,125 = 57\,000\text{ kr}$$

Vebjørn skal få utbetalt 57 000 kr i feriepenger i 2015.

### **Har du sommerjobb?**

Når du har en sommerjobb, så har du krav på feriepenger. Du har krav på å få de utbetalt med en gang sommerjobben er slutt, men du kan også velge å vente med å få dem til neste sommer. Dette gjelder uansett hvor mye du tjener på sommerjobben din!

### 1.3 Skatt og avgifter

Vi får ikke utbetalt hele lønna. Arbeidsgiveren skal betale inn deler av lønna til en arbeidstaker som skatt til staten, før resten av lønna blir utbetalt til arbeidstaker. Skattemyndighetene sender ut skattekort til arbeidstakere. En arbeidstaker kan ha et *prosentkort* eller et *tabellkort* hvor det står hvor mye som skal trekkes i skatt. I et prosentkort står det en prosent som skal trekkes, mens det i et tabellkort er en tabell hvor du leser av summen du skal trekke i skatt. Når vi skal lese av tabellen, runder vi alltid lønna ned til nærmeste hundre. til nærmeste hundre.

Den samlede lønna før skatten er trukket fra kalles *bruttolønn*. Bruttolønn minus skatt kalles for *nettolønn* og det er dette en arbeidstaker får utbetalt.

#### Eksempel 8

Sindre er lærling og tjener 90 kr i timen. En måned jobber han 160 timer. Han betaler 18 % skatt. Finn nettolønna til Sindre.

Bruttolønn: $90 \text{ kr/t} \cdot 160 \text{ t} =$	14400 kr
Skatt: $0,18 \cdot 14400 \text{ kr} =$	- 2592,00 kr
Nettolønn:	<u>11808,00 kr</u>

#### Oppgave 14

Mona er butikkmedarbeider og tjener 150 kr i timen.

Ved overtid får hun et tillegg på 50 %.

En måned arbeider hun 160 timer. 10 av disse timene er overtid. Hun betaler 28 % skatt.

Finn nettolønna til Mona.

Virkeligheten er langt mer komplisert enn eksemplet og oppgaven over fordi det er flere typer skatt og avgifter.

Mange arbeidstakere har avtale om at arbeidsgiver trekker deler av lønningen for å betale fagforeningskontingent og/eller innbetaling til pensjonskasse.

- Pensjonstrekket regnes i prosent av fast lønn
- Fagforeningskontingenten er et fast beløp eller regnes i prosent av brutto lønn

Forskjellen på fast lønn og brutto lønn er at overtid teller med i bruttolønn. Fast lønn er det du tjener uten overtid.

Disse beløpene trekkes fra før skatten beregnes. Beløpet skatten beregnes av kalles *trekkgrunnlag*. Beløpet som trekkes kalles *skattetrekk*.

### Eksempel 9

Tore har fast månedslønn lik 36 000 kr. Han betaler inn 2 % pensjonstrekk og 350 kr i fagforeningskontingent.

a) Regn ut trekkgrunnlaget.

Fast månedslønn:	36 000 kr
Pensjonstrekk (2 % av fast lønn)	- 720 kr
<u>Fagforeningskontingent</u>	<u>- 350 kr</u>
Trekkgrunnlag	<u>34 930 kr</u>

b) Tore blir trukket 35 % skatt av trekkgrunnlaget. Finn skattetrekket og nettolønnen:

Trekkgrunnlag	34 930	kr
<u>Skattetrekk (0,35 · 34 930)</u>	<u>-12 225,50</u>	<u>kr</u>
Nettolønn	22 704,50	kr

### **Oppgave 15**

Simen har 28 500 kr i fast månedslønn.

- Simen trekkes 2 % av lønna til pensjon. Regn ut pensjonstrekket.
- Simen trekkes 1,5 % av lønna i fagforeningskontingent. Regn ut fagforeningskontingenten.
- Regn ut trekkgrunnlaget
- Simen har prosentkort med skattetrekk på 28 %. Regn ut skattetrekket.
- Hvor mye får Simen utbetalt denne måneden?

Arbeidsgiver betaler inn både skatt til fylke/kommune og trygdeavgift til folketrygden (herfra kommer det bl.a. sykepenger, arbeidsledighetstrygd og pensjon).

Noen viktige tall og begreper når man skal beregne skatt (tallene gjelder for 2015).

*Personinntekt* er det en person tjener i løpet av et år (bruttolønn).

#### **Noen viktige tall:**

<i>Alminnelig inntekt:</i>	Personinntekt minus 89 050 kr
<i>Grunnlag for toppskatt:</i>	Personinntekt minus 550 550 kr
<i>Nettolønn:</i>	Personinntekt minus skatt

#### **Skatteberegning:**

<i>Inntektsskatt</i>	27 % av alminnelig inntekt
<i>Trygdeavgift</i>	8,2 % av personinntekt
<i>Toppskatt</i>	9 % av grunnlaget for toppskatt
<b>Skatt totalt</b>	<b>Summen av de tre skattene ovenfor</b>

## Beregning av skatt og avgifter i Excel

*Eksempel 10:* Tore har fast brutto månedslønn lik 36 000 kr. Han betaler inn 2 % pensjonstrekk og 350 kr i fagforeningskontingent. Tore blir trukket 35 % skatt av trekkgrunnlaget. Hva blir Tores netto månedslønn?

	A	B
1	Brutto månedslønn	kr 36 000,00
2	Pensjonstrekk	2 %
3	Fagforeningskontingent	kr 350,00
4	Skatt	35 %
5		
6	Fast månedslønn	kr 36 000,00
7	Pensjonstrekk	kr 720,00
8	Fagforeningskontingent	kr 350,00
9	Trekkgrunnlag	kr 34 930,00
10	Skattetrekk	kr 12 225,50
11	Netto månedslønn	kr 22 704,50

Formler:

	A	B
1	Brutto månedslønn	36000
2	Pensjonstrekk	0,02
3	Fagforeningskontingent	350
4	Skatt	0,35
5		
6	Fast månedslønn	=B1
7	Pensjonstrekk	=B1*B2
8	Fagforeningskontingent	=B3
9	Trekkgrunnlag	=B6-B7-B8
10	Skattetrekk	=B9*B4
11	Netto månedslønn	=B9-B10

## 2. Sparing og lån

### 2.1 Sparing

En vanlig og trygg måte å spare penger er å sette dem i en bank. Fordi banken trenger penger til utlån, gir de deg hvert år et bestemt prosentbeløp i tillegg til pengene du setter inn. Dette prosentbeløpet kalles *rente*.

#### Eksempel 11

Du setter inn 5000 kr i banken til 2,5 % årlig rente.  
Hva er disse pengene vokst til i løpet av et år?

Dette vil si at pengene vokser med 2,5 %, altså kan vi gange med vekstfaktor.

Vekstfaktor til 2,5 %:  $100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = \frac{102,5}{100} = 1,025$ .

Beløp etter ett år:  $5000 \text{ kr} \cdot 1,025 = 5125 \text{ kr}$ .

#### Oppgave 16

Adrian setter inn 4000 kr i banken til 2,65 % rente.  
Hva er disse pengene vokst til etter et år?

Andre eksempler på sparing:

- BSU (Boligsparing for ungdom) som gir skattefordeler for ungdom mellom 18 og 33 år
- Aksjefond. Kan gi mer penger tilbake enn en bankkonto, men kan også gjøre at du taper penger.

### 2.2 Lån

Dersom vi ønsker å kjøpe eller investere i noe som ikke dekkes av den vanlige lønna vår, kan vi ta opp lån. Dette er særlig aktuelt dersom vi skal kjøpe bolig.

Banken kan låne oss penger, men tar betalt i form av renter på lånet. Vi betaler derfor alltid mer tilbake enn summen vi låner fra banken.

Summen vi låner fra banken kaller vi *lånesum*.

#### Eksempel 12

Vi tar opp et lån på 100 000 kr til 3,5 % årlig rente. Hva har dette lånet vokst til i løpet av ett år dersom vi ikke betaler noe på det?

Vekstfaktoren til 3,5 % rente er  $100 \% + 3,5 \% = 103,5 \% = \frac{103,5}{100} = \underline{1,035}$

$100000 \cdot 1,035 = 103\,500 \text{ kr}$ .

Etter ett år vil lånet ha vokst til 103 500 kr.

Når vi skal betale tilbake et lån, kan vi gjøre det månedlig, kvartalsvis eller årlig.

Hver gang vi betaler på lånet er en *termin*, og det vi betaler inn kaller vi *terminbeløp*.

### Eksempel 13

Vi har tatt opp et lån og skal betale tilbake.

Fra banken får vi beskjed om at lånet skal betales inn månedlig over 120 terminer og terminbeløpet er 5000 kr.

Hvor mye betaler vi tilbake og hvor lang tid tar det?

Vi betaler  $5000 \cdot 120 = 600\,000$  kr og siden det er 120 månedlige terminer bruker vi  $\frac{120}{12} = 10$  år på å betale tilbake

Et terminbeløp består av to deler, *avdrag* og *renter*. Avdragene er en del av lånesummen, mens rentene er en bestemt prosentsats av lånesummen vi betaler til banken.

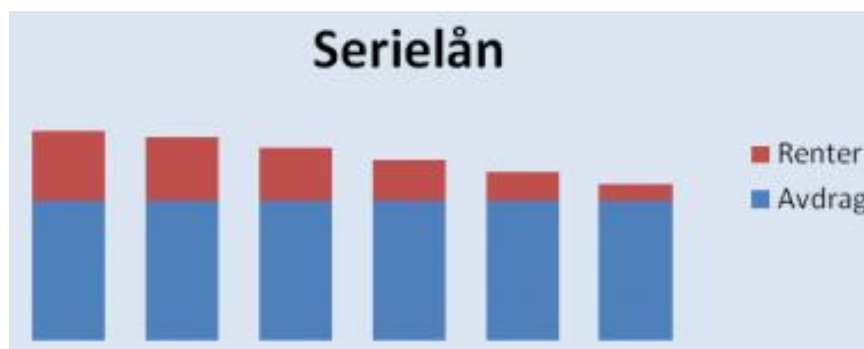
$$\text{Terminbeløp} = \text{Avdrag} + \text{Renter}$$

Vi har to hovedtyper lån, *serielån* og *annuitetslån*.

I et serielån er alle avdrag like

I et serielån er terminbeløpet størst i starten (fordi da utgjør rentene mest) og så blir det mindre etter hvert.

En grafisk fremstilling av et serielån kan se slik ut:



Vi ser at søylene (terminbeløpene) synker, mens den delen som er avdrag alltid er den samme.

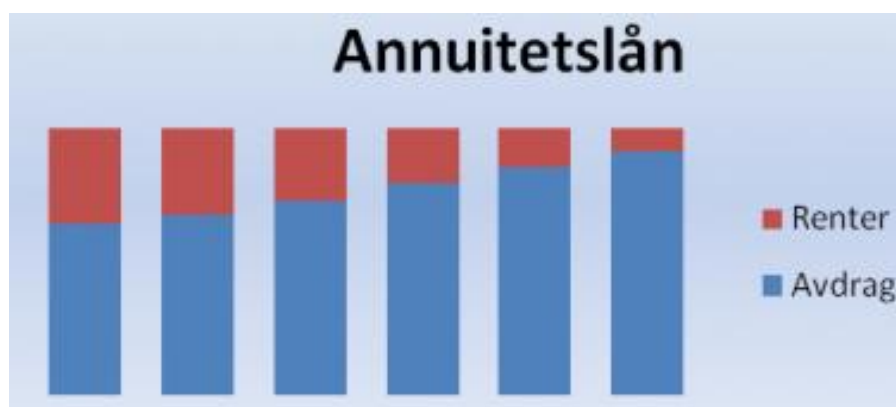


## I et annuitetslån er hvert terminbeløp likt

Det er vanlig å velge annuitetslån dersom lånebeløpet er høyt (som for eksempel ved boliglån) fordi det er mer forutsigbart og terminbeløpet blir ikke så høyt i starten.

Ulempen med et annuitetslån er at man totalt sett betaler mer til banken enn ved et serielån.

En grafisk fremstilling av terminbeløpene i et annuitetslån kan se slik ut:



Her ser vi at hver søyle er like høy, mens avdragene utgjør en større del av søylen etter hvert.

### Oppgave 17

Anine skal låne 100 000 kr i en bank. Hun får 5 % rente, og 5 års nedbetalingstid. Hun betaler inn på lånet en gang i året.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Serielån</b>					<b>Annuitetslån</b>			
2		Renter	Avdrag	Terminbeløp			Renter	Avdrag	Terminbeløp
3	1. termin	5000	20000	25000		1. termin	5000	18097	23097
4	2. termin	4000	20000	24000		2. termin	4095	19002	23097
5	3. termin	3000	20000	23000		3. termin	3145	19952	23097
6	4. termin	2000	20000	22000		4. termin	2147	20950	23097
7	5. termin	1000	20000	21000		5. termin	1100	21998	23097

- Finne ut hvor mye hun betaler det første året og totalt dersom hun velger serielån.
- Finne ut hvor mye hun betaler det første året og totalt dersom hun velger annuitetslån.
- Kommenter forskjellen på resultatene i a og b. Hvilket lån synes du hun bør velge? Forklar hvorfor.

## Nedbetalingsplan for serielån i Excel

*Eksempel 14:* Gro skal ta opp et serielån på 500 000 kr i banken. Hun får 2,30% rente per år. Hun velger en lånetid på 20 år og vil betale tilbake på lånet en gang per år. Lag en nedbetalingsplan for dette lånet.

Vi fyller inn de to første årene manuelt som et dynamisk dokument. Det er viktig å låse cellene med avdrag og låneprosenten hver gang vi bruker dem i dokumentet. Dette fordi de er de samme cellene hele tiden når vi beregner rente og skriver inn avdrag.

For å låse en celle bruker vi **f4** eller setter inn «dollar-tegnene» manuelt (tasten med tallet 4).

Når vi har lagt inn de to første årene, markerer vi år 2 (ikke år 1!) og kopierer formlene nedover.

	A	B	C	D	E
1	<b>Nedbetalingsplan</b>				
2					
3	Lån	kr 500 000,00			
4	Rente	2,30%			
5	År	20			
6	Avdrag	kr 25 000,00			
7					
8	År	Rente	Avdrag	Terminbeløp	Restlån
9	1	kr 11 500,00	kr 25 000,00	kr 36 500,00	kr 475 000,00
10	2	kr 10 925,00	kr 25 000,00	kr 35 925,00	kr 450 000,00
11	3	kr 10 350,00	kr 25 000,00	kr 35 350,00	kr 425 000,00
12	4	kr 9 775,00	kr 25 000,00	kr 34 775,00	kr 400 000,00
13	5	kr 9 200,00	kr 25 000,00	kr 34 200,00	kr 375 000,00
14	6	kr 8 625,00	kr 25 000,00	kr 33 625,00	kr 350 000,00
15	7	kr 8 050,00	kr 25 000,00	kr 33 050,00	kr 325 000,00
16	8	kr 7 475,00	kr 25 000,00	kr 32 475,00	kr 300 000,00
17	9	kr 6 900,00	kr 25 000,00	kr 31 900,00	kr 275 000,00
18	10	kr 6 325,00	kr 25 000,00	kr 31 325,00	kr 250 000,00
19	11	kr 5 750,00	kr 25 000,00	kr 30 750,00	kr 225 000,00
20	12	kr 5 175,00	kr 25 000,00	kr 30 175,00	kr 200 000,00
21	13	kr 4 600,00	kr 25 000,00	kr 29 600,00	kr 175 000,00
22	14	kr 4 025,00	kr 25 000,00	kr 29 025,00	kr 150 000,00
23	15	kr 3 450,00	kr 25 000,00	kr 28 450,00	kr 125 000,00
24	16	kr 2 875,00	kr 25 000,00	kr 27 875,00	kr 100 000,00
25	17	kr 2 300,00	kr 25 000,00	kr 27 300,00	kr 75 000,00
26	18	kr 1 725,00	kr 25 000,00	kr 26 725,00	kr 50 000,00
27	19	kr 1 150,00	kr 25 000,00	kr 26 150,00	kr 25 000,00
28	20	kr 575,00	kr 25 000,00	kr 25 575,00	kr -

Formler:

	A	B	C	D	E
1	Nedbetalingsplan				
2					
3	Lån	500000			
4	Rente	0,023			
5	År	20			
6	Avdrag	=B3/B5			
7					
8	År	Rente	Avdrag	Terminbeløp	Restlån
9	1	=B3*B4	=B5*6	=B9+C9	=B3-C9
10	2	=E9*B5\$4	=B5*6	=B10+C10	=E9-C10
11	3	=E10*B5\$4	=B5*6	=B11+C11	=E10-C11
12	4	=E11*B5\$4	=B5*6	=B12+C12	=E11-C12
13	5	=E12*B5\$4	=B5*6	=B13+C13	=E12-C13
14	6	=E13*B5\$4	=B5*6	=B14+C14	=E13-C14
15	7	=E14*B5\$4	=B5*6	=B15+C15	=E14-C15
16	8	=E15*B5\$4	=B5*6	=B16+C16	=E15-C16
17	9	=E16*B5\$4	=B5*6	=B17+C17	=E16-C17
18	10	=E17*B5\$4	=B5*6	=B18+C18	=E17-C18
19	11	=E18*B5\$4	=B5*6	=B19+C19	=E18-C19
20	12	=E19*B5\$4	=B5*6	=B20+C20	=E19-C20
21	13	=E20*B5\$4	=B5*6	=B21+C21	=E20-C21
22	14	=E21*B5\$4	=B5*6	=B22+C22	=E21-C22
23	15	=E22*B5\$4	=B5*6	=B23+C23	=E22-C23
24	16	=E23*B5\$4	=B5*6	=B24+C24	=E23-C24
25	17	=E24*B5\$4	=B5*6	=B25+C25	=E24-C25
26	18	=E25*B5\$4	=B5*6	=B26+C26	=E25-C26
27	19	=E26*B5\$4	=B5*6	=B27+C27	=E26-C27
28	20	=E27*B5\$4	=B5*6	=B28+C28	=E27-C28

### Oppgave 18

Stine tar opp et serielån over 10 år. Hun låner 1 500 000 kr til 2,9 % rente per år. Lag en nedbetalingsplan i Excel som viser den årlige renta, avdrag, terminbeløp og restlån når hun betaler inn på lånet en gang i året.

### 3. Forbruk og bruk av kredittkort.

**NB!** Kredittkort har 18 års aldersgrense, og det er det en grunn til.

Å bruke kredittkort er en måte å utsette betalingen på. I et kredittkort er det en kredittgrense, denne varierer, men kan for eksempel være 30 000 kr. Det betyr at du kan bruke 30 000 kr som du egentlig ikke har, men må betale tilbake senere. Å bruke kredittkort er en måte å utsette betalingen på. I et kredittkort er det en kredittgrense, denne varierer, men kan for eksempel være 30 000 kr. Det betyr at du kan bruke 30 000 kr som du egentlig ikke har, men må betale tilbake senere.

Betalingen skjer en gang per måned, men kredittkortselskapet krever ikke at du betaler mer enn minstebeløpet, for eksempel 250 kr. Dersom du har brukt mer enn det og ikke betaler tidnok, må du betale renter på beløpet. Rentene er beregnet per måned, og kan for eksempel være 1,5 % per måned. Det høres ikke så mye ut, men over tid blir det mye og tilsvarer nesten 20 % årlig rente!

#### Eksempel 15

Vi skal vise at 1,5 % månedlig rente tilsvarer nesten 20 % årlig rente.

Fra prosentregningen vet vi at 1,5 % økning tilsvarer vekstfaktoren

$$100 \% + 1,5 \% = 101,5 \% = \frac{101,5}{100} = \underline{1,015}$$

I ett år er det 12 måneder.

Samlet vekstfaktor etter 12 måneder er dermed  $1,015^{12} = \underline{1,196}$

Det tilsvarer en økning på 19,6 %.

#### Eksempel 16

Martin har kjøpt en scooter med kredittkort hvor renten er 1,5 % per måned. Scooteren kostet 5000 kr. Martin betaler inn 1000 kr på den neste månedsbetalingen. Hva er kredittkortgjelda dersom Martin ikke betaler noe mer de neste seks månedene?

Den første innbetalingen er rentefri fordi han betaler innen fristen. Det vil si at kredittkortgjelda er 5000 kr – 1000 kr = 4000 kr.

Etter seks måneder har gjelda økt til  $4000 \cdot 1,015^6 = 4373,77$  kr.

### **Oppgave 19**

Kristine har 30 000 kr i gjeld på kredittkortet sitt. Hun betaler 1,7 % rente per måned.

- Hvor mange prosent rente per år gir det?
- Hvor mye skylder Kristine etter 3 år hvis hun ikke betaler noe?

### **Oppgave 20**

Vanja har kjøpt seg sykkel og betalt 30 000 kr med kredittkortet. Renten er 2 % per måned. Hun betaler ikke noe tilbake ved forfall.

- Hvor mye skylder Vanja etter 6 måneder?
- Hvor mange prosent årlig rente betaler hun?
- Hvor mye skylder Vanja etter 4 år?

## 4. Budsjett og regnskap

Forskjellen på budsjett og regnskap er viktig å kunne.

Et *budsjett* er en plan over hvordan du har tenkt å bruke pengene dine. Budsjettet settes alltid opp i forkant av en periode (uke, måned, år)

Et *regnskap* er en oversikt over hvordan pengene faktisk er brukt. Regnskapet settes alltid opp i etterkant av en periode, når du er ferdig med å bruke pengene.

### Oppgave 21

Statens institutt for forbruksforskning (SIFO) har utarbeidet et referansebudsjett for forbruksutgifter som er beregnet for vanlige familier. Utgiftspostene som ligger i dette budsjettet representerer et normalt forbruk til en gjennomsnittlig familie i Norge. Du finner dette budsjettet ved å gå inn på <http://sifo.no/>. Velg referansebudsjett og kalkulator.

Her velger du antall og «type» personer i husholdet, og lager et referansebudsjett for din egen familie.

*Eksempel 17:* Gro og Arne er begge 30 år. De er gift og har to barn, en jente på 5 år og en gutt på 3 år. Gro er lærer og får utbetalt 19 125 kroner per måned. Arne har en 50% konsulentstilling i kommunen og får utbetalt 11 315 kroner pr måned. De mottar barnetrygd på 3000 kroner i måneden. De har ingen andre inntekter.

De bor i en leilighet. Hver måned betaler de 7000 kroner i husleie. I forsikringer betaler de 792 kroner per måned. Strømutgiftene er på 1080 kroner per måned. Gutten går i barnehage. Gro og Arne har en bil. De beregner de øvrige utgiftspostene ved å benytte seg av budsjettet til SIFO.

Bruk kalkulatoren til SIFO for å beregne de utgiftspostene som ikke er oppgitt. Sett opp et månedsbudsjett i et regneark.

Kalkulatoren finnes her: <http://kalkulator.referansebudsjett.no/>

Vi legger opplysningene inn i SIFO budsjettet. Der skal vi også legge inn brutto årsinntekt.

## SIFOs Referansebudsjett

Person 1: Kvinne 20-50 Gravid? Nei

Person 2: Mann 20-50

Person 3: Kvinne 4-5 Barnehage? Nei

Person 4: Mann 3 Barnehage? Ja

Person 5: Velg kjønn Velg alder

Person 6: Velg kjønn Velg alder

Person 7: Velg kjønn Velg alder

Hvis du har barn i barnehage eller SFO, må også husholdets samlede brutto årsinntekt oppgis.

Brutto årsinntekt: Over 353 481 kroner

Antall biler i husstanden? 1

Vis resultatet

Tøm skjema

## Månedlige utgifter for hele husholdet

Person 1: Kvinne 20 til 50 år.

Person 2: Mann 20 til 50 år.

Person 3: Jente 4 til 5 år.

Person 4: Gutt 3 år som går i barnehagen.

### Individspesifikke utgifter

Mat og drikke	5 832
Klær og sko	1 920
Personlig pleie	1 272
Lek og fritid	2 496
Reise (kollektivt)	1 700
Spedbarnsutstyr	0
Sum	13 220

Stordriftsfordel 20 % reduksjon

### Husholdsspesifikke utgifter

Andre dagligvarer	500
Husholdningsartikler	570
Møbler	580
Telefon, mediebruk og diverse fritidsartikler	1 690
Bil (drift og vedlikehold)	2 280
Barnehage	2 368
Aktivitetsskole (SFO)	0
Sum	7 988

### Totalt forbruk

Totalt summert månedlig forbruk for hele husholdningen	21 208
--	--------

Vi lager et Excel ark hvor vi legger inn inntekter og utgifter.

	A	B
1	<b>Inntekt:</b>	
2	Lønn	kr 30 440,00
3	Barnetrygd	kr 3 000,00
4	<b>Sum inntekter</b>	<b>kr 33 440,00</b>
5		
6	<b>Utgifter:</b>	
7	Mat og drikke	kr 5 832,00
8	Klær og sko	kr 1 920,00
9	Personlig pleie	kr 1 272,00
10	Lek og fritid	kr 2 496,00
11	Reise (kollektivt)	kr 1 700,00
12	Spedbarnsutstyr	kr -
13	Andre dagligvarer	kr 500,00
14	Husholdningsartikler	kr 570,00
15	Møbler	kr 580,00
16	Telefon, mediebruk og fritidsartikler	kr 1 690,00
17	Bil (drift og vedlikehold)	kr 2 280,00
18	Barnehage/SFO	kr 2 368,00
19	Lån og avdrag/leie	kr 7 000,00
20	Forsikring	kr 792,00
21	Strøm	kr 1 080,00
22	Kommunale avgifter	kr -
23	<b>Sum utgifter</b>	<b>kr 30 080,00</b>
24		
25	Balanse	kr 3 360,00

Formler:

	A	B
1	<b>Inntekt:</b>	
2	Lønn	30440
3	Barnetrygd	3000
4	<b>Sum inntekter</b>	<b>=SUMMER(B2:B3)</b>
5		
6	<b>Utgifter:</b>	
7	Mat og drikke	5832
8	Klær og sko	1920
9	Personlig pleie	1272
10	Lek og fritid	2496
11	Reise (kollektivt)	1700
12	Spedbarnsutstyr	0
13	Andre dagligvarer	500
14	Husholdningsartikler	570
15	Møbler	580
16	Telefon, mediebruk og fritidsartikler	1690
17	Bil (drift og vedlikehold)	2280
18	Barnehage/SFO	2368
19	Lån og avdrag/leie	7000
20	Forsikring	792
21	Strøm	1080
22	Kommunale avgifter	0
23	<b>Sum utgifter</b>	<b>=SUMMER(B7:B22)</b>
24		
25	Balanse	=B4-B23

## Oppgave 22

Hanne er 40 år og Ola er 39 år. De er gift og har 3 barn, tvilling jenter på 10 år og en gutt på 4 år. Jentene har halvdagsplass på SFO og gutten er i barnehage. Hanne er sykepleier og får utbetalt 21 225 kroner per måned. Nils er også sykepleier og får utbetalt 22 315 kroner pr måned. De mottar barnetrygd på 4500 kroner i måneden. De har ingen andre inntekter.

De bor i en leilighet. Hver måned betaler de 16 000 kroner i husleie. I forsikringer betaler de 750 kroner per måned. Strømutgiftene er på 1250 kroner per måned. Hanne og Ola har to biler. Denne måneden skal den ene bilen på verksted. Reparasjonen er beregnet til 15 000 kroner. De beregner de øvrige utgiftspostene ved å benytte seg av budsjettet til SIFO.

Bruk kalkulatoren til SIFO for å beregne de utgiftspostene som ikke er oppgitt. Sett opp et månedsbudsjett i et regneark.

## 5. Regning med prisindekser

### 5.1 Hva er en prisindeks?

Prisen på de fleste varetyper forandrer seg ofte. Som regel øker de fra år til år. Ofte vil det være interessant å sammenligne prisen på en vare med prisen på samme vare i et bestemt år. I oppgaver i 1P har det vanligvis vært sammenlignet med prisen i 1998. Vi kaller 1998 for *basisåret*. Prissammenligninger lages av Statistisk Sentralbyrå, og for mange prisindekser bruker de nå 2000 som basisår.

*En prisindeks gjelder for en type vare eller tjeneste.*

#### *Eksempel 18* Pris på H-melk

Pris på H-melk i 1998: 9,87 kr	Prisindeks H-melk i 1998: 100
Pris på H-melk i 2004: 10,70 kr	Prisindeks H-melk i 2004: 108,4

Endring i pris:  $10,70 \text{ kr} - 9,87 \text{ kr} = 0,83 \text{ kr}$

Endring i prosent:  $\frac{0,83}{9,87} = 0,084 \cdot 100\% = 8,4\%$

Prisen økte 8,4% fra basisåret 1998 til 2004.

Prisen i 2004 var  $100\% + 8,4\% = 108,4\%$  av prisen i basisåret

Istedenfor å si at prisen i 2004 var 108,4 % av prisen i 1998, sier vi at *prisindeksen* for H-melk var 108,4 i 2004 med 1998 som basisår.

*Prisindeksen for et bestemt år viser hvor mange prosent prisen dette året utgjorde av prisen i basisåret. Prisindeksen i basisåret blir da alltid 100.*

*Indekser oppgis med en desimal.*



### Oppgave 23

Prisindeksen for en vare var 190 i 2012, med 1998 som basisår. Hvor mange prosent hadde prisen på denne varen økt fra 1998 til 2012?

### 5.2 Indeksformelen

Vi kan bruke indeksformelen for å finne ukjent indeks eller ukjent pris.

#### Indeksformelen

$$\frac{\text{indeks i år 1}}{\text{indeks i år 2}} = \frac{\text{pris i år 1}}{\text{pris i år 2}}$$

Her kan «år 1» og «år 2» være hvilke som helst år. Hvis år 2 er basisåret, er indeksen 100.

Dette er en forholdslikning. Forholdet mellom indeksene er like stort som forholdet mellom prisene. Hvis prisen blir dobbelt så stor, for eksempel, blir indeksen også dobbelt så stor.

#### Eksempel 19

Tabellen viser prisutviklingen for kroneis.

År	1998	2005	2013
Pris/kr	13,00	15,00	?
Prisindeks	100	?	169,2

Da kan vi finne *prisindeksen* for kroneis i 2005 med indeksformelen. Vi bruker 1998 som basisår.

$$\frac{\text{indeks i 2005}}{100} = \frac{15,00}{13,00} \quad \text{som gir} \quad \text{indeks i 2005} = \frac{15,00 \cdot 100}{13,00} = 115,4$$

Vi kan finne prisen i 2013 med indeksformelen.

Det er lurt å skrive indeksformelen slik at den ukjente størrelsen kommer *over* brøkstreken på *venstre* side. Da får vi

$$\frac{\text{Pris i 2013}}{13,00} = \frac{169,2}{100} \quad \text{som gir} \quad \text{pris i 2013} = \frac{169,2 \cdot 13,00}{100} = 22,00 \text{ kr}$$

### Oppgave 24

Spagetti kostet 7,10 kr i 1998 og 11,20 kr i 2012. Hva var indeksen for spagetti i 2012 med 1998 som basisår?

### Oppgave 25

Indeks for kjeks var 116,0 i 2003 og 154,2 i 2012. I 2012 kostet kjeks 18,20 kr. Hva kostet kjeks i 2003?

Endring i prisindeks (i prosent) = endring i pris (i prosent)

### Eksempel 20

Prisindeksen på en vare i 2014 er 135,2. Prisindeksen i 2000 var 125,9 for den samme varen. Hvor mange prosent har prisen steget fra 2000 til 2014?

Endring i prisindeks:  $135,2 - 125,9 = 9,3$

Endring i prosent:  $\frac{9,3}{125,9} = 0,074 \cdot 100\% = 7,4\%$

### **Oppgave 26**

Tabellen viser prisutviklingen for en vare i perioden fra 1998 til 2004

År	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Prisindeks	100	103,4	105,3	107,2	108,9	110,5	109,6

- Hvilket år er basisåret?
  - Hvilken verdi har alltid indeksen i basisåret?
  - Hvor mange prosent har prisen på varen steget med fra 1998 til 2002?
  - Har prisen på denne varen steget hvert år fra 1998 til 2004?
- Prisen på varen i 1998 var 750 kr
- Finn prisen på varen i 2003.

### **5.3 Konsumprisindeksen**

*Konsumprisindeksen (kpi) er en slags gjennomsnittsindeks for mange vanlige varer og tjenester. Den beregnes av Statistisk sentralbyrå. Basisåret for kpi er 1998.*

Vi regner med kpi på samme måte som andre prisindekser.

Tabellen nedenfor viser kpi for noen år.

År	1950	1970	1990	1995	<b>1998</b>	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Kpi	7,4	17,9	83,7	94,2	<b>100</b>	105,5	110,1	113,3	117,7	123,1	128,8	131,4

Tabellen viser at en kurv med blandede varer som kostet 100 kr i 1998 ville kostet omtrent 17,90 kr i 1970 og 131,40 kr i 2012.

### Eksempel 21

Hvor mange prosent steg prisene i gjennomsnitt fra 2000 til 2012?

Prisene steg like mange prosent som konsumprisindeksen.

Endring i prisindeks:  $131,4 - 105,5 = 25,9$

Endring i prosent:  $\frac{25,9}{105,5} = 0,245 \cdot 100\% = 24,5\%$

Prisene steg 24,5 % fra 2000 til 2012.



### Eksempel 22

I en artikkel i Aftenposten 17.1.2013 vises det en annonse for en oppvaskmaskin fra 1974. Maskinen kostet 2680 kr. I følge artikkelen tilsvarer dette 14 900 kr i dag. Stemmer dette?

Konsumprisindeksen var 23,6 i 1974 og 131,4 i 2012. Da kan vi sette opp og løse en likning:

$$\frac{\text{pris 2012}}{\text{pris 1974}} = \frac{\text{kpi 2012}}{\text{kpi 1974}}$$
$$\frac{\text{pris 2012}}{2680} = \frac{131,4}{23,6}$$
$$\text{pris 2012} = \frac{131,4 \cdot 2680}{23,6} = 14922$$

Påstanden i Aftenposten er riktig. En vanlig oppvaskmaskin koster mye mindre enn dette i dag og derfor kan vi at oppvaskmaskiner er billigere nå enn i 1974.

### Oppgave 27

- Hvor mange prosent steg prisene i gjennomsnitt fra 1998 til 2012?
- Hvor mange prosent steg prisene i gjennomsnitt fra 1990 til 2012?
- Hvor mange prosent steg prisene i gjennomsnitt fra 1950 til 2012?

### Oppgave 28

I 1952 kostet tegneseriebladet Donald Duck 0,80 kr. Ifølge Aftenposten tilsvarer dette omtrent 11,50 kr i 2012. Stemmer dette? Kpi i 1952 var 9,2 og i 2012 131,4. (I dag koster et Donald-blad 38,90 kr.)

## 5.4 Reallønn

Vi tenker oss at en person hadde en timelønn på 10 kr i 1960 og at en bukse kostet 40 kr den gangen. I 2014 er timelønna 200 kr og en tilsvarende bukse koster 400 kr.

Vi ser fort at en person i 1960 måtte arbeide 4 timer for å få råd til buksa, mens en person i 2014 bare måtte jobbe i 2 timer. Altså har vi bedre råd (kjøpekraft) i dag enn i 1960.

For å ha samme kjøpekraft må timelønna ha økt like mange prosent som kpi.

Den lønna som står på lønns slippen (før skatt) kalles *nominell lønn* eller bare lønn. For raskt å se om en økning i årslønna kan føre til økt kjøpekraft, har noen funnet opp begrepet *reallønn*.

*Reallønna i for eksempel 2012 er den lønna man måtte hatt i 1998 for å kunne kjøpt like mye i 1998 som i 2012. Fordi konsumprisindeksen alltid har økt fra et år til neste år, vil reallønna i alle år etter 1998 være mindre enn den nominelle lønna.*

Sammenhengen mellom lønn og reallønn er:

$$\frac{\text{lønn i år 1}}{\text{reallønn i år 1}} = \frac{\text{kpi i år 1}}{100}$$

### Eksempel 23

Mona hadde en reallønn på 350 000 kr i 2012. Hvilken lønn hadde hun i 2012?

$$\frac{\text{lønn i 2012}}{\text{reallønn i 2012}} = \frac{\text{kpi i 2012}}{100}$$

$$\frac{\text{lønn i 2012}}{350000} = \frac{131,4}{100}$$

$$\text{lønn i 2012} = \frac{131,4 \cdot 350000}{100}$$

$$\text{lønn i 2012} = 460\,000 \text{ kr}$$

Hvis vi kjenner lønna og skal regne ut reallønna, er det lurt å snu likningen på hodet for da kommer den ukjente fremdeles over brøkstreken

$$\frac{\text{reallønn i år 1}}{\text{lønn i år 1}} = \frac{100}{\text{kpi i år 1}}$$

### Eksempel 24

Jonas hadde en nominell lønn på 390 000 kr i 2010. Hvilken reallønn hadde han i 2010?

$$\frac{\text{reallønn i 2010}}{\text{lønn i 2010}} = \frac{100}{\text{kpi i 2010}}$$

$$\frac{\text{reallønn i 2010}}{390000} = \frac{100}{128,8}$$

$$\text{reallønn i 2010} = \frac{100 \cdot 390000}{128,8}$$

$$\text{reallønn i 2010} = 302\,800 \text{ kr}$$

### **Oppgave 29**

- a) Lise tjente 470 000 kr i 2011. Hvor stor var reallønna hennes? Kpi i 2011 var 130,4.  
b) Irvins reallønn var 365 200 kr i 2011. Hvor stor var den nominelle lønna hans?

### **5.5 Kjøpekraft**

Hvis vi sammenlikner reallønna fra et år til et annet, kan vi se om vi har fått bedre råd eller ikke.

*Økt reallønn betyr økt kjøpekraft (vi har fått bedre råd)*

*Lavere reallønn betyr lavere kjøpekraft (vi har fått dårligere råd).*

Det betyr at selv om vi har fått lønnsøkning (økt nominell lønn), så er det ikke sikkert at vi har fått bedre råd! Det kan hende at prisene (kpi) har steget mere enn lønna vår.

### Eksempel 25

Ayses lønn var 335 000 kr i 2005. Hva måtte hun tjent i 2012 for at kjøpekraften skulle vært den samme som i 2005? Kpi i 2005 var 115,1.

Samme kjøpekraft betyr samme reallønn. Vi finner først Ayses reallønn i 2005.

$$\frac{\text{reallønn i 2005}}{\text{lønn i 2005}} = \frac{100}{\text{kpi i 2005}}$$

$$\frac{\text{reallønn i 2005}}{335000} = \frac{100}{115,1}$$

$$\text{reallønn i 2005} = \frac{100 \cdot 335000}{115,1}$$

$$\text{reallønn i 2005} = 291050 \text{ kr}$$

Så finner vi hvilken lønn i 2012 som gir en reallønn på 291 050 kr:

$$\frac{\text{lønn i 2012}}{\text{reallønn i 2012}} = \frac{\text{kpi i 2012}}{100}$$

$$\frac{\text{lønn i 2012}}{291050} = \frac{131,4}{100}$$

$$\text{lønn i 2012} = \frac{131,4 \cdot 291050}{100}$$

$$\text{lønn i 2012} = 382400 \text{ kr}$$

### Eksempel 26

Bilal hadde en timelønn på 160 kr i 2008. Hvilken timelønn måtte han hatt i 2012 for å ha samme kjøpekraft som i 2008?

Dette er samme type oppgave som i eks. 19, men her bruker vi en raskere metode for å løse den.

For å ha samme kjøpekraft må timelønnen ha økt like mange prosent som kpi. Da kan vi sette opp en forholdslikning:

$$\frac{\text{timelønn i 2012}}{\text{timelønn i 2008}} = \frac{\text{kpi i 2012}}{\text{kpi i 2008}}$$
$$\frac{\text{timelønn i 2012}}{160} = \frac{131,4}{123,1}$$

$$\text{timelønn i 2012} = \frac{131,4 \cdot 160}{123,1} = 170,8$$

Bilal måtte hatt en timelønn på ca. 171 kr i 2012 for å ha samme kjøpekraft som i 2008.

### **Oppgave 30**

a) Lenes lønn var 410 000 kr i 2008. Hva måtte hun tjent i 2012 for at kjøpekraften skulle vært den samme som i 2008? Bruk metoden i eksempel 22 eller 23.

b) Robert hadde en timelønn på 140 kr i 2006. Hvilken timelønn måtte han hatt i 2012 for å ha samme kjøpekraft som i 2006? Bruk metoden i eksempel 22 eller 23.

### **Oppgave 31**

Jan hadde deltidsarbeid i 2010 og hadde da en reallønn på 100 000 kr. Hva måtte den nominelle lønna hans vært i 2012 for å beholde samme kjøpekraft som i 2010?

Løs denne oppgaven uten kalkulator!

## Eksamensoppgaver

### E1

Del 2, høst 2013)

Jonny er rørlegger. Han har en timelønn på 215 kroner. Jonny betaler 2 % av bruttolønna til en pensjonskasse.

I tillegg betaler han hver måned 250 kroner i fagforeningskontingent.

En måned arbeidet Jonny 150 timer.

a) Hvor mye betalte Jonny til pensjonskassen denne måneden?

Jonny har tabelltrekk. Se nedenfor.

### Trekktabell 7100 for 2013, månedslønn

Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk
30 100	9 294	30 600	9 500	31 100	9 707	31 600	9 914	32 100	10 120
30 200	9 335	30 700	9 542	31 200	9 748	31 700	9 955	32 200	10 162
30 300	9 376	30 800	9 583	31 300	9 790	31 800	9 996	32 300	10 203
30 400	9 418	30 900	9 624	31 400	9 831	31 900	10 038	32 400	10 244
30 500	9 459	31 000	9 666	31 500	9 872	32 000	10 079	32 500	10 286

b) Hvor mye betalte han i skatt denne måneden?

### E2

(Del 2, vår 2013)

Ole arbeider på et mekanisk verksted. Han har en timelønn på 195 kr innenfor vanlig arbeidstid. Nedenfor ser du hvor mange timer han arbeidet en måned.

Arbeid	Antall timer
Vanlig arbeidstid	150
Overtid med 50 % tillegg	16
Overtid med 100 % tillegg	6

a) Bestem bruttolønna til Ole denne måneden.

Ole betaler 2 % av bruttolønna til en pensjonskasse.

b) Hvor mye betalte Ole til pensjonskassen denne måneden?

Ole betaler 36 % skatt.

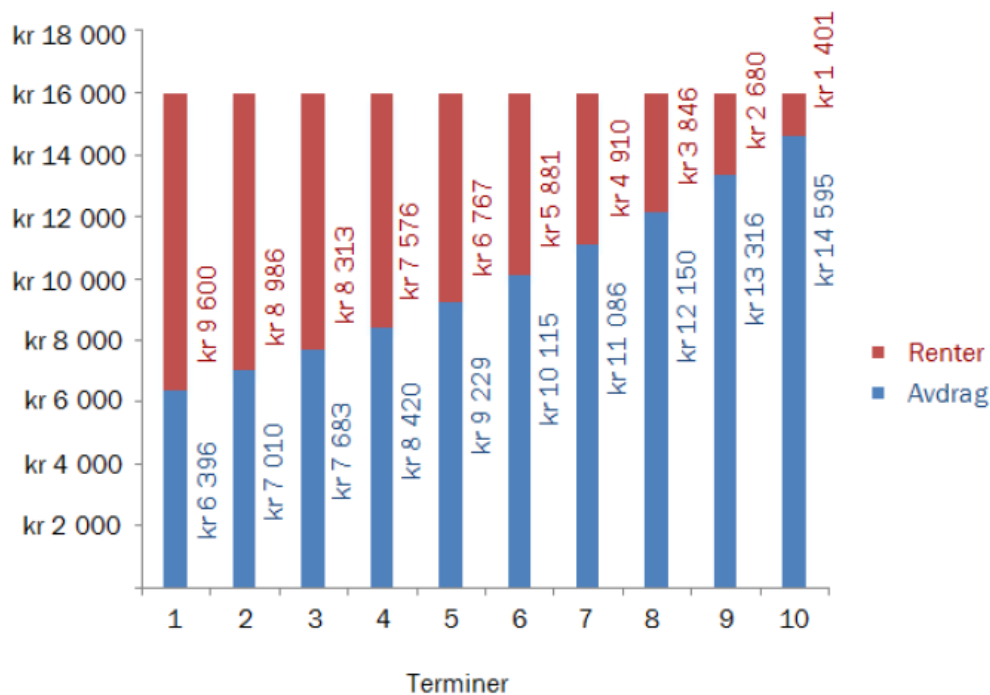
c) Hvor mye fikk Ole utbetalt etter at skatten var trukket fra, denne måneden?

En periode arbeidet Ole med et prosjekt på kveldstid. For timene han brukte på dette prosjektet fikk han overtid med 50 % tillegg. Han fikk utbetalt 5045 kr for dette arbeidet.

d) Hvor mange timer arbeidet han med prosjektet?

### E3

(Del 2, vår 2013)



Ovenfor ser du nedbetalingsplanen for et lån som betales ned i løpet av 10 terminer. Hver termin er 1 år. Renten i prosent er den samme i hele nedbetalingsperioden.

- Forklar hvilken type lån dette er.
- Hvor stort er det totale lånebeløpet?
- Hvor mange prosent er renten på?

### E4

(Del 2, høst 2012)

Sindre er lærling. Han har en timelønn på 90 kroner. Ved overtid får han et tillegg på 60 %. Sindre betaler 18 % skatt av alt han tjener.

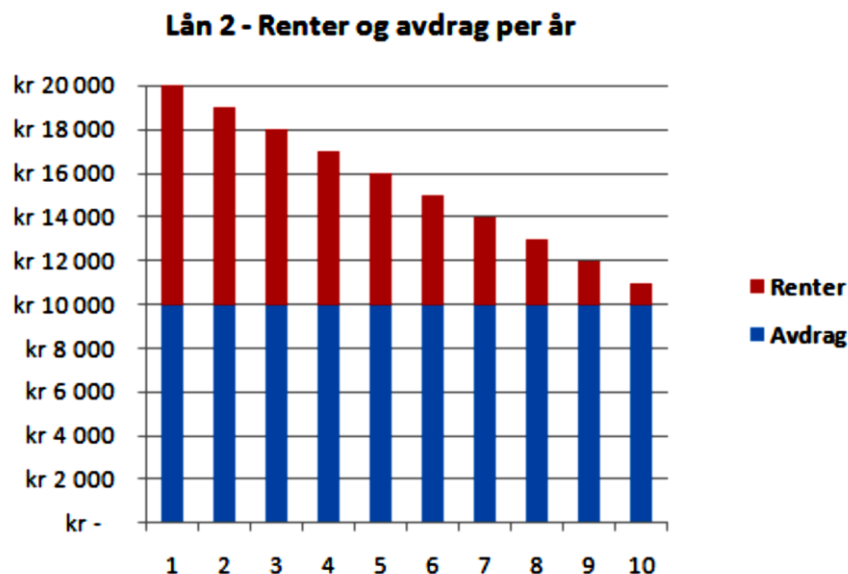
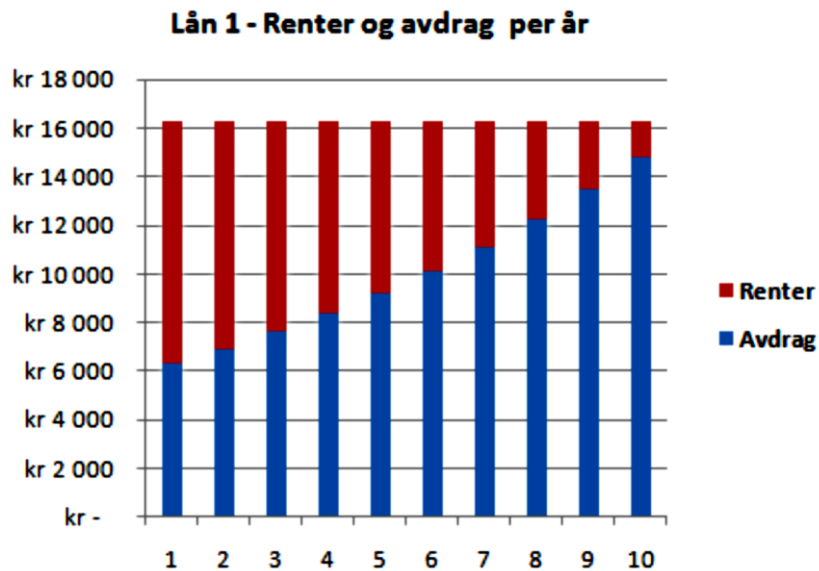
En måned arbeidet Sindre 160 timer. 10 av disse timene var overtid.

Hvor mye betalte Sindre i skatt denne måneden?

## E5

(Del 1, Høst 2011)

Jonas trenger 100 000 kroner. Han går i banken og får tilbud om to ulike typer lån. Hvert av lånene har en rentefot på 10,0 % per år. Lånene skal nedbetales over 10 år, med én innbetaling per år. Nedenfor ser du en nedbetalingsplan for hvert av lånene.



- Hva kaller vi et lån som nedbetales slik nedbetalingsplanen for Lån 1 viser, og hva kaller vi et lån som nedbetales slik nedbetalingsplanen for Lån 2 viser? Hva kjennetegner hver av disse to typene lån?
- Forklar hvorfor renteutgiftene for Lån 2 avtar med 1000 kroner per år. Hvor mye må Jonas totalt betale tilbake til banken for dette lånet?
- For hvilket lån må Jonas totalt betale mest tilbake til banken? Hvorfor må han betale mer for dette lånet, selv om rentefoten for de to lånene er den samme?



## E6

(Del 2, Høst 2011)

Nedenfor er det en oversikt som viser hvordan skatt kan beregnes.

**Enkel skatteberegning**

Personinntekt er det en person tjener i løpet av et år.

**Noen viktige tall:**

Alminnelig inntekt:	Personinntekt minus 72 800 kroner
Grunnlaget for toppskatt:	Personinntekt minus 456 900 kroner *
Nettolønn:	Personinntekt minus skatt

**Skatteberegning:**

Inntektsskatt	28 % av alminnelig inntekt
Trygdeavgift	7,8 % av personinntekt
Toppskatt	9 % av grunnlaget for toppskatt
<b>Skatt totalt</b>	<b>Summen av de tre skattene ovenfor</b>

\* Dersom personinntekten er lavere enn 456 900 kroner, beregnes det ikke toppskatt.

Erik og Elin er lektorer. Erik er nyutdannet og tjener 409 700 kroner i året. Elin har jobbet mange år i skolen og tjener 518 000 kroner i året.

- Regn ut nettolønnen til Erik og nettolønnen til Elin.
- Hvor mange prosent av personinntekten betaler hver av dem i skatt?

I lokale lønnsforhandlinger får begge et lønnstillegg på 20 000 kroner.

- Hvor mange prosent av lønnstillegget må hver av dem betale i skatt?

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen (KPI) for 2007 og 2010.

År	2007	2010
KPI	118,6	128,8

I 2007 tjente Elin 441 300 kroner.

- Hvor mye ville Elin tjene i 2010 dersom reallønnen hennes ikke hadde endret seg fra 2007 til 2010?

## E7

(Del 2, Vår 2011)

Lisa syr kjoler. Som lønn får hun 300 kroner for hver kjole hun syr. En dag rakk hun å sy fem kjoler.

Berit arbeider ved et pleiehjem. En dag arbeidet hun 9 timer og fikk 1400 kroner i lønn.

Dino bor i Italia. Han selger sko. Som lønn får han 13 % av det han selger for. En dag solgte han sko for 1100 euro. 1 euro kostet denne dagen 8,40 kroner.

Teksten ovenfor viser at det finnes ulike måter å beregne lønn på.

- a) Hva kaller vi måtene lønnen til Lisa og Dino blir beregnet på?  
Hva kjennetegner hvert av disse to lønssystemene?
- b) Hvem av de tre tjente mest denne dagen?

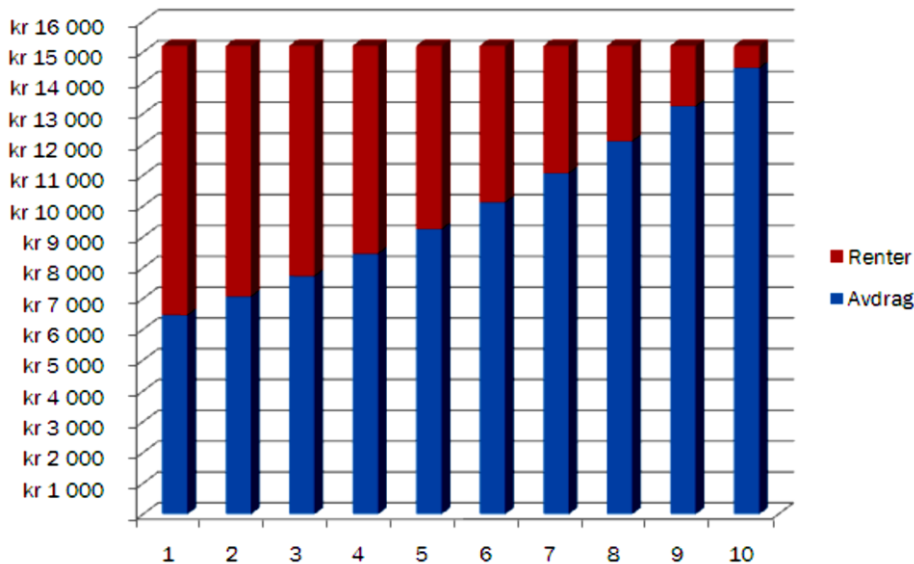
1,5 av de timene Berit jobbet denne dagen, var overtid. Hun får 50 % ekstra i lønn per time når hun jobber overtid.

- c) Hva var timelønnen til Berit?

## E8

(Del 1, vår 2010)

Tor har tatt opp et lån i banken. Diagrammet nedenfor viser hvor mye han skal betale i renter og avdrag de 10 første årene.



- Forklar hvordan du ut fra diagrammet kan se om Tor har tatt opp et annuitetslån eller et serielån.
- Omtrent hvor stor del av det Tor skal betale på lånet det første året, er renter?

## E9

(Del 2, vår 2010)

Ola skal bygge hus. Huset vil koste 2 300 000 kroner. Han har 150 000 kroner i banken. Resten må han låne. I Husbanken får han låne 80 % av det huset vil koste. Renten i Husbanken er 4 % per år. Resten av pengene må han låne i en privat bank til 6 % rente per år.

- Hvor mye penger får Ola låne i Husbanken, og hvor mye må han låne i den private banken?
- Hvor mange kroner må han til sammen betale i renter i Husbanken og den private banken det første året?

Ola kan trekke fra 28 % av rentekostnadene på skatten. Dette kalles et skattefradrag.

- Hvor store blir renteutgiftene til Ola det første året, dersom vi tar hensyn til skattefradraget?

**E10**

(Eksamen vår 2011 Del 1)

I 2008 kostet en vare 550 kroner. Indeksen for denne varen var da 110. I 2010 kostet varen 600 kroner.

Hva var indeksen for varen i 2010?

**E11**

(Eksamen høst 2010 Del 2)

År	KPI	Pris per liter bensin 95 blyfri
2001	108,7	9,30
2002	110,1	8,89
2003	112,8	9,12
2004	113,3	9,70
2005	115,1	10,63
2006	117,7	11,46
2007	118,6	11,68
2008	123,1	12,53
2009	125,7	11,91

Tabellen ovenfor viser konsumprisindeksen (KPI) og prisen per liter bensin i årene fra 2001 til 2009.

- a) Hvor mange prosent økte bensinprisen med fra 2001 til 2009? Sammenlikn årene 2001 og 2009.
- b) Hva ville bensinprisen vært i 2009 dersom den hadde utviklet seg på samme måte som konsumprisindeksen?  
En journalist skriver at bensinen var ca. 11 % dyrere i 2009 i forhold til i 2001 dersom vi tar hensyn til konsumprisindeksen.
- c) 🤔 Vis hvordan journalisten har kommet fram til dette.

**E12**

(Eksamen 1P, vår 2014, del 2)

I 1990 kostet 600 g kjøttdeig 31 kroner. I 2012 kostet 350 g kjøttdeig 24 kroner.

- a) Hvor mye kostet ett kilogram kjøttdeig i 1990?  
Hvor mye koste ett kilogram kjøttdeig i 2012?
- b) Hvor mange prosent økte prisen per kilogram fra 1990 til 2012?  
I 1990 var konsumprisindeksen 83,7.  
I 2012 var konsumprisindeksen 131,4
- c) Hva ville ett kilogram kjøttdeig ha kostet i 2012 dersom prisutviklingen hadde fulgt konsumprisindeksen fra 1990 til 2012?

**E13**

(Eksamen 1P, vår 2016, del 2)

I regnearket nedenfor har vi lagt inn timelønn, skatteprosent og antall timer Sara, Vilde og Peder arbeidet i juli.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid			
6	Lønn for overtidсарbeid			
7	Bruttolønn			
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,3 %		

- a) Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formler i de blå cellene og beregne bruttolønn, skattetrekk og nettolønn.

Sara har regnet at hun i gjennomsnitt betalte 20,3% i skatt av bruttolønnen hun hadde i juli. Hun har derfor satt opp at hun har en gjennomsnittlig skatteprosent på 20,3.

- b) Vis hvilke beregninger Sara har gjort. Legg inn formler i de røde cellene i siste rad i regnearket fra oppgave a), slik at du også får med gjennomsnittlig skatteprosent for Vilde og Peder.

**E14**

(Eksamen 1P vår 2014 Del 1)

Et år hadde Marit en nominell lønn på 600 000 kroner. Dette tilsvarte en reallønn på 500 000 kroner.

Bestem konsumprisindeksen dette året.

**E15**

(Eksamen høst 2011 Del 1)

I løpet av noen år steg Gretes lønn fra 160 kroner per time til 184 kroner per time.

1) Hvor mange prosent steg lønnen?

Konsumprisindeksen (KPI) var 100 det året Grete tjente 160 kroner per time.

2) Hva var konsumprisindeksen det året Grete tjente 184 kroner per time, dersom vi antar at hun hadde samme reallønn de to årene?

**E16**

(Eksamen høst 2012 Del 1)

Eli hadde en nominell lønn på 500 000 kroner i basisåret. Et annet år var konsumprisindeksen 120.

Hvor mye måtte Eli ha tjent dette året dersom hun skulle hatt samme kjøpekraft som i basisåret?

**E17**

(Eksamen høst 2012 Del 2)

**1 Nye eneboliger, prisindeks**

År og kvartal	Indeks
1989	68,5
1990	66,1
1991	64,2
1992	64,1
1993	62,3
1994	65,1
1995	70,4
1996	74,0
1997	77,3
1998	84,2
1999	91,9
2000	100,0
2001	107,8
2002	115,2
2003	119,7
2004	123,1
2005	132,4
2006	139,7
2007	155,9
2008	169,1
2009	174,4
2010	177,2

Kilde: <http://www.ssb.no/eneboliger/till-2012-01-03-01.html> (26.03.2012)


Tabellen ovenfor viser prisindeksen for eneboliger i perioden fra 1989 til 2010.

- a) Hvor mange prosent har verdien på en enebolig økt med fra 1989 til 2010 ifølge indeksene i tabellen ovenfor?

Familien Hansen kjøpte en enebolig for 1 700 000 kroner i år 2000.

- b) Hvor mye ville en tilsvarende bolig kostet i 2006 dersom prisen hadde fulgt indeksen?

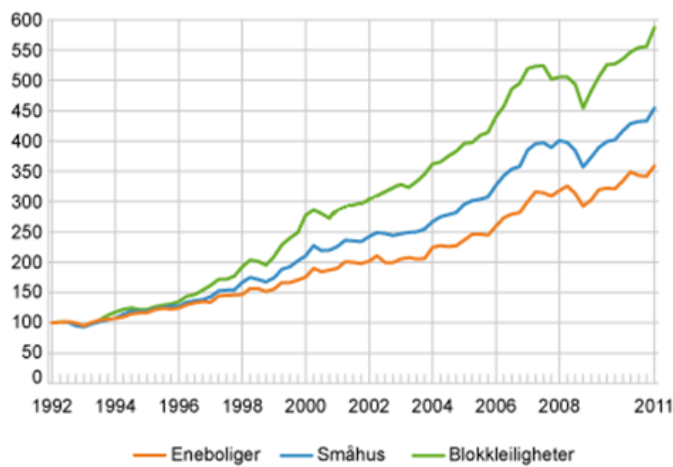
I 2010 solgte familien Hansen boligen for 3 400 000 kroner. Sønnen i huset mente at de da hadde tjent 1 700 000 kroner på salget av huset, mens faren påsto at de egentlig ikke hadde tjent mer enn ca. 400 000 kroner på salget.

- c)  Gjør beregninger og forklar hvordan faren har kommet fram til dette.

## E18

(Eksamen vår 2012 Del 2)

Boligprisindeksen, etter boligtype



Kilde: <http://www.ssb.no/vis/bpi/arkiv/fig-2011-04-14-01.html>  
(04.09.2011)

(Den øverste grafen er grønn og den nederste er rød.)

Diagrammet ovenfor viser boligprisindeksen i Norge for blokkleiligheter, småhus og eneboliger fra begynnelsen av 1992 til begynnelsen av 2011.

- a) Etter hvor mange år var verdien av de ulike boligtypene dobbelt så stor som verdien i begynnelsen av 1992?

Verdien av en enebolig var 1,35 millioner kroner i begynnelsen av 1992. Vi antar at verdien av denne boligen har fulgt boligprisindeksen.

- b) Hva var verdien av boligen i begynnelsen av 2004?

- c) 🤔 Hva ville indeksen for eneboliger vært i begynnelsen av 1992 dersom vi hadde brukt 1998 som basisår?

- d) 🤔 Er det riktig å si at verdien av en blokkleilighet steg med omtrent dobbelt så mye som verdien av en enebolig de ti første årene etter 1992?  
Begrunn svaret ditt.



### E19

(Eksamen høst 2010 Del 2)

Tabellen nedenfor viser konsumprisindeksen (KPI) for de tre siste årene.

År	2007	2008	2009
KPI	118,6	123,1	125,7

I 2008 hadde Sondre en reallønn på 1 000 000 kroner.

Hvor mye måtte Sondre hatt i nominell lønn i 2009 hvis han skulle beholdt samme kjøpekraft som i 2008?

### E20

(Eksempeloppgave eksamen 2015 del 2)

Tommy har en ordinær timelønn på 168 kr.

En måned arbeidet han 37,5 timer innenfor ordinær arbeidstid, 10 timer med et overtidstillegg på 50 % og 4 timer med et overtidstillegg på 100 %.

Tommy har et pensjonstrekk på 2 %, og han betaler 1,4 % i fagforeningskontingent. Han har prosentkort og betaler 36 % skatt.

Fagforeningskontingenten trekkes av bruttolønn, men det skal ikke trekkes pensjon av lønn for overtidsarbeid.

- a) Lag et regneark som beregner Tommys nettolønn denne måneden.  
Vis hvilke formler du har brukt.

Tina har en ordinær timelønn på 172 kr.

En måned arbeidet hun 37,5 timer innenfor ordinær arbeidstid, 13 timer med et overtidstillegg på 50 % og 15 timer med et overtidstillegg på 100 %.

Tina har et pensjonstrekk på 2 %, og hun betaler 200 kr i fagforeningskontingent. Hun har prosentkort og betaler 42 % skatt.

Det skal ikke trekkes pensjon av lønn for overtidsarbeid.

- b) Gjør endringer i regnearket fra oppgave a) slik at det også kan brukes til å bestemme Tinas nettolønn denne måneden.

## E21

(Eksempeloppgave eksamen 2015 del 2)

Geir oppretter en konto i banken. Han setter inn 60 000 kr. Pengene skal stå urørt i 10 år.

Nedenfor ser du et regneark som viser hvor mye Geir vil ha på kontoen ved begynnelsen og slutten av hvert år dersom renten er 5 % per år.

	A	B	C	D	E
1					
2	Sparebeløp	kr 60 000,00			
3	Rente per år (%)	5		Vekstfaktor	1,05
4	Antall år	10			
5					
6					
7	År	Begynnelsen av året	Slutten av året		
8	1	kr 60 000,00	kr 63 000,00		
9	2	kr 63 000,00	kr 66 150,00		
10	3	kr 66 150,00	kr 69 457,50		
11	4	kr 69 457,50	kr 72 930,38		
12	5	kr 72 930,38	kr 76 576,89		
13	6	kr 76 576,89	kr 80 405,74		
14	7	kr 80 405,74	kr 84 426,03		
15	8	kr 84 426,03	kr 88 647,33		
16	9	kr 88 647,33	kr 93 079,69		
17	10	kr 93 079,69	kr 97 733,68		
18					

- Lag et regneark som vist ovenfor. Her skal Geir kunne legge inn sparebeløp og rente i de lyseblå cellene. Du skal sette inn formler i de mørkeblå cellene. Vis hvilke formler du har brukt.
- Utvid regnearket fra oppgave a) og bestem hvor lang tid det vil ta før Geir har 150 000 kroner på kontoen dersom sparebeløpet er 60 000 kroner og renten er 5 % per år.
- Løs oppgave b) ved hjelp av en graftegner.

For 5 år siden stod det 60 000 kr på en konto med en fast prosentvis årlig rente. Kontoen har stått urørt. I dag står det 75 201,21 kroner på kontoen.

- Bestem den prosentvise årlige renten.

## Fasit øvingsoppgaver

- Oppgave 1 8437,50 kr  
Oppgave 2 192,56 kr/t  
Oppgave 3 a) 1620 kr b) 162 kr/t  
Oppgave 4 3960 kr  
Oppgave 5 22087,50kr  
Oppgave 6a) 160kr/t b) 30 000 kr  
Oppgave 7a) 160kr/t b) 400kr/t  
Oppgave 8 790kr  
Oppgave 9 360 kr/t  
Oppgave 10 a) 2925 kr b) 195 kr/t  
Oppgave 11 27 500 kr  
Oppgave 12 2050 kr  
Oppgave 13 a) 5000 kr b) 3000 kr  
Oppgave 14 17820 kr  
Oppgave 15 a) 570 kr b) 427,50 kr c) 27502,50 kr d) 7700,70 kr e) 19801,80 kr  
Oppgave 16 4106 kr  
Oppgave 17 a) 1. året: 25 000 kr Totalt: 115 000 kr b) 1. året: 23 097 kr Totalt: 115 485 kr  
Oppgave 18 Ingen fasit (Excelark)  
Oppgave 19 a) 22,4 % b) 55039 kr  
Oppgave 20 a) 33785 kr b) 26,8 % c) 77612 kr  
Oppgave 21 Individuelle svar  
Oppgave 22 Brutto årsinntekt inn i SIFO budsjettet: 522 480 kr. Balanse + 6724 kr  
Oppgave 23 90 %  
Oppgave 24 157,7
- Oppgave 25 13,70 kr  
Oppgave 26 a) 1998 b) 100 c) 8,9 % d) Nei, prisen gikk ned fra 2003 til 2004 e) 828,75 kr  
Oppgave 27 a) 31,4 % b) 57,0 c) 1677 %  
Oppgave 28 Ja (11,43 kr)  
Oppgave 29 a) 360 430 kr b) 476 220 kr  
Oppgave 30 a) 437 644 kr b) 156,30 kr  
Oppgave 31 131 400 kr

## Fasit eksamensoppgaver

- E1 a) 645 kr b) 9 790 kr (31 355 kr rundes ned til 31 300 kr. Les deretter av tabellen)  
E2 a) 36 270 kr b) 725,40 kr c) 22 748,54 kr d) 17 timer  
E3 a) Annuitetslån b) 100 000 kr c) 9,6 %  
E4 2 689,20 kr  
E5 a) Lån 1 = annuitetslån og lån 2 = Serielån. I et annuitetslån er hvert terminbeløp likt. I et serielån synker terminbeløpene etter hvert. b) 10 % av 10 000 kr = 1000 kr. Totalt 155 000 kr. c) Lån 1 (mer enn 160 000 kr). Betaler mer fordi avdragene utgjør mindre i starten, og rentene mer. Totalt sett mer renter.  
E6 a) Erik: 283 411 kr Elin: 347 441 kr b) Erik: 31 % Elin: 33 % c) Erik: 35,8 % Elin: 44,8 % d) 479 253 kr  
E7 a) Lisa: Akkordlønn. Dino: Provisjonslønn Akkordlønn: Betales per oppdrag. Provisjonslønn: Betales en del av total inntjening b) Lisa (1500 kr) c) 143,50 kr

E8a) Annuitetslån. Alle terminbeløp er like. b)  $\frac{9000}{15000} = \frac{3}{5} = 60\%$

E9a) Husbanken: 1 840 000 kr. Privat bank: 310 000 kr b) Husbanken: 73 600 kr. Privat bank: 18 600 kr c) 66 384 kr (Skattefradraget er 25 816 kr)

E10 120

E11a) 28,1 % b) 10,75 kr per liter

E12a) 51,67 kr per kg 68,57 kr per kg b) 32,7 % c) 81,12 kr per kg

E13

E14 120

E151) 15 % 2) 115

E16600 000 kr

E17a) 158,7 % b) 2 375 000 kr

E18a) Enebolig 10 år (2002), småhus 8 år (2000), blokkleilighet 6 år (1998) b) ca. 3,0 millioner c) 66,7

E19 1 257 000 kr

E20 a) 6333,25 kr b) 8488,30 kr

E21a) i celle C8 skal det stå: B8\*\$E\$3. I celle C9 skal det stå: B9\*\$E\$3 osv. (bruk absolutt cellereferanse) b) og c) I løpet av det 19. året d) 4,6

# Kapittel 8. Funksjoner



## Mål for Kapittel 8, Funksjoner.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- redegjøre for begrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt
- oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner
- undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å fastsette nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultatene

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva en lineær- og polynomfunksjon er
- hva nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt er og hvordan jeg finner det ved hånd og ved bruk av grafisk verktøy
- hvordan grafisk fremstille en funksjon både for hånd og ved bruk av digitale verktøy
- hvilken informasjon en grafisk fremstilling av en funksjon skal inneholde
- hvordan jeg finner stigningstall og konstantledd i en funksjon

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan jeg finner stigningstallet og konstantleddet til en lineær funksjon
- hva en funksjon fremstiller
- hvorfor en grafisk fremstilling må inneholde noe grunnleggende informasjon utover funksjonen

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- tolke en funksjon, både ved funksjonsuttrykk og grafisk
- forklare de praktiske betydningene av en funksjon
- lage og løse sammensatte tekstoppgaver knyttet til funksjoner
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Måle og presentere

I denne oppgaven skal dere jobbe i par. Dere skal utføre, måle og notere. Bli enige om hvem som gjør hva.

Dere skal måle (enten vekten eller lengden) av ulikt antall gjenstander du får av læreren din. Deretter skal dere presentere resultatene for resten av klassen. Dette skal dere gjøre ved å

- fylle ut tabellen nedenfor til venstre
- fremstille resultatene i et koordinatsystem dere får av læreren
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

Måle:	
Antall	Måltall i
0	
1	
2	
3	
4	

Måle:	
Antall	Måltall i
0	
1	
2	
3	
4	

Deretter får dere en startverdi av læreren din. Dere skal nå gjøre det samme som dere gjorde ovenfor. Altså, du skal:

- fylle ut tabellen ovenfor til høyre
- fremstille resultatene i det samme koordinatsystemet
- lage et regnestykke som viser hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)
- skrive en forklarende tekst på hvordan man regner ut de ulike måltallene dere fant i a)

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

## 1. Noen begreper

### 1.1 Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

#### Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

### 1.2 Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*.

Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

### 1.3 Størrelser som er avhengig av hverandre

#### Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

### 1.4. Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

#### Eksempel 3

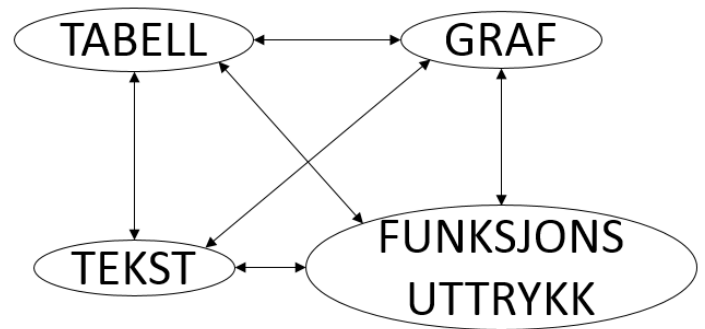
Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

## 2. Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

- 1) en *tabell*
- 2) en *graf*
- 3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.
- 4) En tekst



Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for  $x$ .

Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for  $y$ .

### 2.1 Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er  $20 \cdot 1 = 20$  kr

Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er  $20 \cdot 2 = 40$  kr

Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er  $20 \cdot 3,5 = 70$  kr

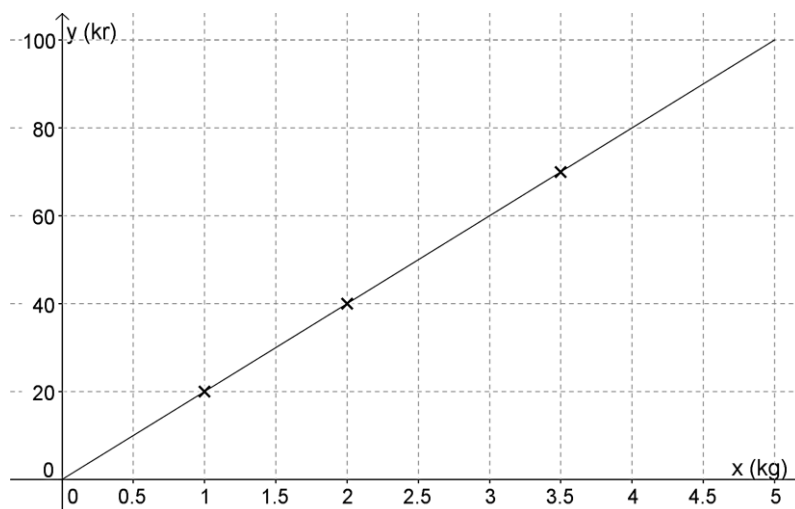
Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose ( $x$ ) og prisen av posen ( $y$ ) i en *verditabell*. For eksempel slik:

$x / \text{kg}$	1	2	3,5
$y / \text{kr}$	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenhetene* i tabellen.

### 2.2 Graf

De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:





Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *graf*en til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

### 2.2.1 Å tegne en graf for hånd

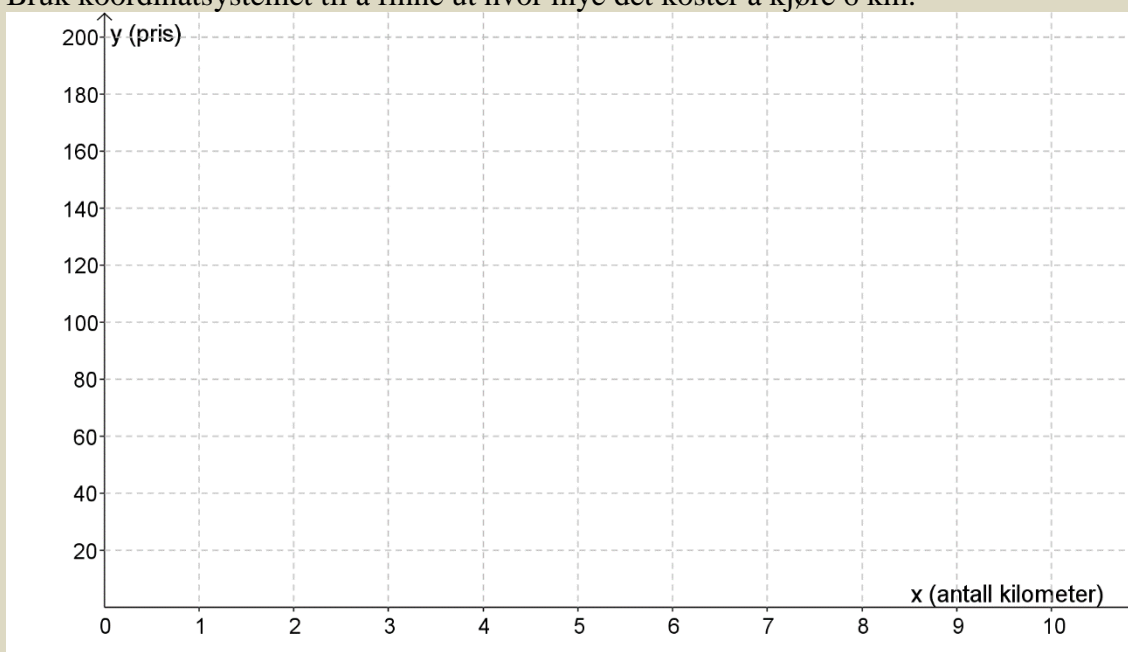
Oppgaven under kan du skrive rett inn i denne boka

#### Oppgave 1

Bergen taxi har en startpris på 60 kr. Det koster i tillegg 10 kr for hver kilometer. Da er prisen for noen utvalgte lengder gitt i tabellen:

$x$ (antall km)	0	2	4	10
$y$ (pris)	60	80	100	160

- Tegn inn punktene i koordinatsystemet under, og trekk en rett linje mellom alle punktene med linjal.
- Bruk koordinatsystemet til å finne ut hvor mye det koster å kjøre 6 km.



Trondheim Taxi tar 20kr i startpris, og 20 kr i tillegg for hver ekstra kilometer.

- Hvor mye det vil koste å kjøre 0 km? \_\_\_\_\_
- Hvor mye det vil koste å kjøre 1 km? \_\_\_\_\_
- Hvor mye det vil koste å kjøre 2 km? \_\_\_\_\_
- Hvor mye det vil koste å kjøre 8 km? \_\_\_\_\_
- Fyll punktene inn i tabellen under.

$x$ (antall km)	0	1	2	8
$y$ (pris)				

- Tegn punktene inn i koordinatsystemet over, og trekk en rett linje mellom punktene.
- Hvor langt kan du kjøre for 100 kr med dette selskapet? \_\_\_\_\_
- Hvor mange kilometer må du kjøre for at disse taxiselskapene skal være like dyre? \_\_\_\_\_

## Oppgave 2

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

- Hvor mye koster det å kjøre 0 km?
- Hvor mye koster det å kjøre 1 km?
- Hvor mye koster det å kjøre 5 km?
- Fyll ut tabellen under

$x$ (antall km)	0	5	10
$y$ (pris)			

- Tegn koordinatsystemet som viser sammenhengen mellom pris og antall kilometer for hånd. La  $x$  være mellom 0 og 10 km.

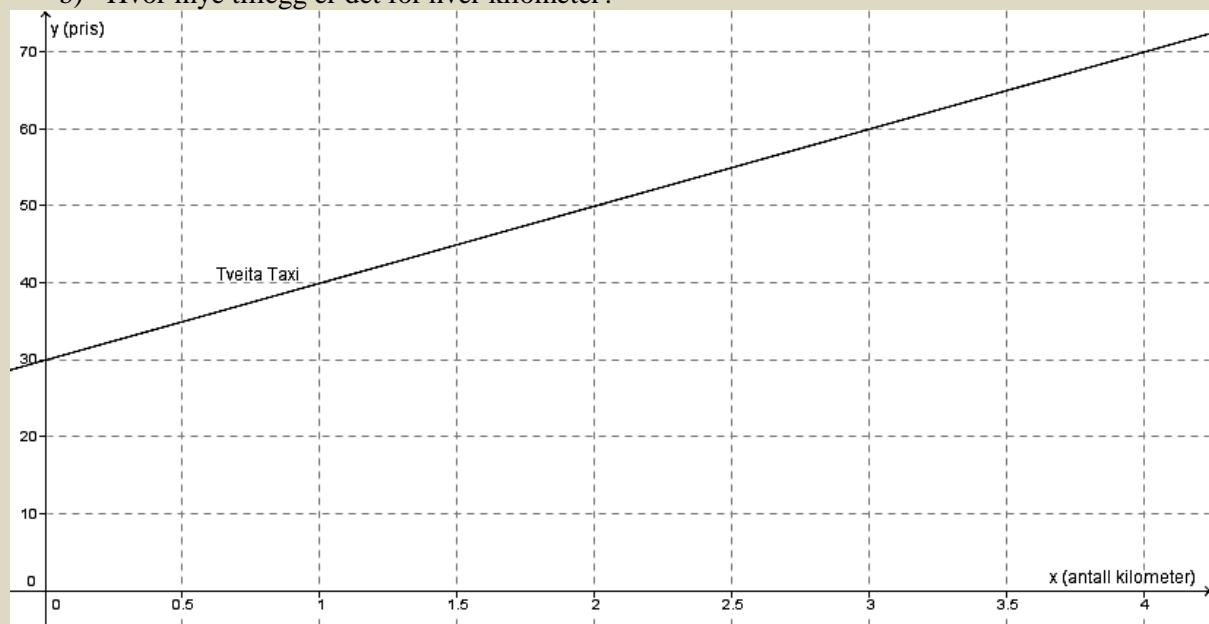
Huskeregler når du tegner koordinatsystem for hånd:

- Koordinatsystemet skal begynne fra null
- Det skal være like lang avstand mellom tallene på aksene
- Skriv navn på aksene
- Regn ut noen verdier for  $x$  og  $y$ , og plasser dette i koordinatsystemet.
- Trekk en rett linje mellom alle punktene, bruk linjal

## Oppgave 3

Grafen under viser prisen for en tur med Tveita taxi.

- Hva er startprisen hos Tveita taxi?
- Hvor mye tillegg er det for hver kilometer?



## 2.3 Funksjonsuttrykk

For mange funksjoner kan vi lage en *formel* for å regne ut verdien til  $y$  når vi kjenner verdien til  $x$ . Denne formelen kaller vi *funksjonsuttrykket*.

I eksemplet med eplene ovenfor, ser vi at prisen for en kilo epler er 20 kr. Derfor kan regne ut prisen for en pose epler med denne oppskriften:

$$\text{Prisen for en pose epler} = 20 \text{ kr/kg} \cdot \text{Antall kilo epler i posen}$$

Dersom vi kjøper et visst antall kilo epler, som vi gjerne kaller  $x$  antall kilo epler, kan vi skrive det kortere slik:

$$y = 20 \cdot x$$

Ofte dropper vi gangetegnet mellom tallet og  $x$ , da blir uttrykket  $20x$ .

### Oppgave 4

Lag en tabell som viser hvor mye det koster å kjøpe 1, 3 og 5 flasker brus hvis en flaske koster 15 kr.

- Framstill disse tallene som tre punkter i et passende koordinatsystem og tegn grafen til funksjonen som viser sammenhengen mellom pris og antall flasker. Skriv passende enheter på aksene.
- Les av på grafen hvor mye brus vi kan kjøpe for 60 kr.
- Lag et funksjonsuttrykk for denne funksjonen.

*Kommentar: Denne grafen og dette funksjonsuttrykket har egentlig bare mening når  $x$  er et helt positivt tall. Vi kan ikke kjøpe 1,4 flasker eller -2 flasker brus!*

## 3. Skrivemåten $f(x)$

For å vise tydelig at  $y$  er en funksjon av  $x$ , skriver vi ofte  $y = f(x)$ . Vi leser det som “f av x”.

Epleprisfunksjonen ovenfor kan vi da skrive  $f(x) = 20x$ .

Hvis vi skal regne ut hvor mye 1,8 kg epler koster, sier vi at vi regner ut funksjonsverdien for  $x = 1,8$  og vi kan skrive dette slik:

$$f(1,8) = 20 \cdot 1,8 = 36$$

I praktiske oppgaver bruker vi av og til bokstaver som er litt mer selvforklarende. Eksempler:

- *Høyden* av et tre er en funksjon  $h(t)$  av *tiden* som har gått etter planting.
- *Massen* til en aluminiumblokk er en funksjon  $m(V)$  av *volumet*.

Vi kommer heretter til å bruke skrivemåtene “ $y =$ ” og “ $f(x) =$ ” om hverandre.

Hvis funksjonsuttrykket viser en sammenheng mellom to størrelser fra “det praktiske liv”, kaller vi det gjerne for en *matematisk modell* for denne sammenhengen. Hvis funksjonen er lineær, sier vi at det er en *lineær* modell.

#### 4. Lineære funksjoner

De enkleste funksjonene er de hvor grafen er en *rett linje*. Slike funksjoner sier vi er *lineære*.

##### 4.1 Grafen til en lineær funksjon

I del 1 til eksamen bør du kunne tegne grafen til en lineær funksjon som har “pene” verdier for stigningstall og konstantledd på papir og uten kalkulator.

##### Eksempel 4

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

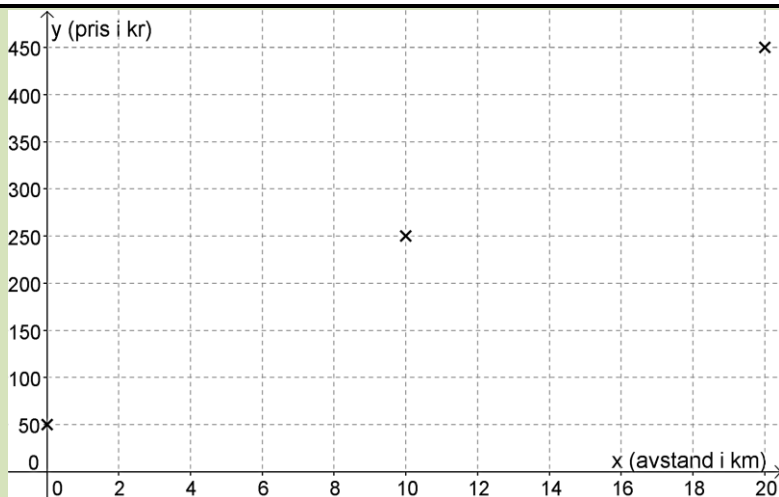
- a) 1) Hvor mye koster det å sette seg inn i taxien (kjøre 0 km)?  
2) Hvor mye koster det å kjøre 10 km?  
3) Hvor mye koster det å kjøre 20 km?
- b) Sett inn hver av disse ”turene” som punkter i et koordinatsystem der lengden på turen er langs  $x$ -aksen og prisen på turen langs  $y$ -aksen
- c) Tegn grafen til denne funksjonen hvis vi ikke skal kjøre mer enn 20 km.
- d) Les av på grafen hvor langt vi kan kjøre for 350 kr
- e) Lag et funksjonsuttrykk for prisen  $y$  hvis vi kjører  $x$  km.

##### LØSNING

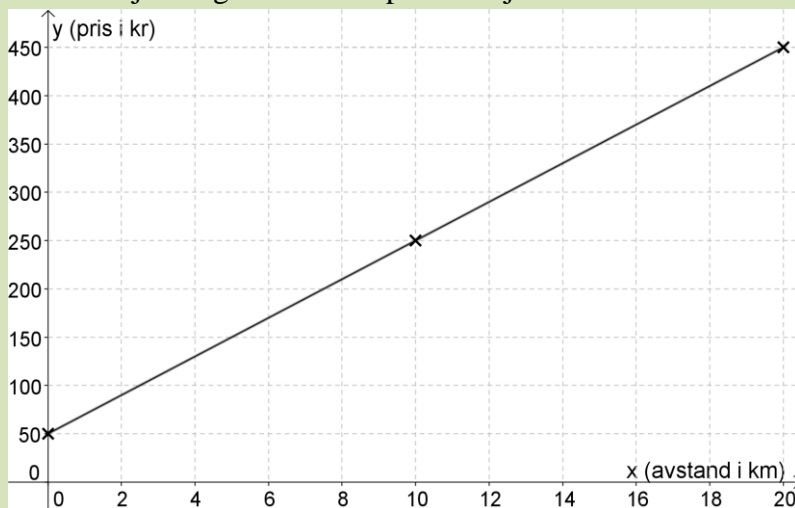
- a) 1) Startprisen er 50 kr. Det koster 50 kr å sette seg inn i taxien.
- 2)  $50 + 20 \cdot 10 = 50 + 200 = 250$  kr
- 3)  $50 + 20 \cdot 20 = 50 + 400 = 450$  kr

b) Vi lager nå et koordinatsystem hvor  $x$ -aksen går fra 0 til ca. 21 km, og  $y$ -aksen fra 0 til ca. 500 kr. Vi velger enhetene på aksene slik at grafen ikke blir svært liten, men likevel får plass på arket. Bruk blyant, ikke penn, til grafer!

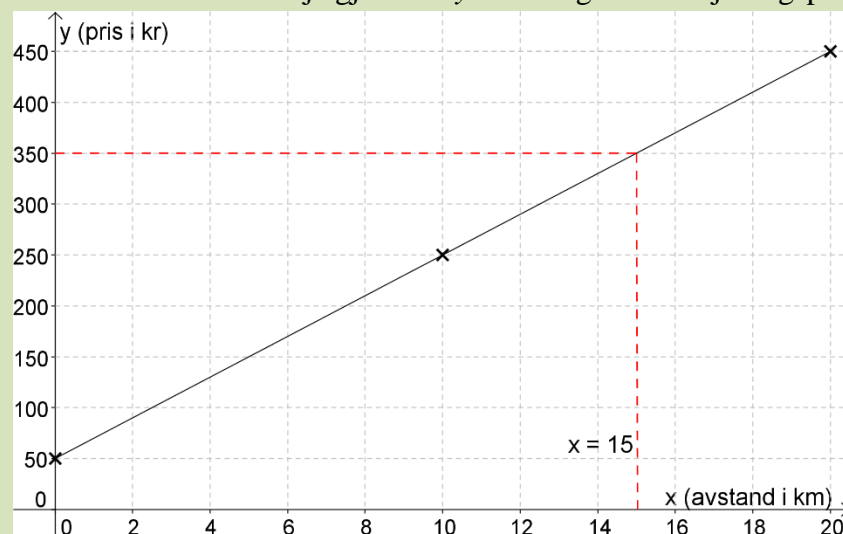
Deretter merker vi av punktene. Hvis alt er gjort riktig, ligger de tre punktene på en rett linje



Denne linjen er grafen til taxiprisfunksjonen vår.



c) Vi trekker en vannrett linje gjennom  $y = 350$  og finner skjæringspunktet:



Vi kan kjøre 15 km for 350 kr. Avlesninger skal merkes av slik vi har gjort over!

## Oppgave 5

Jonas går på treningsstudio. Han betaler en fast månedsavgift på 150 kr. I tillegg betaler han 30 kr for hver treningstime. Han trener aldri mer enn 10 ganger på en måned.

- Hvor mye betaler Jonas en måned han trener 5 ganger (medregnet den faste avgiften)?
- Sett opp et funksjonsuttrykk som gir månedsprisen hvis han trener  $x$  ganger per måned.
- Tegn grafen til denne funksjonen med papir og blyant, uten kalkulator.
- Les av på grafen hvor mange ganger han kan trene for 330 kr. Merk av avlesningen og skriv et tekstsvar slik som i eksemplet ovenfor!

## 4.2 Stigningstall og konstantledd

### Eksempel 5

Dette er eksempler på lineære funksjoner:

- $y = 12x$
- $f(x) = 12x + 20$
- $f(x) = -16x + 90$
- $y = 100 + 40x$
- $f(x) = 200 - 25x$
- $h(t) = 0,6t + 1,2$
- $y = 60$

Alle disse eksemplene har formen  $f(x) = a \cdot x + b$ , hvor  $a$  og  $b$  er konstanter (faste tall).

Nedenfor finner du verdiene for  $a$  og  $b$  for sju funksjonene i eksempel 4. Sjekk at det stemmer og at du forstår:

- 1)  $a = 12, b = 0$       2)  $a = 12, b = 20$     3)  $a = -16, b = 90$     4)  $a = 40, b = 100$   
5)  $a = -25, b = 200$     6)  $a = 0,6, b = 1,2$     7)  $a = 0, b = 60$

$a$  kalles *stigningstallet* fordi verdien til  $a$  bestemmer hvor bratt grafen er.

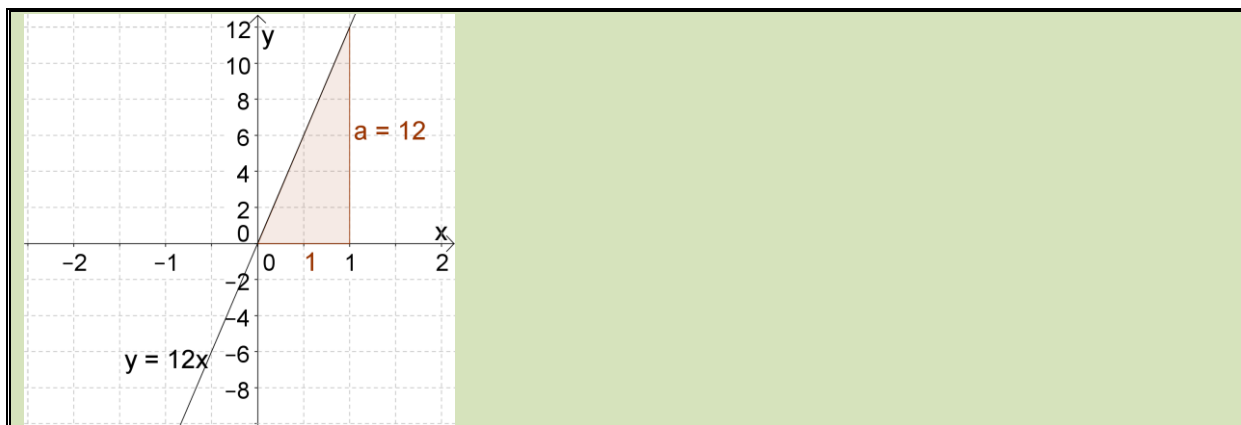
Hvordan bestemmer vi stigningstallet?

Stigningen (brattheten) er bestemt ved hvor mye linja stiger eller synker i  $y$ -retning (oppover), dersom vi øker med 1 i  $x$ -retning.

### Eksempel 6

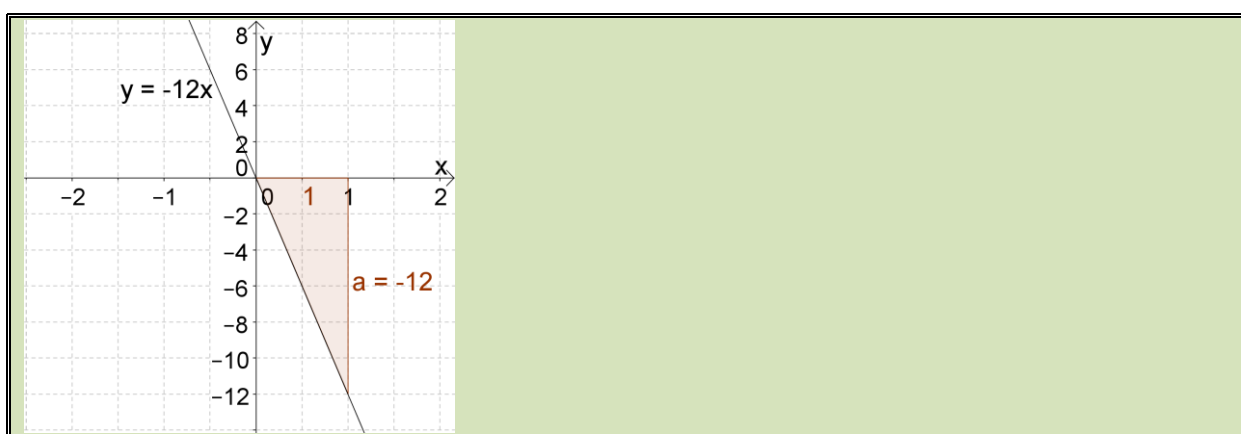
Linja  $y = 12x$  har stigningstall 12.

Det betyr at linja stiger med 12 i  $y$ -retningen, hvis vi øker  $x$ -verdien med 1, se figuren under.



Linja  $y = -12x$  har stigningstall  $-12$ .

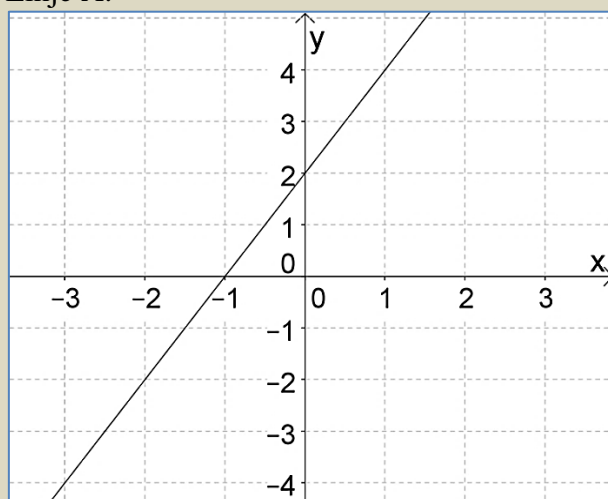
Det betyr at linja synker med 12 i  $y$ -retningen, hvis vi øker  $x$ -verdien med 1, se figuren under.



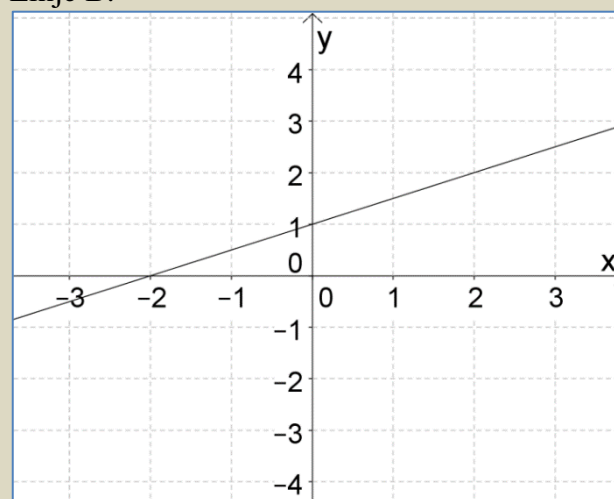
### Oppgave 6

Nedenfor ser du to koordinatsystem med en linje i hver, linje A og linje B

Linje A:



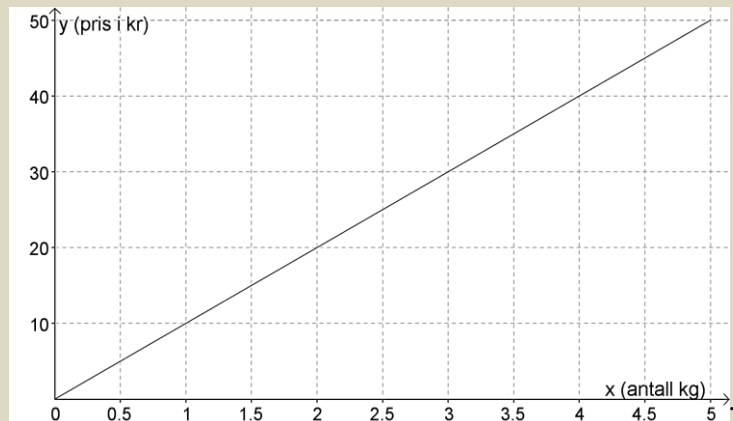
Linje B:



- Hvilken linje er brattest?
- Finn stigningstallet til linje A og stigningstallet til linje B

## Oppgave 7

Grafen under viser sammenhengen mellom hvor mange kg epler vi kjøper og pris vi betaler



- Hva er stigningstallet til denne grafen?
- Hvor mye er prisen per kg epler?

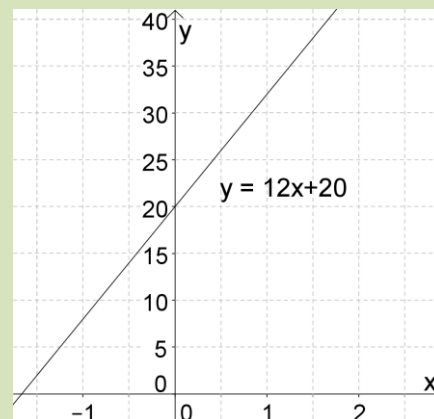
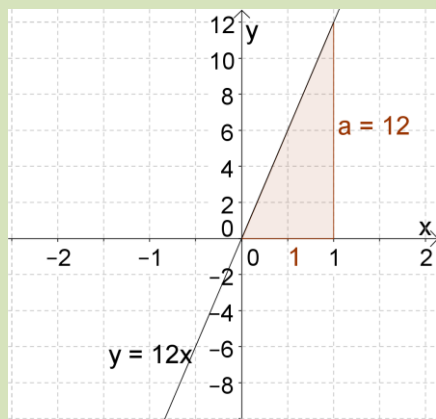
$b$  kalles *konstantleddet* fordi dette leddet er et fast tall (en konstant). Hvordan bestemmer vi konstantleddet? an bestemmer vi konstantleddet?

Konstantleddet er der grafen treffer  $y$ -aksen.

### Eksempel 7:

Linja  $y = 12x$  har konstantledd lik 0, det betyr at den går gjennom origo

Linja  $12x + 20$  har konstantledd 20. Det betyr at den treffer  $y$ -aksen der  $y = 20$



## Oppgave 8

Finn konstantleddet til linje A og konstantleddet til linje B i oppgave 6

## Oppgave 9

Finn konstantleddet til grafen i oppgave 7.



## 5. Bruk av Geogebra til å løse funksjonsoppgaver

### 5.1 Tegning av grafer i GeoGebra

Geogebra kan lastes ned gratis fra internett. Skjembildene nedenfor er fra Windows-versjonen. Kommandoene i Mac-versjonen kan være litt annerledes.

#### Eksempel 8:


Vi skal skrive inn funksjonen for et taxiselskap som koster 50 kr som startavgift, og deretter 20 kr per km. Da blir uttrykket  $f(x) = 20x + 50$ , der  $x$  er avstanden i km. Vi tenker oss at taxiene kjører mellom 0 km og 20 km.

1. Begynn å skrive ordet Funksjon i inntastingsfeltet og velg kommandoene:

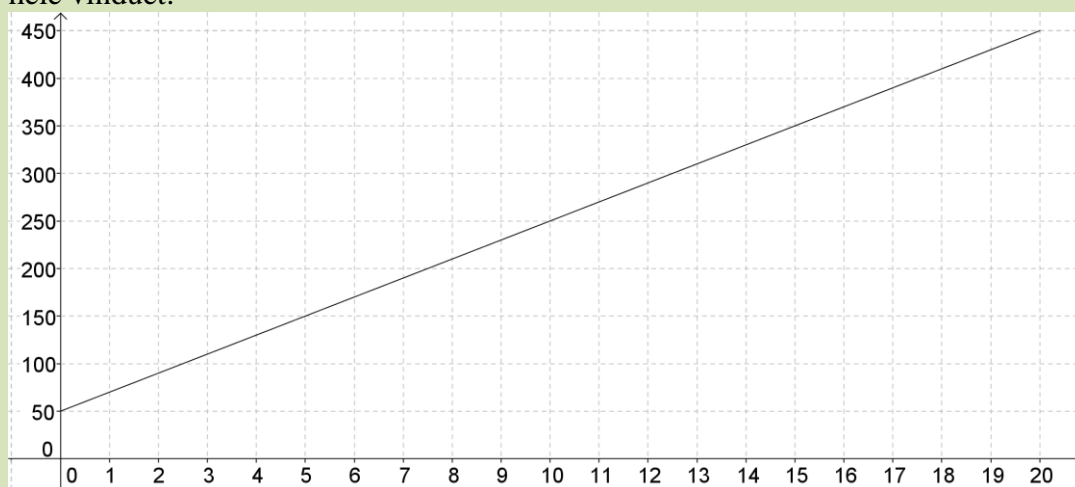
Funksjon[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Skriv det inn slik i inntastingsfeltet:

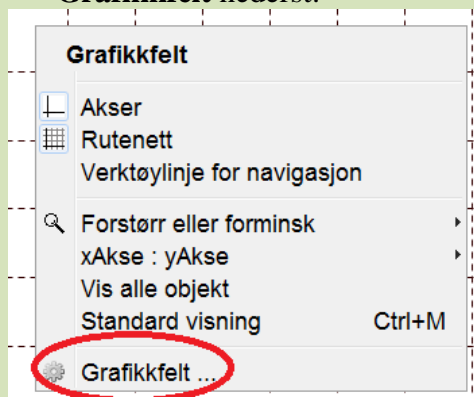
Skriv inn: **Funksjon[20x+50,0,20]**

2. For å få grafen innenfor vinduet må vi justere på aksene, da velger vi dette pil-symbolet på verktøylinjen: 

Da kan vi etter tur plassere markøren over  $x$ - og  $y$ -aksen slik at den blir en dobbelpil. Da kan vi "dra" i aksene slik at vi ser hele grafen. Grafen skal dekke hele vinduet:

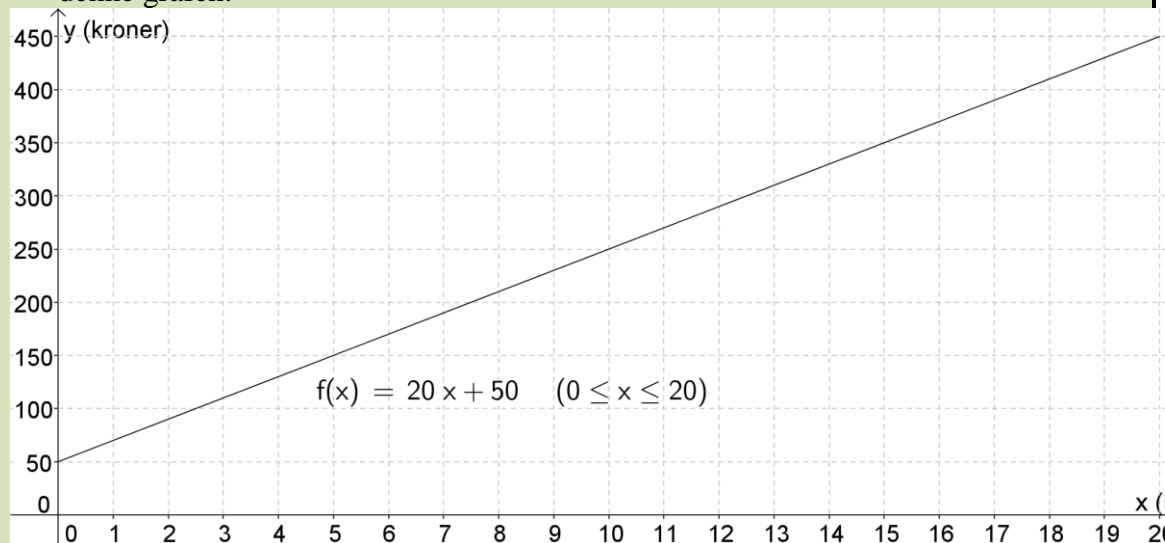


3. Alle grafer skal ha en passende tekst på aksene. Vi klikker på pilikonet øverst til venstre, og høyreklikker i grafikkfeltet. Da får vi opp denne menyen, hvor vi velger **Grafikkfelt** nederst:



Det kommer opp et vindu hvor vi bl.a. kan skrive inn tekst på aksene. I dette eksemplet skriver vi  $x$  (km) for  $x$ -aksen og  $y$  (kroner) på  $y$ -aksen.

4. Til slutt kan vi merke funksjonsuttrykket og “dra” det over i grafikkfeltet. Da får vi denne grafen:

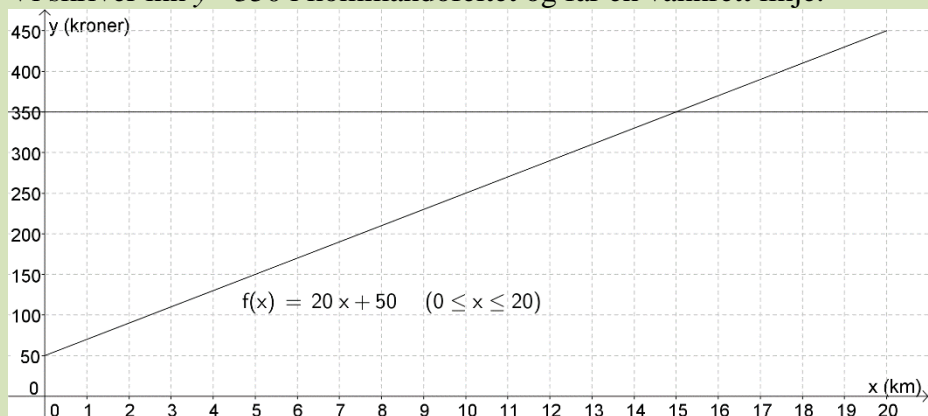


Kopier over i et Word-dokument og skriv ut.

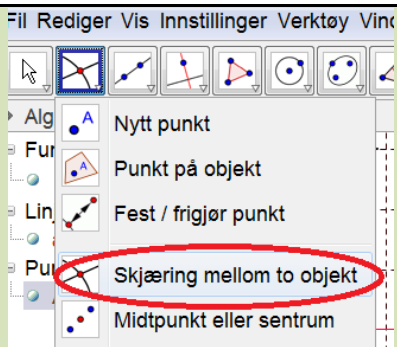
## 5.2 Grafisk løsning via GeoGebra.

Så skal vi bruke Geogebra til å finne ut hvor langt vi kan kjøre for 350 kr. Her er det lett å lese av direkte, men vi bruker likevel en metode som virker selv når det er umulig å se svaret nøyaktig rett fra grafen.


1. Vi skriver inn  $y = 350$  i kommandofeltet og får en vannrett linje.

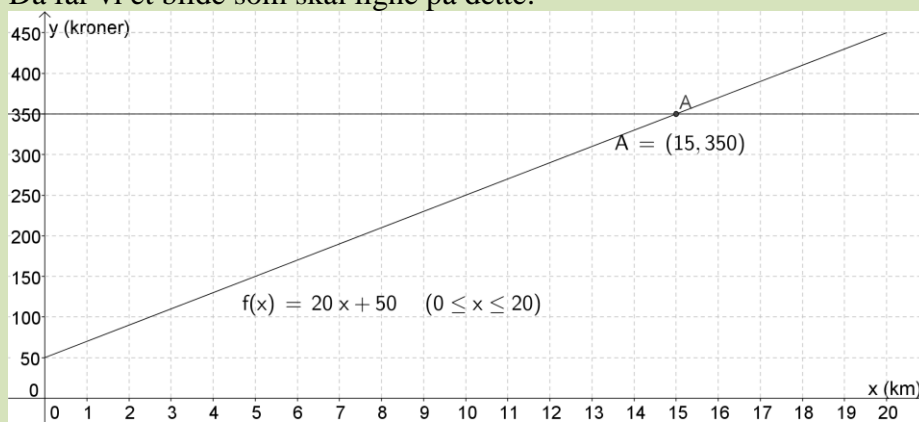


2. Vi finner skjæringspunktet mellom de to grafene ved å velge:



Når vi klikker i skjæringspunktet slik at begge linjene blir tykkere, får vi avmerket skjæringspunktet.

Vi vil vise koordinatene, og får fram disse ved å velge **Flytt**-knappen , markere punktet og "dra" det over i koordinatsystemet. Da får vi et bilde som skal ligne på dette:



3. Vi avslutter med å skrive et tekstsvar og en forklaring på hva vi har gjort.

Tekstsvar: Vi kan kjøre 15 km for 350 kr

Forklaring: Skrev inn  $y = 350$ . Brukte "Skjæring mellom to objekt"

Kopier grafen til et word-dokument og skriv det ut derfra.

### Oppgave 10

Tegn linjene nedenfor i GeoGebra. Ta ett skjermbilde per graf.

- $y = 10x + 150$ , la  $x$  være mellom 0 og 20 (Start = 0, Slutt = 20)
- $y = 7.5x + 250$ , la  $x$  være mellom 0 og 20
- $y = 80 - 2x$ , la  $x$  være mellom 0 og 12
- $y = 600 - 15x$ , la  $x$  være mellom 0 og 12

### Oppgave 11

Jon er medlem på treningssenter. Han betaler 180 kr fast per måned og 30 kr per gang. Dersom antall ganger han trener kalles  $x$ , kan vi skrive uttrykket som  $y = 30x + 180$

- Tegn grafen til uttrykket dersom han trener mellom 0 og 15 ganger i løpet av en måned.
- Bruk grafen til å finne ut hvor mye han betaler når han trener 10 ganger
- Bruk grafen til å finne ut hvor mange ganger i løpet av en måned han kan trene for 600 kr.

### Oppgave 12

Anna har et mobilabonnement der hun for samtaler betaler 0,25 kr i fast startavgift pluss 0,45 kr per minutt. Dersom vi snakker i  $x$  minutter kan vi skrive funksjonen som  $y = 0,45x + 0,25$

- Tegn grafen til uttrykket dersom samtalene varer mellom 0 og 60 minutter.
- Hvor mye betaler hun for en samtale som varer i en halvtime?
- Hvor lenge kan hun snakke for 10 kroner?

### Oppgave 13

Mona leser en bok som har 300 sider. Hver dag leser hun 12 sider. Etter  $x$  dager kan antall sider hun har igjen å lese skrives som  $y = 300 - 12x$

- Hun bruker 25 dager på å lese boka. Tegn grafen til uttrykket for  $x$  fra 0 til 25.
- Bruk grafen til å finne ut hvor mange sider har hun lest etter 20 dager
- Bruk grafen til å finne ut hvor mange dager det tar før hun har lest 100 sider.

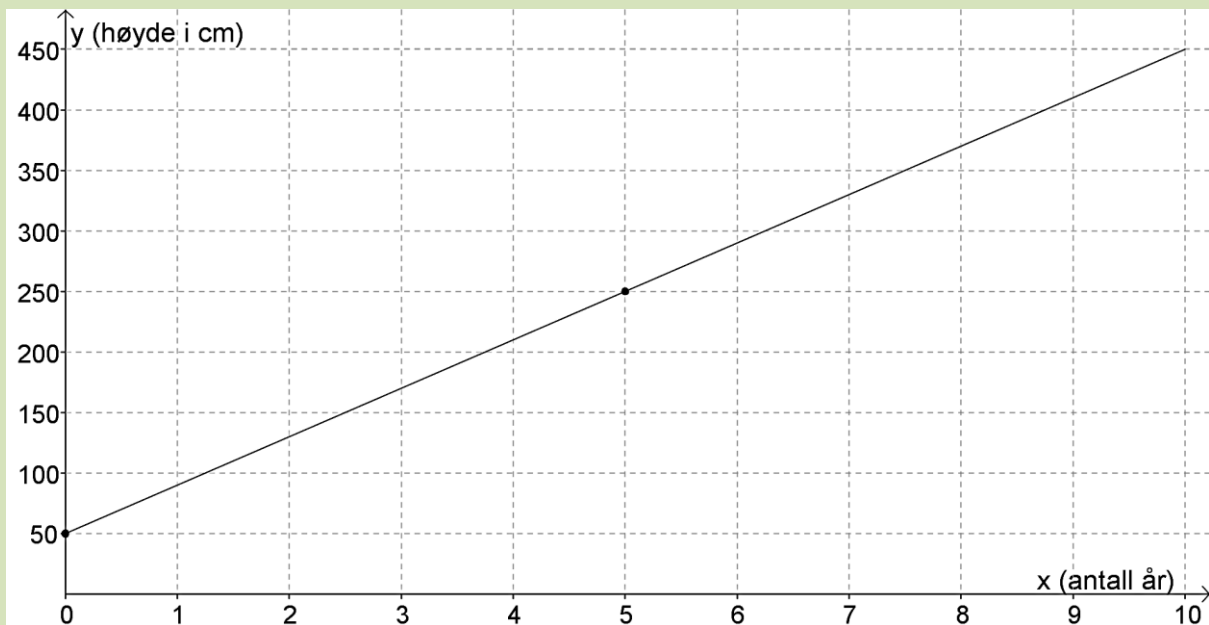
## 6. Finne funksjonsuttrykket når grafen er kjent

Nå skal vi bruke grafen til en lineær funksjon til å finne ut *hvilken* funksjon vi ser grafen til.

### 6.1 Positivt stigningstall

#### Eksempel 9

Grafen nedenfor viser høyden til et tre på forskjellige tider etter at det ble plantet.



- Hvor høyt var treet da det ble plantet?
- Hvor mye har treet vokst på ett år?
- Skriv opp et funksjonsuttrykk som viser høyden  $y$  etter  $x$  år.

#### LØSNING:

- Da treet ble plantet, var  $x = 0$ . Da ser vi at  $y = 50$ . Treet var 50 cm.
- I slike oppgaver er det ofte vanskelig å lese av nøyaktig hvor mye  $y$  har forandret seg på *ett* år. Da kan vi isteden lese av koordinatene til to punkter på grafen som det er enklere å finne nøyaktige verdier til. Her bruker vi de to avmerkede punktene. Da ser vi at treet har vokst fra 50 cm fra starten ( $x = 0$ ) til 250 cm etter 5 år.

Det har altså vokst  $250 \text{ cm} - 50 \text{ cm} = 200 \text{ cm}$  på 5 år.

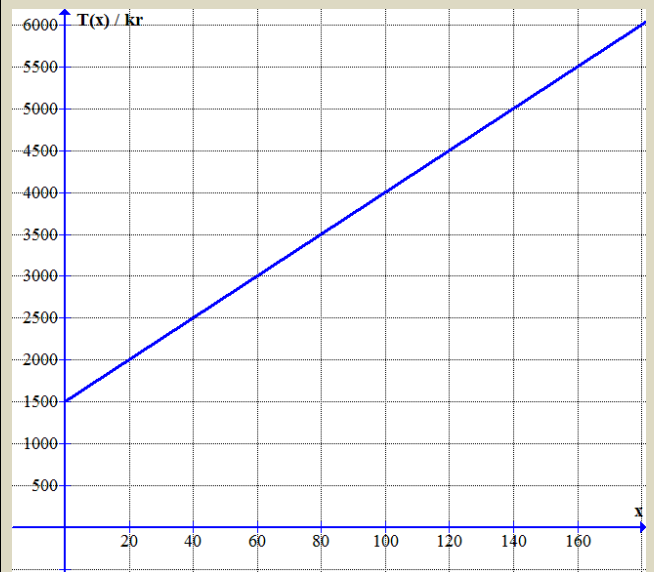
Da blir veksten på ett år:  $\frac{200}{5} = 40 \text{ cm per år}$ .

- Her fant vi stigningstallet i oppgave b og konstantleddet i oppgave a. Funksjonsuttrykket blir derfor  $y = 40x + 50$

### Oppgave 14

Sana går ofte på treningsstudio. Hun betaler en årsavgift og i tillegg et fast beløp for hver time. Grafen til høyre viser utgiftene hennes  $T(x)$  i treningsstudioet hvis hun trener  $x$  timer i året.

- Hvor stor er årsavgiften?
- Hvor mye betaler hun for *en* treningstime?
- Sana vil ikke bruke mer enn 4000 kr i året på treningen. Hvor mange timer i året kan hun trene da?  
Løs oppgaven ved å lese av på grafen.
- Skriv opp funksjonsuttrykket for  $T(x)$ .

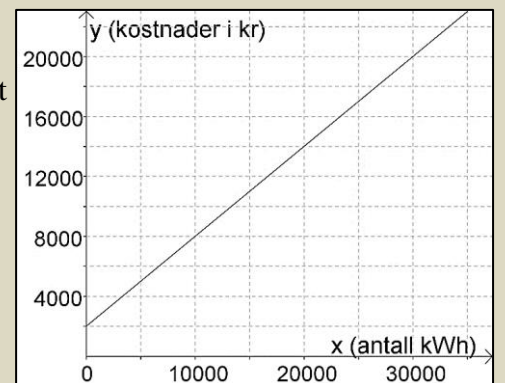


### Oppgave 15

Figuren til høyre viser hvordan de årlige strømutgiftene  $K(x)$  i en bolig er avhengig av energi-forbruket  $x$  målt i kilowattimer (kWh).

Utgiftene består av et fast årlig beløp pluss en del som bestemmes av en pris for hver kWh og antall kWh som er brukt i løpet av året.

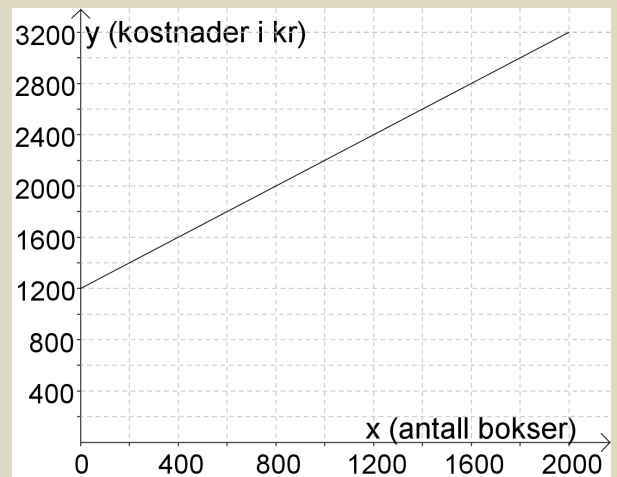
- Hvor stort er det faste årlige beløpet?
- Hva er prisen for hver kilowattime?
- Hvor mye koster det å bruke 18 000 kWh på ett år?
- Finn ved å bruke figuren hvor mye energi vi kan bruke hvis utgiftene ikke skal bli større enn 14 000 kr
- Bestem funksjonsuttrykket til  $K(x)$ .



## Oppgave 16

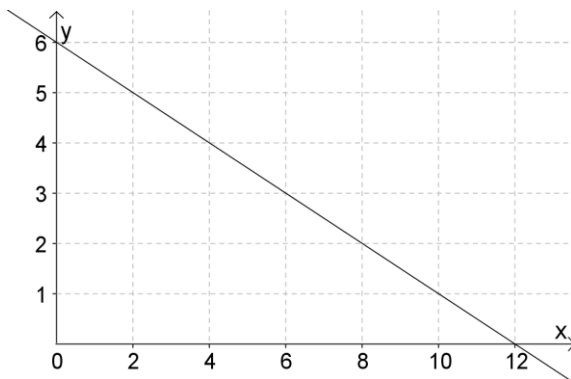
En maskin som lager metallbokser, kan produsere inntil 2000 bokser på en dag. Grafen til høyre viser kostnadene  $K$  i kroner per dag som funksjon av dagsproduksjonen av bokser.

- Bruk grafen til å finne de faste kostnadene for maskinen per dag. (Med *faste kostnader* mener vi her hva det koster å betale ned på det som maskinen kostet i innkjøp, pluss utgiftene med å holde den i gang).
- Hvor mye koster det å øke produksjonen med én boks?
- Finn et funksjonsuttrykk for kostnaden  $K(x)$  per dag når det blir produsert  $x$  bokser.



## 6.2 Negativt stigningstall

Hvis stigningstallet er *negativt*, vil  $y$  *minke* når  $x$  øker. Da synker linja mot høyre (se figur).



Hva er stigningstallet til linja til venstre?

Skriv svaret på linja under:

\_\_\_\_\_

Hvorfor?

\_\_\_\_\_

### Eksempel 10

Abdi har 1500 kr. Hver dag bruker han 100 kr.

- Lag en funksjon  $f(x)$  som viser hvor mye penger han har igjen etter  $x$  dager.
  - Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for  $f(x)$ .
  - Tegn grafen til funksjonen for passende verdier av  $x$ .
- a) For å gjøre det lettere å tenke, kan vi først regne ut hvor mye han har igjen etter én dag, etter to dager, etter tre dager osv.

Etter én dag:  $1500 - 100 = 1400$  kr

Etter to dager:  $1500 - 100 \cdot 2 = 1500 - 200 = 1300$  kr

Etter tre dager:  $1500 - 100 \cdot 3 = 1500 - 300 = 1200$  kr

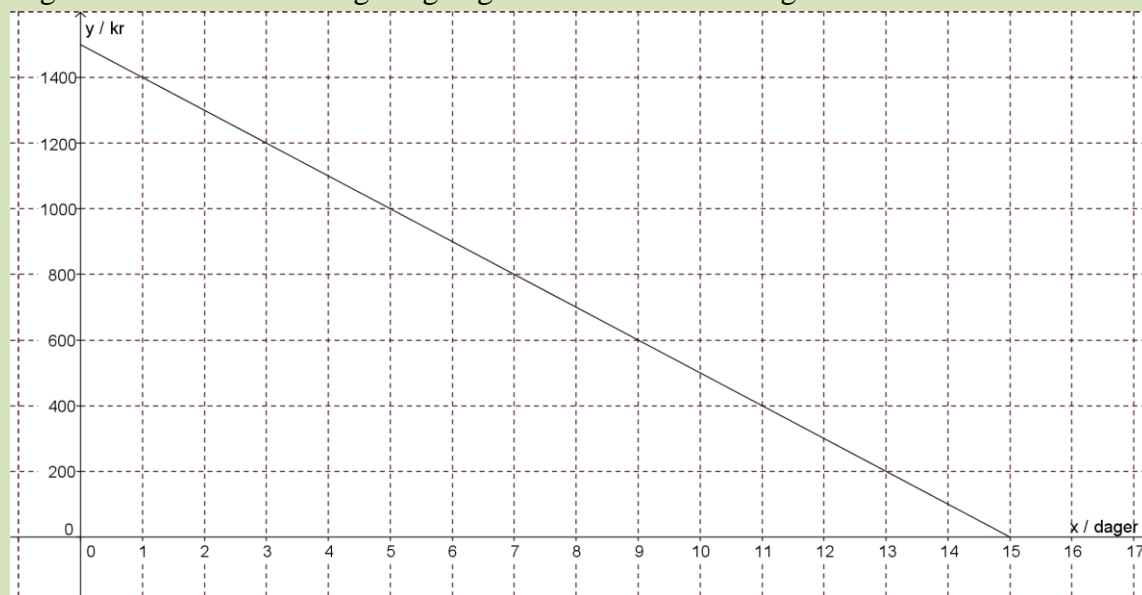
Etter  $x$  dager:  $1500 - 100 \cdot x$

Det han har igjen etter  $x$  dager kan vi da regne ut med funksjonen  $f(x) = 1500 - 100x$ .

b) Det er kanskje lettere å se stigningstallet og konstantleddet hvis vi skriver konstantleddet til slutt istedenfor først. Da blir funksjonen  $f(x) = -100x + 1500$ .

Stigningstallet er  $-100$  kr/dag, og konstantleddet er  $1500$  kr.

c) Hvis vi regner litt eller ser på grafen, finner vi ut at pengene hans er oppbrukt etter  $15$  dager. Det er derfor naturlig å tegne grafen for  $x$  mellom  $0$  og  $15$ . Da blir den omtrent slik:



### Oppgave 17

En kopimaskin koster  $64\,000$  kr. Vi regner med at verdien av maskinen avtar (minker) med  $8000$  kr i året.

- Finn funksjonsuttrykket  $V(x)$  som viser verdien av maskinen etter  $x$  år.
- Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for  $V(x)$ .
- Hvor lang tid tar det før kopimaskinen har verdi null?
- Tegn grafen til funksjonen.
- Hvor lang tid går det før verdien er halvert?

### Oppgave 18

Tony har fått et rentefritt lån på  $4000$  kr hos foreldrene sine. Han betaler tilbake  $250$  kr hver måned.

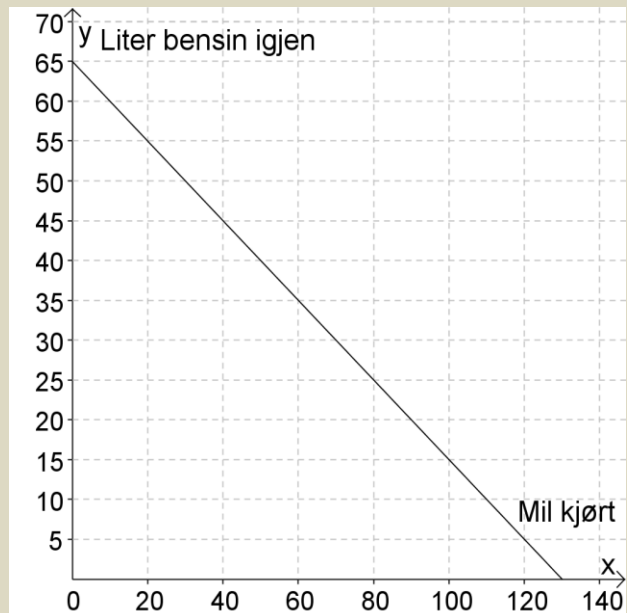
- Lag en funksjon  $S(x)$  som viser hvor mye han skylder foreldrene etter  $x$  måneder.
- Tegn grafen til funksjonen.
- Hvor mye er det igjen av lånet etter ett år?
- Hvor lang tid tar det før lånet er nedbetalt, det vil si at han ikke lenger skylder penger?



## Oppgave 19

En bilfører fyller bensintanken helt full før han drar ut på langtur. Veien, farten og kjørestilen er slik at han bruker omtrent like mye bensin per mil på hele turen. Grafen til høyre viser hvor mye bensin  $b(x)$  det er på tanken etter at han har kjørt  $x$  mil etter at tanken ble fylt.

- Hvor mange liter går det på tanken?
- Hvor mye bensin bruker han per mil?
- Skriv opp funksjonsuttrykket for  $b(x)$ .
- Etter omtrent hvor mange mil er tanken halvfull?
- Han fyller bensin på nytt når det er igjen 10 % av full tank. Etter omtrent hvor mange mil fyller han?



Av og til kan stigningstallet være positivt og konstantleddet *negativt*..

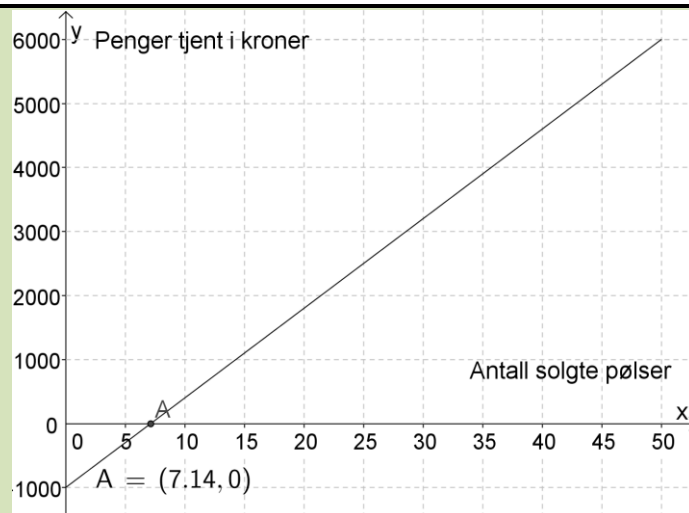
### Eksempel 11

En pølseprodusent selger spekepølser på en varemesse. For å få lov til å stå på en stand på messen, må han betale en avgift på 1000 kr til arrangøren. Pølsene blir solgt for 140 kr per pølse.

- Hvor mye tjener han hvis han selger
  - 5 pølser? **Avgiften skal regnes med**
  - 10 pølser? **Avgiften skal regnes med.**
- Lag en funksjon som viser hvor mye han tjener hvis han selger  $x$  pølser.
- Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
- Tegn grafen til funksjonen hvis han regner med å selge maksimalt 50 pølser på messen.
- Hvor mange pølser må han selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen

### LØSNING:

- Med et salg på 5 pølser blir fortjenesten  $140 \cdot 5 - 1000 = 700 - 1000 = -300$ . Den negative fortjenesten betyr at han taper 300 kr hvis han bare selger 5 pølser.
  - Med et salg på 10 pølser blir fortjenesten  $140 \cdot 10 - 1000 = 1400 - 1000 = 400$ . Han tjener 400 kr hvis han selger 10 pølser.
- $f(x) = 140x - 1000$
- Stigningstallet er 140 kr/pølse og konstantleddet er -1000 kr.
- Her er grafen:



- e) Når linja ligger under  $x$ -aksen går han med underskudd. Vi må altså finne punktet der grafen treffer  $x$ -aksen, det gjør vi ved å bruke knappen for skjæring mellom to objekt



Skjæring mellom to objekt

og så klikke ved skjæringspunktet. Da finner vi at fortjenesten blir positiv når  $x$  er større enn 7,1. (Se grafen, punkt A). Han må altså selge 8 pølser for å gå med overskudd.

### Oppgave 20

Lotte selger jordbær på torget. Hun må betale en avgift på 100 kr dagen for få stå der. Hun tjener 8 kr på hver jordbærkurv hun selger.

- Hvor mye tjener hun hvis hun selger
  - 10 kurver?
  - 30 kurver?
- Lag en funksjon som viser hvor mye hun tjener hvis hun selger  $x$  kurver.
- Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
- Tegn grafen til funksjonen hvis hun regner med å selge maksimalt 100 kurver på en dag.
- Hvor mange kurver må hun selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen.

### Oppgave 21

Temperaturen i en fryseboks er  $-18$  grader. Strømmen går og temperaturen øker med  $2$  grader/time inntil strømmen kommer tilbake etter  $15$  timer.

- a) Hva er temperaturen i fryseboksen
  - 1) Etter  $3$  timer?
  - 2) Etter  $12$  timer?
- b) Lag en funksjon  $T(t)$  som viser temperaturen i boksen etter  $t$  timer.
- c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
- d) Tegn en graf som viser temperaturen i boksen som funksjon av tiden.
- e) Finn ved avlesning på grafen og ved å løse en likning når temperaturen har steget til  $0$  grader.

### Oppgave 22

Ali arbeider i en salatbar. Han tjener  $120$  kr per time, men blir trukket  $50$  kr per dag for mat. Ali arbeider inntil åtte timer om dagen.

- a) Lag en funksjon  $L(x)$  som viser lønna hans for en dag, fratrukket beløpet for maten, dersom han jobber  $x$  timer denne dagen.
- b) Tegn grafen til denne funksjonen.
- c) Hvor mye tjener Ali hvis han arbeider fire timer?
- d) Hvor mange timer arbeidet han en dag hvor han tjente  $670$  kr?

## 7. Skjæring mellom to grafer

Noen oppgaver handler om *to* funksjoner. Typiske spørsmål handler om å finne for hvilken verdi av  $x$  disse funksjonene har *samme* verdi, eller for hvilke verdier av  $x$  den ene funksjonen har *større* verdi enn den andre. Dette kan vi løse ved å finne skjæringspunktet mellom grafene eller ved å løse en likning.

### Eksempel 12

I bilutleiefirma A må man betale 500 kr i fast avgift og 3 kr per kjørt km. I firma B er det 800 kr i fast avgift og 2 kr/km.

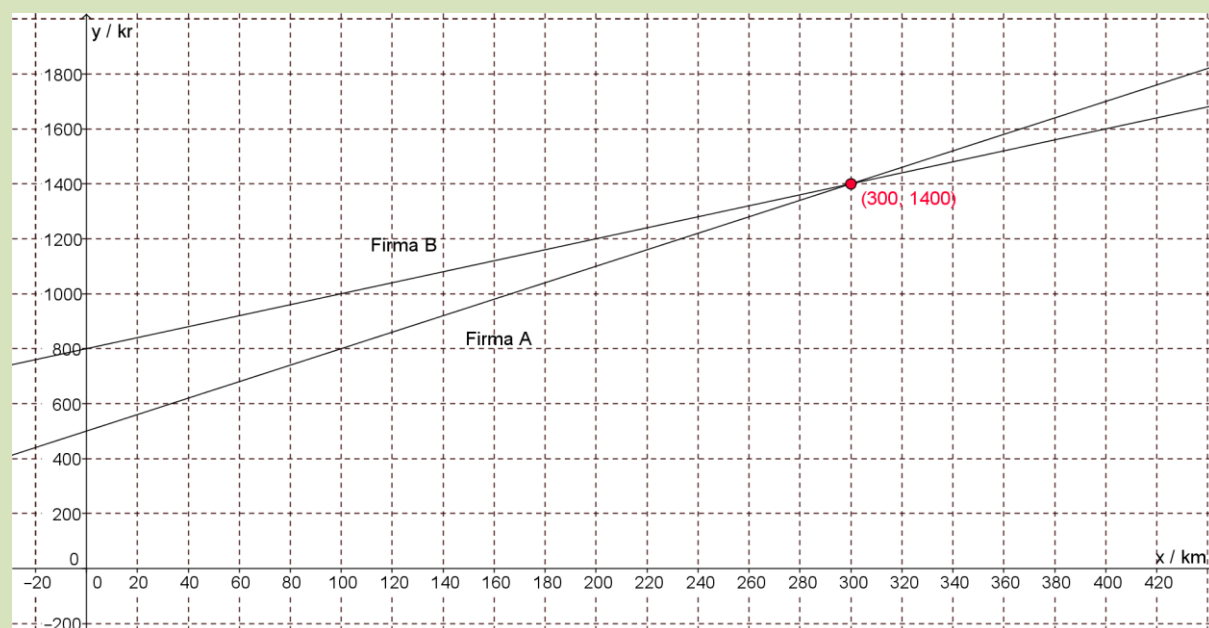
Hvor langt må man kjøre for at det skal lønne seg å bruke firma B?

De to funksjonene som beskriver hvor mye det koster å kjøre  $x$  km er

$$A(x) = 3x + 500, \quad B(x) = 2x + 800.$$

Her vet vi ikke noen passende største verdi for  $x$  så vi skriver inn funksjonene i Geogebra akkurat slik de står ovenfor. Vi drar i aksene til vi tydelig ser skjæringspunktet. Vi finner skjæringspunktet nøyaktig med kommandoen **Skjæring mellom to objekt** slik vi har gjort før.

Her har vi også lagt til tekst i bildet ved hjelp av tekstverktøyet i Geogebra.



Vi ser at firma B er billigst hvis vi kjører mer enn 300 km.

Vi kan også finne når firmaene koster like mye ved å løse en likning:

$$3x + 500 = 2x + 800$$

$$3x - 2x = 800 - 500$$

$$x = 300$$

### Oppgave 23

Reisekostnadene ved å bruke to ulike taxiselskaper, A og B, er gitt ved funksjonene

$$A(x) = 12x + 30, \quad B(x) = 9,50x + 65$$

der  $x$  er antall kilometer vi reiser. Reisen overstiger ikke 35 km.

- Tegn grafen til  $A(x)$  og  $B(x)$  i samme koordinatsystem.
- Finn grafisk hvor langt vi må kjøre for at selskap B skal være billigst.

### Oppgave 24

Frida og Guri blir enige om å spare penger til en ferietur. Frida har 2200 kr og sparer 120 kr i uka. Guri har ingen penger, men sparer 250 kr i uka.

- Hvor mye har
  - Frida etter ti uker?
  - Guri etter ti uker?
- Hvor mye har
  - Frida etter tjue uker?
  - Guri etter tjue uker?
- Vi kaller de beløpene etter  $x$  uker for  $F(x)$  og  $G(x)$ . Skriv opp disse funksjonsuttrykkene.
- Tegn grafene til  $F$  og  $G$  for 26 uker (et halvt år).
- Hvor mange uker går det før de to har like mye?
- Hvor mange kroner har de da?

### Oppgave 25

Magnus er medlem av en bowlingklubb. Medlemsavgiften er 700 kr, og han betaler 18 kr for hver runde. Jørgen bowler sammen med Magnus, men er ikke medlem. Han betaler derfor 30 kr for hver runde. Jørgen regner med at han kommer til å spille maksimalt 100 runder i året.

- Bestem de to kostnadsfunksjonene  $M(x)$  og  $J(x)$  som beskriver utgiftene til Magnus og Jørgen.
- Tegn grafene til de to funksjonene i samme koordinatsystem og finn hvor mange runder Jørgen må spille i året for at det skal lønne seg for ham å tegne medlemskap.

## 8. Polynomfunksjoner

“Polynom” betyr “flere ledd”. En polynomfunksjon består av en sum av potenser av  $x$ . Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  kalles en *andregradsfunksjon*

Polynomfunksjonen  $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$  kalles en *tredjegradsfunksjon*.

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene  $f$  og  $g$  ovenfor.

### Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

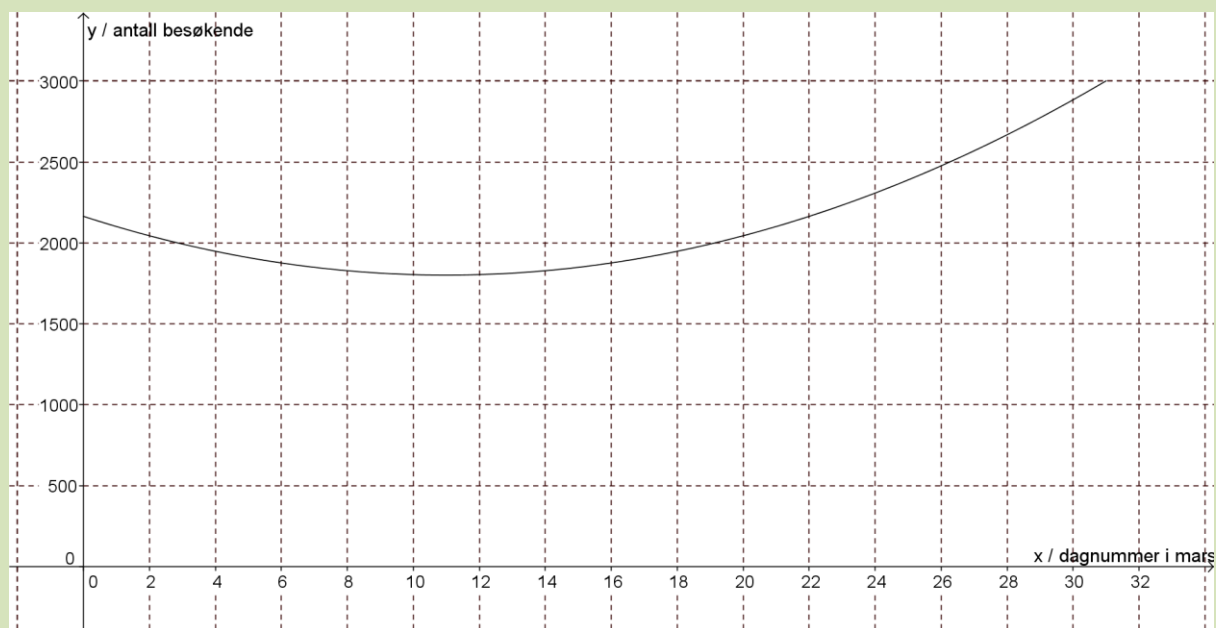
#### Eksempel 13

Funksjonen  $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$  er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret  $x$  i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.

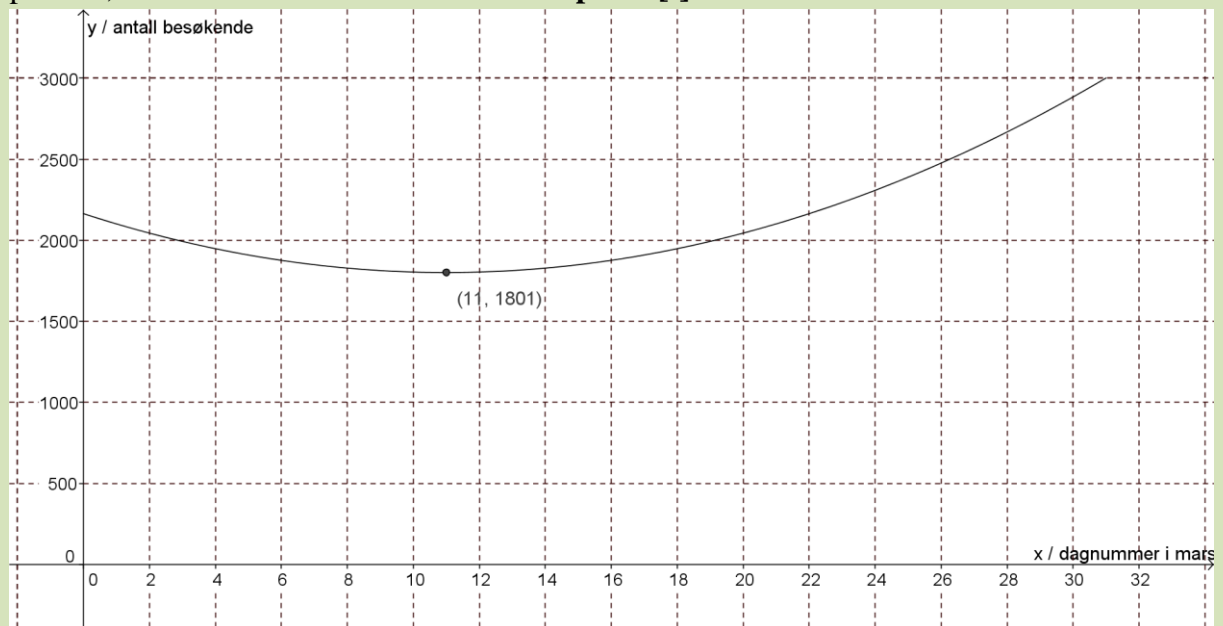
Tegn grafen til funksjonen når  $x$  ligger mellom 1 og 31.

På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon[ $3x^2 - 66x + 2164, 0, 31$ ]**. Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra  $x = 0$  til  $x = 31$ . Så skriver vi en passende tekst på aksene. Etter å ha justert aksene, skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet  $f(x)$ . For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt[f]**.



Vi ser at det var færrest besøkende for  $x = 11$ , altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

### Oppgave 26

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen  $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$ , der  $x$  er prisen på en enhet av varen i kroner.

- Tegn grafen. La  $x$  ligge mellom 0 og 100.
- For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

### Oppgave 27

Funksjonen  $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$  beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune  $x$  år etter år 2000.  $x = 0$  er altså år 2000,  $x = 1$  er år 2001 osv.

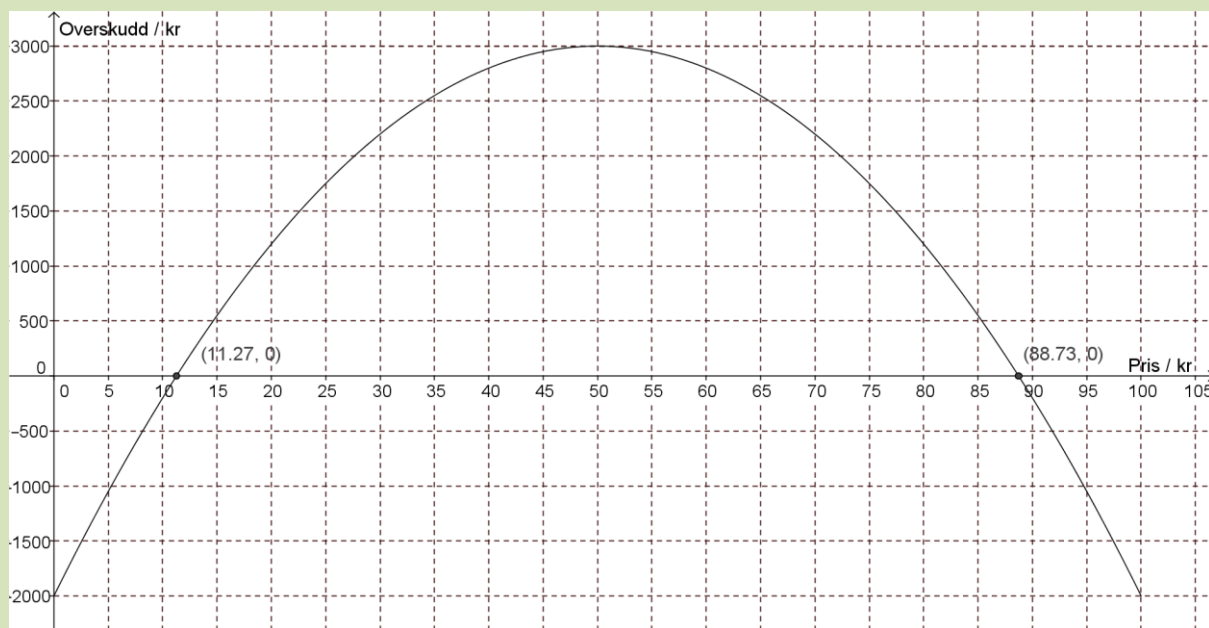
- Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.  
*Her må du altså la  $x$  ligge mellom 0 og 13.*
- Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

## 9. Nullpunkt

Et punkt der en funksjon treffer  $x$ -aksen kalles *nullpunkt*. Da er funksjonsverdien lik null. Vi ser først på et eksempel på hvordan vi finner nullpunkter i Geogebra.

### Eksempel 14

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 26. Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-2x<sup>2</sup>+200x-2000,0,100]**. Geogebra kaller funksjonen for  $f$ . Vi bruker “Skjæring mellom to objekt” og klikker der grafen treffer  $x$ -aksen.



Det ene nullpunktet er  $x = 11,27$ , og har koordinatene  $(11,27, 0)$ . Alle nullpunkt vil ha  $y$ -koordinat 0. Det andre nullpunktet er  $x = 88,73$ , og har koordinatene  $(88,73, 0)$ .

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under  $x$ -aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer  $x$ -aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.

Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.

Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

### Oppgave 28

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen  $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$ , der  $x$  er prisen på en enhet av varen.

- Tegn grafen. La  $x$  ligge mellom 0 og 300.
- For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
- Når går bedriften med overskudd?



## 10. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.

Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

### Eksempel 15

Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 26.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja  $y = 2000$  og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er  $(27.64, 2000)$  og  $(72.36, 2000)$ . Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja  $y = 2000$  mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

### Oppgave 29

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved  $T(x) = -0,24x^2 + 1,2x + 16$ , der  $T(x)$  står for antall celsiusgrader, og  $x$  for antall timer etter kl. 12.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.  
*Her må du altså la  $x$  ligge mellom 0 og 8.*
- Når var temperaturen lik  $17\text{ }^\circ\text{C}$ ?
- Når var temperaturen lavere enn  $17\text{ }^\circ\text{C}$ ?

## 11. Gjennomsnittlig endring

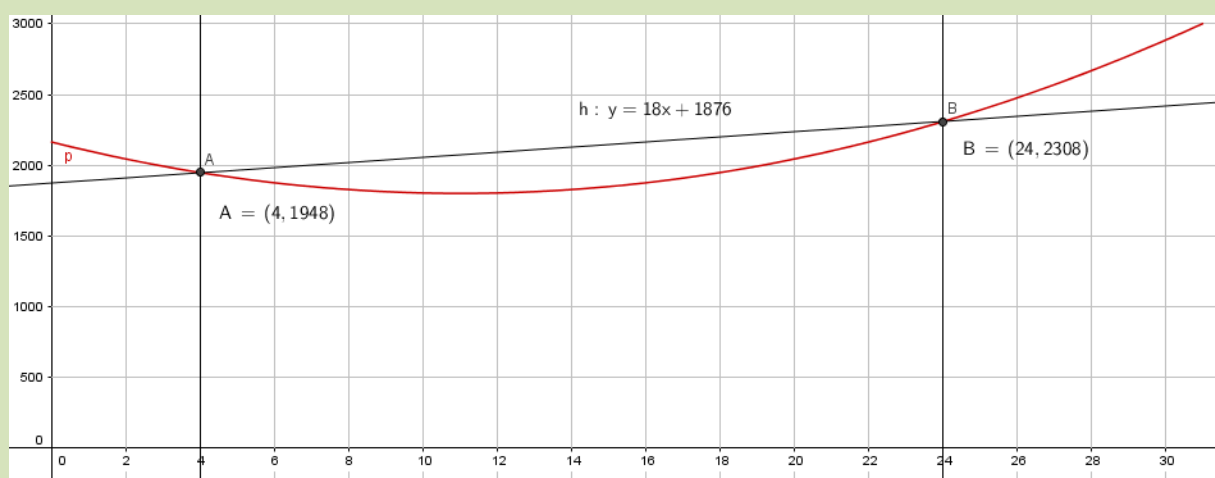
Gjennomsnittlig endring forteller om den lineære utviklingen mellom to verdier, dvs hva verdien øker eller minker med i gjennomsnitt. Metoden vi bruker for å finne den lineære utviklingen er gitt under.

### Eksempel 16

Vi ser på funksjonen fra eksempel 13.

Vi vil finne den gjennomsnittlige endringen i antall besøkende fra 4. mars til 24. mars.

Vi tegner inn linjene  $x = 4$  og  $x = 24$  og finner skjæringspunktene mellom linjene og funksjonen for å finne antall besøkende i alpinanlegget den 4. mars og den 24. mars, henholdsvis.



Deretter trekker vi en linje som går gjennom de to punktene, ved å bruke «Linje». Det er viktig at du ikke bruker «Linje mellom to punkter», da vil du ikke få frem en funksjonsligning.

Når vi har gjort dette vil vi i algebrafeltet få frem en funksjonsligning til den nye lineære linjen. Denne funksjonsligningen vil være på formen  $ax + by = c$ . Ved å høyreklikke og velge «Likning  $y = ax + b$ », vil vi få frem funksjonsligningen der stigningstallet (a) og konstantleddet (b) lett kan leses.

Vi ser da at gjennomsnittlig endring i besøkende fra 4. mars til 24. mars er en øke på 18 mennesker per dag, og vi gir svaret:

Mellom 4. mars og 24. mars vil antall besøkende øke med 18 personer per dag.

### Oppgave 30

En hverdag mellom kl. 15 og kl. 22 var antall kunder i en butikk gitt ved  $K(x) = -2,5x^2 + 10x + 150$ , der  $K(x)$  står for antall kunder, og  $x$  for antall timer etter kl. 12.

- Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 22.
- Finn ut hvilket tidspunkt det var flest kunder og hvor mange kunder det var der da.
- Finn den gjennomsnittlige endringen i antall kunder mellom kl. 16 og kl. 20.

### Eksamensoppgaver

*Oppgavene fra del 1 løses uten hjelpemidler!*

#### E1

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

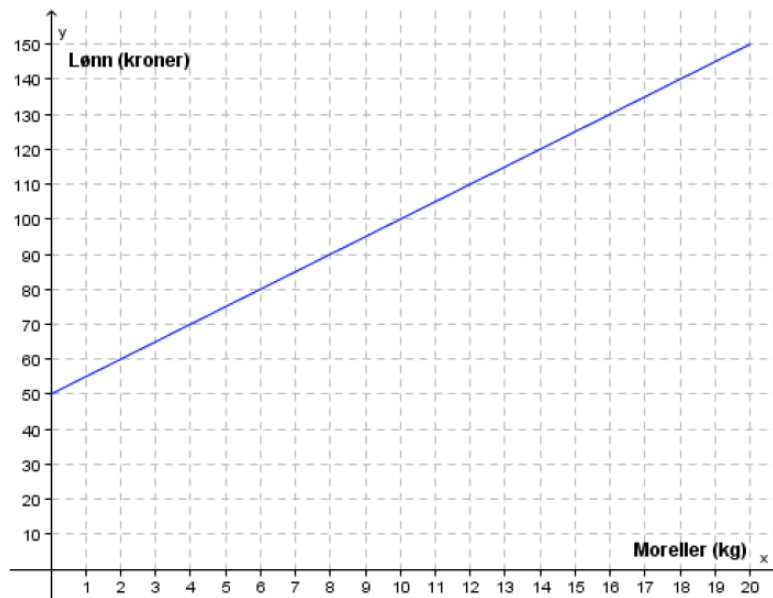
De tre funksjonene  $f$ ,  $g$  og  $h$  er gitt ved

$$f(x) = 5x^2 + 100 \quad g(x) = 100 \cdot 5^x \quad h(x) = 5x + 100$$

Hvilken av de tre funksjonene beskriver lineær vekst? Lag et eksempel der du bruker denne lineære funksjonen til å beskrive en praktisk situasjon.

#### E2

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)



Ivar plukker moreller. Den grafiske framstillingen ovenfor viser hvor mye han tjener i løpet av en time når han plukker  $x$  kg.

Forklar hvordan lønnen til Ivar blir beregnet.

### E3

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1) 



Tre elever kommer med hvert sitt utsagn. Se boblene ovenfor.

- Skisser grafer som illustrerer de tre utsagnene. Lag én graf for hvert utsagn.
- Hvilket utsagn beskriver størrelser som er proporsjonale, og hvilket utsagn beskriver størrelser som er omvendt proporsjonale? Begrunn svarene dine.

### E4

(Eksamen 1P våren 2013, Del 1)

I en tank er det 60 L vann. Hver dag tapper vi 5,0 L vann fra tanken.

- Hvor mye vann er det igjen i tanken etter åtte dager?  
Hvor mange dager går det før tanken er tom?
- Bestem funksjonsuttrykket  $f(x)$  til en funksjon  $f$  som viser hvor mange liter vann det er igjen i tanken etter  $x$  dager.
- Tegn grafen til  $f$ .  
Vis hvordan du kan bruke grafen til å finne svar på spørsmålene i oppgave 7 a).

**E5**

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1)



Antall hektogram smågodt	3	5	10
Pris for påskeegg med smågodt (kroner)	48	60	90

Stian vil kjøpe et påskeegg. Han vil fylle påskeegget med smågodt. Tabellen ovenfor viser sammenhengen mellom hvor mye smågodt han fyller i påskeegget, og hvor mye han må betale.

- Tegn et koordinatsystem med hektogram langs  $x$  – akse og kroner langs  $y$  – akse. Marker verdiene fra tabellen ovenfor som punkter i koordinatsystemet, og tegn en rett linje som går gjennom punktene.
- Bruk linjen i a) til å bestemme prisen for det tomme påskeegget og prisen per hektogram smågodt.
- Hvor mye smågodt er det i et påskeegg som koster 81 kroner?

**E6**

(Eksamen 1P, vår 2016, del 1)

En funksjon  $f$  er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

- Skriv av og fyll ut verditablellen nedenfor.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

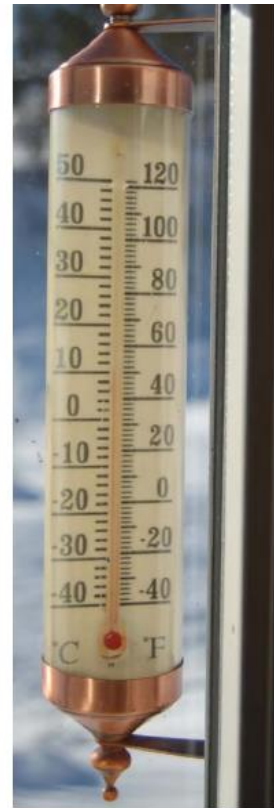
- Tegn grafen til  $f$

## E7

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)



Stig har fått en kakeoppskrift fra tante Mathilde i Amerika. I oppskriften står det at kaken skal stekes på  $350\text{ }^{\circ}\text{F}$ . Han lurer på hvor mange grader celsius dette tilsvarer. Stig har en gradestokk utenfor kjøkkenvinduet som viser både celsiusgrader og fahrenheitgrader. Se bildet til høyre.



- a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk gradestokken til høyre og fyll ut tabellen.

$^{\circ}\text{F}$	0		100
$^{\circ}\text{C}$		10	

- b) Tegn et koordinatsystem med grader fahrenheit langs  $x$ -aksen og grader celsius langs  $y$ -aksen. Marker verdiene fra tabellen i a) som punkter i koordinatsystemet.
- c) Tegn en rett linje som går gjennom punktene. Bruk linjen til å finne ut hvor mange grader celsius Stig skal steke kaken på.

## E8

(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

På et treningssenter har de to ulike prisavtaler.

Avtale 1: Du betaler 160 kr per måned. I tillegg betaler du 20 kroner hver gang du trener

Avtale 2: Du betaler 400 kr per måned. Da kan du trene så mye du vil.

Kari trener på treningssenteret, Hun har valgt avtale 1.

- a) I januar trente hun 8 ganger. I februar trente hun 14 ganger.  
Hvor mye måtte hun betale for treningen hver av disse to månedene?
- b) Tegn en graf som viser sammenhengen mellom antall ganger Kari trener en måned og prisen hun må betale denne måneden.
- c) Bruk grafen i oppgave b) til å bestemme hvor mye hun må trene for at det skal lønne seg med avtale 2.

La  $A$  være antall ganger du trener en måned. La  $P$  være prisen per trening.

- d) For hver av avtalene 1 og 2 skal du avgjøre om  $A$  og  $P$  er
- proporsjonale størrelser
  - omvendt proporsjonale størrelser

**E9**

(Eksamen 1P våren 2012, Del 2)



Leon vil bestille sand for å gjøre badestranden utenfor hytta finere. Han ønsker å få sanden tilkjørt med lastebil. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom prisen for et billass med sand og antall tonn sand på lasset.

Antall tonn sand	10	16
Pris for billasset	2300	3200

Denne sammenhengen kan beskrives ved hjelp av likningen  $y = ax + b$ , der  $x$  tonn er mengden sand og  $y$  kroner er prisen for billasset.

- Bestem tallene  $a$  og  $b$ .
- Gi en praktisk tolkning av tallene  $a$  og  $b$  i denne oppgaven.

**E10**

1P vår 2010, Del 2)

Hvis en bedrift produserer og selger  $x$  enheter av en vare per dag, er overskuddet  $O(x)$  per dag i kroner gitt ved  $O(x) = -10x^2 + 1100x - 10000$ .

- Tegn grafen til  $O$ . Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for at overskuddet skal bli størst mulig?
- Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for å ikke gå med underskudd?

**E11**

(1P vår 2012, Del 2)

Funksjonen gitt ved  $f(x) = -0,05x^2 + 2,60x + 0,50$  viser sammenhengen mellom alder og vekt for en type griser. Her er  $f(x)$  vekten til en gris målt i kilogram når grisen er  $x$  måneder gammel.

- Tegn grafen til  $f$  for  $0 \leq x \leq 25$ .  
Hvor mye veier en gris ved fødselen?
- Hva er alderen til en gris når vekten passerer 20 kg?  
Hvor mye øker vekten i gjennomsnitt per måned fram til da?

**E12**

(1P høst 2012, Del 2)

Frank deltar i et friidrettsmesterskap. Han kaster et spyd.

Grafen til funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = -0,01x^2 + 0,85x + 2,20$  beskriver banen spydet følger gjennom luften.

Her er  $x$  meter målt langs bakken fra stedet hvor Frank står, og  $f(x)$  meter er høyden spydet har over bakken.

- Tegn grafen til  $f$  for  $x \geq 0$ .
- Bestem skjæringspunktene mellom grafen til  $f$  og aksene.  
Bestem toppunktet på grafen til  $f$ .
- Hva forteller svarene i b) om spydkastet?

**E13**

(1P vår 2011, Del 2)

Antall gram CO<sub>2</sub> en bil slipper ut per kilometer er gitt ved

$$f(x) = 0,046x^2 - 6,6x + 386$$

der  $x$  er farten til bilen målt i km/h.

- Tegn grafen til  $f$  i et koordinatsystem for  $x$ -verdier fra 20 km/h til 100 km/h.
- Hvor mange gram CO<sub>2</sub> slipper bilen ut per kilometer, dersom den holder en fart på 60 km/h?
- Hvilken fart gir minst CO<sub>2</sub>-utslipp per kilometer? Hvor stort er CO<sub>2</sub>-utslippet per kilometer da?

Bilen kjører i 80 km/h i en halv time.

- Hvor mye CO<sub>2</sub> slipper bilen ut i løpet av denne halvtimen?

**E14**

(1P høst 2010, Del 2)

Aud arbeider ved et laboratorium. En dag samler hun fluer i en kasse. Hun mater fluene og holder dem isolert i to måneder. Hun finner ut at en god tilnærming for antall fluer i kassen etter  $t$  dager er gitt ved

$$f(t) = -0,007t^3 + 0,5t^2 - 3t + 20$$

- Bruk opplysningene i teksten ovenfor til å avgjøre hvilke  $t$ -verdier du bør bruke når du tegner grafen til  $f$ . Tegn grafen for disse verdiene av  $t$ .
- Finn grafisk og ved regning hvor mange fluer det var i kassen ved starten og ved slutten av eksperimentet.
- I hvilket tidsrom økte antall fluer i kassen?



**E15**

(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen  $h$  gitt ved  $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$  var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.

Ifølge modellen var det  $h(t)$  hjort i kommunen  $t$  år etter 1. januar 1990.

- Tegn grafen til  $h$  for  $0 \leq t \leq 10$ .
- Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?
- Løs likningen  $h(t) = 850$  grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
- Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 til 1. januar 1998?

**E16**

(1P høst 2013, Del 2)

Funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$  viser hvor mange tonn fisk  $f(x)$  det var i en fiskebestand  $x$  år etter år 2000.

- Tegn grafen til  $f$  for  $0 \leq x \leq 10$ .
- Når var fiskebestanden minst?  
Hvor mange tonn var det i fiskebestanden da?
- Bestem skjæringspunktet mellom grafen til  $f$  og linjen med likning  $y = 200$ .  
Hva forteller koordinatene til dette punktet om fiskebestanden?

**E17**

(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$  viser hvor mange personer som var logget på en nettside  $x$  timer etter midnatt et gitt døgn.

- Tegn grafen til  $f$  for  $0 \leq x \leq 24$ .
- Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?  
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
- Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

**E18**

(1P vår 2014, Del 2)

Vi bruker funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = -0,002x^3 + 0,06x^2 - 0,2x + 2, \quad 0 \leq x \leq 24$$

som en modell for vindstyrken  $f(x)$  m/s ved en målestasjon  $x$  timer etter midnatt 18. mai 2014.

- Tegn grafen til  $f$
- Hva var vindstyrken kl. 09.45 i følge modellen?
- Når var vindstyrken minst, og når var den størst, i følge modellen?

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom vindstyrke og betegnelse.

- I hvilke tidsrom i løpet av dette døgnet var det lett bris i følge modellen?

Vindstyrke (m/s)	Betegnelse	Kjennetegn
0,0 – 0,2	Stille	Røyken stiger rett opp
0,3 – 1,5	Flau vind	En kan se vindretningen av måten røyken driver på
1,6 – 3,3	Svak vind	En kan føle vinden. Bladene på trærne rører seg, vinden kan løfte små vimpler
3,4 – 5,4	Lett bris	Løv og småkvister rører seg. Vinden strekker større flagg og vimpler
5,5 – 7,9	Laber bris	Vinden løfter støv og løse papirer, rører på kvister og smågreiner og strekker større flagg og vimpler.
8,0 – 10,7	Frisk bris	Småtrær med løv begynner å svaie. På vann begynner småbølgene å toppe seg

**E19**

(1P våren 2015, Del 2)

En bedrift bruker i en periode vann fra et basseng i produksjonen av et nytt produkt.

Funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = 0,0013x^3 - 0,59x^2 + 61x + 2000 \quad 0 \leq x \leq 300$$

Viser vannstanden  $f(x)$  millimeter i bassenget  $x$  dager etter at fabrikken startet produksjonen av produktet.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til  $f$ .
- Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i bassenget i denne perioden.
- Bruk graftegner til å løse likningen  $f(x) = 3000$   
Hva forteller løsningene om vannstanden i bassenget?
- Bestem stigningstallet for den rette linjen som går gjennom punktene  $(90, f(90))$  og  $(210, f(210))$ . Hva forteller dette stigningstallet om vannstanden i bassenget?

**E20**

(2P-Y våren 2015, Del 2)

Funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8 \quad 0 \leq x \leq 300$$

viser temperaturen  $f(x)$  grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet  $x$  dager etter 31. desember 2013.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til  $f$
- Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur
- Bestem  $f(100)$  og den momentane vekstfarten til  $f$  når  $x = 100$ .  
Hva forteller disse svarene?

**E21**

(2P-Y høsten 2014, Del 2)

En tankbil med gift har vært innblandet i en ulykke. Noe av giften har havnet i en innsjø. Innsjøen brukes som drikkevannskilde.

Giftkonsentrasjonen  $f(x)$  mg/L i drikkevannet  $x$  døgn etter ulykken er gitt ved

$$f(x) = 1,42 \cdot 0,87^x$$

- Bestem giftkonsentrasjonen i drikkevannet rett etter ulykken.  
Hvor mange prosent avtar giftkonsentrasjonen i drikkevannet per døgn?
- Hvor mye avtok giftkonsentrasjonen i drikkevannet i gjennomsnitt per døgn den første uken etter ulykken?

Når giftkonsentrasjonen kommer under 0,40 mg/L, er det ikke lenger farlig å drikke vannet.

- Hvor mange døgn tar det før vannet igjen kan drikkes?

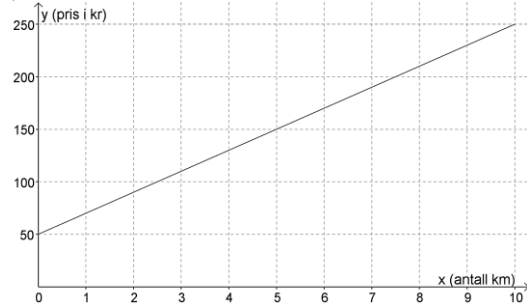
## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 2

- a) 50 kr  
b) 70 kr  
c) 150 kr  
d)

x (antall km)	0	5	10
y (pris)	50	150	250

e)



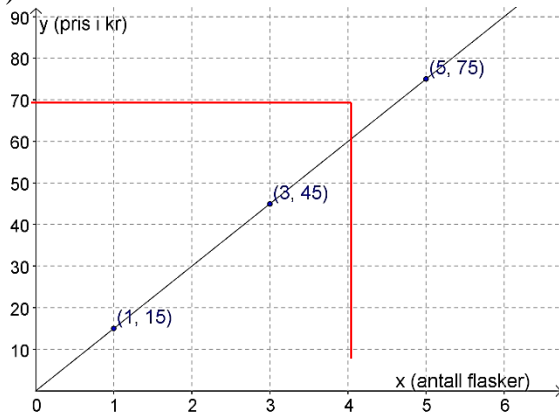
Oppgave 3a) 30 kr b) 10 kr

Oppgave 4.

b) 4 flasker (markert ved de rød linjene)

c)  $y = 15 \cdot x$

a)



Oppgave 5 a) 300 kr b)  $30x + 150$  d) 6

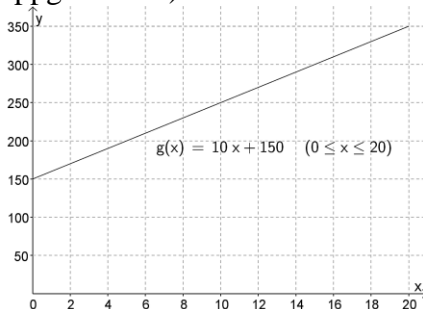
Oppgave 6 a) Linje A. b) linje A: 2. Linje B: 0,5

Oppgave 7 a) 10 b) 10 kr per kg

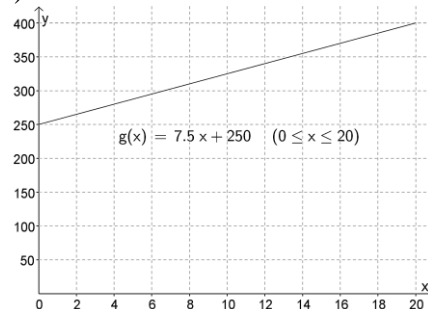
Oppgave 8 Linje A: 2, Linje B: 1

Oppgave 9 0. (Fordi det ikke koster noe hvis du ikke kjøper noe)

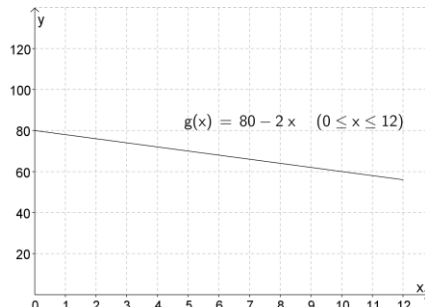
Oppgave 10 a)



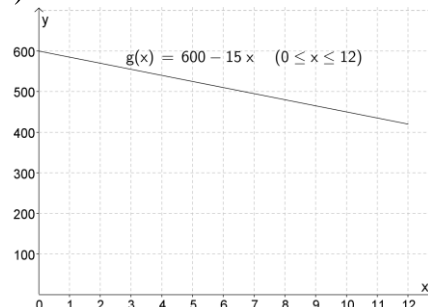
b)



c)



d)



Oppgave 11b) 480 c) 14 ganger
Oppgave 12 b) 13,75 kr. c) 21,67 min (21 min og 40 sek)
Oppgave 13 b) $300 - 60 = 240$ sider igjen å lese c) $8,33 \approx 9$ dager
Oppgave 14 a) 1500 kr b) 25 kr c) 100 timer d) $T(x) = 25x + 1500$
Oppgave 15 a) 2000 kr b) 0,60 kr c) 12800 kr d) 20000 kWh e) $K(x) = 0,60x + 2000$
Oppgave 16 a) 1200 kr b) 1 kr c) $K(x) = x + 1200$
Oppgave 17a) $V(x) = 64000 - 8000x$ b) -8000, 64000 c) 8 år e) 4 år
Oppgave 18 a) $S(x) = 4000 - 250x$ c) 1000 kr d) 16 mnd = 1 år 4 mnd
Oppgave 19 a) 65 L b) 0,5 L/mil c) $b(x) = 65 - 0,5x$ d) 65 mil e) ca. 120 mil
Oppgave 20 a) 1) -20 kr, 2) 140 kr b) $f(x) = 8x - 100$ c) 8, -100 e) 13 kurver
Oppgave 21 a) 1) -12 grader, 2) 6 grader b) $T(t) = 2t - 18$ c) 2, -18 e) 9 timer
Oppgave 22 a) $L(x) = 120x - 50$ c) 430 kr d) 6 timer
Oppgave 23 14 km
Oppgave 24 a) 1) 3400 kr, 2) 2500 kr b) 1) 4600 kr, 2) 5000 kr c) $F(x) = 120x + 2200, G(x) = 250x$ e) 17 uker ( $x=16,9$ ) f) 4240 og 4250 kr
Oppgave 25. a) $M(x) = 18x + 700, J(x) = 30x$ b) 59
Oppgave 26 b) $x = 50, 3000$ kr
Oppgave 27 b) 2008, ca. 10 000
Oppgave 28 b) 5,08 kr ( $x=5.08$ ) og 294,91 kr ( $x = 294.91$ ) c) Mellom 5,08 kr og 294,91 kr.
Oppgave 29 b) ca. kl. 13 ( $x = 1.06$ ) og ca. kl 16 ( $x = 3.94$ ) c) Mellom kl. 13 og kl. 16.
Oppgave 30 b) klokken 14, 160 kunder c) minker med 20 kunder per time

## Fasit eksamensoppgaver

E1. $h(x)$
E2. 50 kr fast timelønn pluss 5 kr per kurv
E3 Proporsjonale: Kari. Omvendt proporsjonale: Grete
E4. a) 20 L , 12 d b) $f(x) = 60 - 5x$
E5 b) 30 kr, 6 kr/hg c) 8,5 hg
E6 Verdier for $f(x)$ : $-7, 0, 5, 8, 9, 8, 5, 0, -7$
E7. c) ca. 180 grader celsius
E8. a) januar: 320 kr. februar: 440 kr b) Uttrykk: $y = 160 + 20 \cdot x$ c) Mer enn 12 ganger. d) Avtale 1: A og P er ikke proporsjonale (eller omvendt proporsjonale) størrelser. Avtale 2: A og P er omvendt proporsjonale størrelser
E9. a) $a = 150$ kr, $b = 800$ kr b) $a =$ prisen per tonn, $b =$ fast avgift for kjøringen
E10 a) 55 b) mellom 10 og 100
E11. a) 0,50 kg b) ca. 9 måneder, 0,975 kg/måned
E12. b) (0, 2.20), (87.5, 0), (42.5, 20.3). c) Spydet er 2,20 m over bakken i det det forlater hånda til spydkasteren. Sydkastet er på sitt høyeste 42,5 m fra kaststedet, da er det 20,3 m over bakken. Lengden på spydkastet er 87,5 m
E13 b) 156 g/km c) 72 km/h, 149 g/km d) 6100 g = 6,1 kg
E14. b) 20, ca. 130 c) fra 3 til 44 dager
E15. b) I februar 1992, ca. 870 hjort c) I mai 1991 og januar 1993
E16. b) 51 tonn midt i 2008 c) $x = 5,91$ , 200 tonn fisk i slutten av 2005
E17. b) kl. 17, 13000 c) mellom ca. kl. 5 og 24
E18. b) 3,9 m/s c) Minst ca. kl. 02 ( $x=1,84$ ), størst ca. kl. 18 ( $x=18,16$ ) d) Mellom ca. kl. 08.30 og 13.45 ( $x=8,48$ og $x = 13,77$ ) og etter ca. kl 22 ( $x=21,88$ )
E19. b) Ca. 3200 mm (3206,8). C) $x=122,84$ og $x=20,14$ . Vannstanden er 3000 mm (3,0 m) etter ca. 20 dager og etter ca. 123 dager d) $a = -24,89$ . I denne perioden synker vannstanden med ca. 25 mm per dag.
E20. b) 13,3 grader. c) $f(100) = 8,5$ og momentan vekstfart til $f$ når $x = 100$ er 0,09. Dvs at temperaturen 100 dager etter nyttår var 8,5 grader, og den steg med 0,09 grader per dag
E21. a) 1,42 mg/L. Avtar med 13 % per døgn. b) 0,126 mg/døgn. c) Ca. 9 døgn ( $x = 9,1$ )

# Kapittel 9. Sannsynlighetsregning



## Mål for Kapittel 9, Sannsynlighetsregning.

### Kompetansemål

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- lage eksempler og simuleringer av tilfeldige hendelser og redegjøre for begrepet sannsynlighet
- beregne sannsynlighet ved å telle opp gunstige og mulige utfall, systematisere opptellinger ved hjelp av krysstabeller, venndiagram og valgtre og bruke addisjonssetningen og produktsetningen i praktiske sammenhenger

### Læringsmål

Etter at du har arbeidet med dette kapitlet skal du sette kryss i de boksene som tilhører de læringsmålene du har oppnådd. Det er viktig at du er ærlig og at du ikke krysser i de boksene som du føler at du ikke kan. På den måten vet du på hvilket område du må forbedre deg.

Etter dette kapitlet vet jeg

- hva sannsynlighet er
- hva gunstige utfall er i ulike oppgaver
- hva forskjellen på uniform og ikke-uniform sannsynlighet er
- hvordan jeg ordner informasjon i en krysstabell, et venndiagram og et valgtre
- hva tilbakelegging betyr i sannsynlighetsregning

Etter dette kapitlet kan jeg forklare

- hvordan jeg finner sannsynlighet i enkle tilfeller uten tilbakelegging
- i hvilke tilfeller en bruker addisjonssetningen og produktsetningen
- hvorfor brøkregning er viktig i sannsynlighet
- hva en krysstabell representerer
- hvordan tilbakelegging påvirker sannsynligheten for en hendelse

Etter dette kapitlet kan jeg vurdere og

- lage og løse sammensatte tekstopp-gaver knyttet til sannsynlighet
- utføre beregninger av sannsynlighet på bakgrunn av tekst og på bakgrunn av en krysstabell
- diskutere sannsynlighet brukt i dagligtale
- se sammenhenger ved hjelp av tabeller, diagram og funksjonsuttrykk
- vurdere og sortere informasjon oppgitt i tekst

## Utforskende oppgave – Første hest til 10

I denne oppgaven skal dere jobbe sammen i par.

På spillebrettet ser dere 12 hester som står klare ved startstreken og hvor målet er å være første hest til rute nummer 10. Hestene flytter på følgende måte:

- En av dere kaster 2 terninger, og legger sammen antall øyne på terningene. Summen forteller hvilken hest som skal flytte.
- Den andre setter et kryss i første ledige rute i kolonnen til riktig hest.

Før dere begynner:

- Velg dere tre hester hver. Skriv forbokstaven under hesten for å vise hvem som «eier» hvilken hest.
- Bli enige om hvem som kaster og hvem som setter kryss.
- Avgjør en premie til vinneren, dersom en av dere eier vinnerhesten.
- Når en hest har kommet til rute nummer 10 er konkurransen over, uavhengig av om noen eier denne hesten.

Når alle er ferdige lager læreren statistikk over resultatene. Vi skal da diskutere:

- Hvilke hester blir kastet oftest? Hvorfor skjer dette?
- Ligner resultatet du fikk på klassens resultat? Hvis det ikke gjør det, hva tror du grunnen er til det?
- Hvor mange ganger har hest nummer 1 flyttet? Hva er grunnen til dette?
- Dersom du skulle spilt dette en gang til, hvilke hester ville du valgt? Hvorfor ville du valgt disse hestene?
- Velg deg en hest, og tenk gjennom følgende:
  - På hvor mange ulike måter kan terningene lande slik at din hest skal flytte?
  - På hvor mange ulike måter kan to terninger lande?
  - Kan du stille opp dette som en brøk, hvor du har antall ønskede kombinasjoner i telleren og antall mulige kombinasjoner i nevneren?
  - Hvorfor er antall muligheter og antall hester ulikt?
- Still opp en slik brøk for alle hestene. Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for klassen? Er det noen sammenheng mellom brøkene og resultatet for alle klassene våren 2016?
- Hvordan ville dette spillet sett ut dersom dere skulle kastet 3 terninger? Hvilke hester ville du valgt da?



## 1. Innledning

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.

I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er 80 % sannsynlig at Manchester United kommer til å slå Chelsea i lørdagens fotballkamp, eller at det bare er 10 % sannsynlig at Sara får 5 på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Manchester U. vil vinne, og at Sara antagelig ikke vil få 5. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotball-lagene og Sara har prestert tidligere. Hvis vi er helt sikre på at noe bestemt vil skje, sier vi ofte at “det er 100 % sikkert”. Er vi sikre på at det ikke vil skje, kan vi si “det er null sannsynlighet” eller “null sjanse”.

Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*. De enkleste regnemåtene skal du lære i dette kapitlet.

Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill.

## 2. Hva er sannsynlighet?

Anta at vi har undersøkt kjønn til 10 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	Antall	Antall i prosent
Gutt	5140	51,4 %
Jente	4860	48,6 %
Gutt eller jente	10000	100 %

Den andre kolonnen viser hvor mange tilfeller det er av hvert utfall.

Siste kolonne viser hvor mange prosent av forsøkene hvert av de to mulige utfallene forekommer.

Etter å ha gjort denne undersøkelsen, kan vi si at sannsynligheten for at et tilfeldig valgt barn er en gutt, er 51,4 %, eller 0,514. Sannsynligheten for at det er en jente, er 48,6 %, eller 0,486. Det skriver vi kort slik:

$$P(\text{gutt}) = 0,514, P(\text{jente}) = 0,486.$$

Vi bruker  $P$  fordi sannsynlighet heter “probability” på engelsk.

Sannsynligheten for et bestemt utfall viser i hvor stor prosent av et forsøk dette utfallet forekommer, hvis vi gjør et forsøk *mange* ganger.

Verdien blir mer og mer nøyaktig jo flere ganger vi gjør forsøket.

## Oppgave 1

På Hellerud videregående skole er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.

- Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente?
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er gutt?

## Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.

- Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann er fargeblind?
- Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann *ikke* er fargeblind?

## 3. Sannsynlighetsregning når alle utfall er like sannsynlige

### 3.1. Innledning

Hvis vi kaster et pengestykke har vi to mulige utfall. Vi kan få mynt, eller kron. Begge utfallene er like sannsynlige. Det betyr at  $P(M) = 1/2$  og  $P(K) = 1/2$ . Fordi sannsynlighetene her er *nøyaktig* 50 % (0,50), bruker vi gjerne brøken  $\frac{1}{2}$  isteden.

Her er noen eksempler på forsøk og de mulige utfallene

Forsøk	Mulige utfall
Kaste et pengestykke	Mynt, kron
Kaste en terning	1, 2, 3, 4, 5, 6
Trekke et kort fra en kortstokk med 52 kort	Hjertes ess, spar to, ... (tilsammen 52)
Bestemme kjønn til nyfødt barn	Gutt, jente
Bestemme antall jenter i en trebarnsfamilie	0, 1, 2, 3
Undersøke om en person er fargeblind	Fargeblind, ikke fargeblind
Undersøke fabrikkmerket på mobilen til en person	Apple, Samsung, LG, Nokia, HTC,...

### 3.2. Hendelser

Hva er sannsynligheten for å trekke en *hjerter* fra en kortstokk? Det er 13 hjerter i stokken slik at det er 13 av 52 mulige utfall som gir en hjerter.

Vi sier at "hjerter" er en *hendelse* som består av 13 utfall. Disse utfallene kaller vi *gunstige utfall* for hendelsen "hjerter". (Ordet "gunstig" betyr "passende" eller "bra".) Da finner vi sannsynligheten for at vi trekker et hjerterkort slik

$$P(\text{hjerter}) = \frac{13}{52} = \frac{13}{13 \cdot 4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

(her har vi skrevet sannsynligheten som både brøk, desimaltall og prosent).

Hvis alle utfallene er like sannsynlige, finner vi sannsynligheten for en *hendelse* slik:

$$P(\text{ en hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Hvis vi kaster to terninger, kan vi kalle summen av øynene for en hendelse. Summen kan variere fra 2 til 12. Det er  $6 \cdot 6 = 36$  mulige utfall i dette forsøket. Hendelsen “summen av øynene er 7” har seks gunstige utfall: (1+6), (2+5), (3+4), (4+3), (5+2), (6+1). Da får vi

$$P(\text{sum øyne lik 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

### Oppgave 3

- Hva er sannsynligheten  $P(\text{fem})$  for å få en *femmer* når vi kaster en terning?
- Hva er sannsynligheten  $P(\text{partall})$  for å få et *partall* når vi kaster en terning?
- Hva er sannsynligheten for å trekke *hjerter ess* fra en kortstokk?
- Hva er sannsynligheten for å trekke *ruter* fra en kortstokk?
- Hva er sannsynligheten for å trekke et “*svart kort*” fra en kortstokk?
- Hvordan ville du gå fram for å finne ut om alle fødselsdatoer er like sannsynlige? Anta at de faktisk er det. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person er født 1. mai? Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

### Oppgave 4

Finn sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger er lik

- 5
- 10
- 12

### 3.3. Multiplikasjonsprinsippet: Hvordan finne antall mulige utfall

Anta at en restaurant tilbyr 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Du kan ikke bestemme deg og velger derfor forrett, hovedrett og dessert ved å sette ned fingeren i menyen helt tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å velge kamskjell til forrett, laks til hovedrett og sjokolademousse til dessert (hvis alle disse står på menyen)?

Vi antar at alle valg av de tre rettene er like sannsynlige, og trenger da antall mulige utfall. Hver av de tre forrettene kan vi kombinere med fem hovedretter. Det gir  $3 \cdot 5 = 15$  mulige kombinasjoner. Hver av disse 15 kombinasjonene kan vi kombinere med 4 desserter. Det gir tilsammen  $15 \cdot 4 = 60$  mulige treretters middager. Sannsynligheten for et bestemt treretters valg blir da  $1/60$ .

**Multiplikasjonsprinsippet:** Hvis vi skal gjøre flere valg etter hverandre, finner vi antall mulige utfall ved å multiplisere antall muligheter i hvert av valgene.

#### Eksempel 1

Ida kan velge mellom sju sjokolader. For at det ikke skal bli for usunt, må hun også velge en av fire frukter. Hun klarer ikke å bestemme seg så hun trekker lodd for å velge. Hva er sannsynligheten for at hun trekker firkløver og pære?



Antall mulige utfall av trekningen er  $7 \cdot 4 = 28$ .

Hvis hun trekker lodd, kan vi anta at alle de 28 utfallene er like sannsynlige. Derfor er

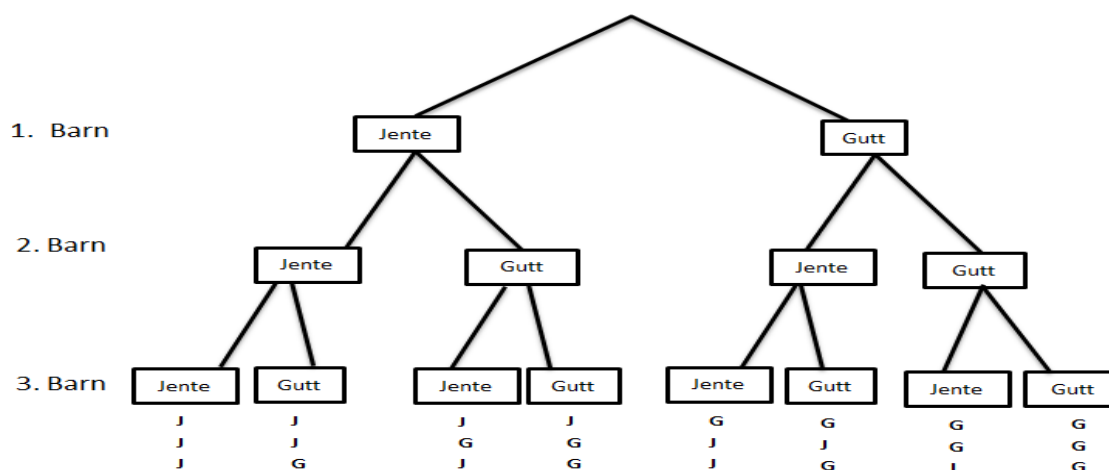
$$P(\text{firkløver og pære}) = \frac{1}{28}.$$

### Eksempel 2

Hva er sannsynligheten for at det første barnet er en gutt, og de to neste er jenter, i en trebarnsfamilie? Anta at alle utfall er like sannsynlige.

Antall mulige utfall er her  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Derfor er  $P(GJJ) = \frac{1}{8}$ .

De mulige utfallene i eksempel 2 kan framstilles i et *valgtre*



Her kan vi se at GJJ er en av åtte muligheter totalt. Slik kunne vi brukt valgtreet og funnet at  $P(GJJ) = \frac{1}{8}$ , akkurat som vi fant i eksempelet over.

### Oppgave 5

- Hvor mange mulige utfall er det hvis vi kaster tre pengestykker?
- Hva er sannsynligheten for at vi skal få MMK? (mynt på første pengestykke, mynt på andre og kron på tredje)?
- Tegn et valgtre som ligner på valgtreet ovenfor, og som viser de ulike utfallene i dette forsøket.

### Oppgave 6

Vi skal tippe utfallet av to fotballkamper. Hver kamp kan gi hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

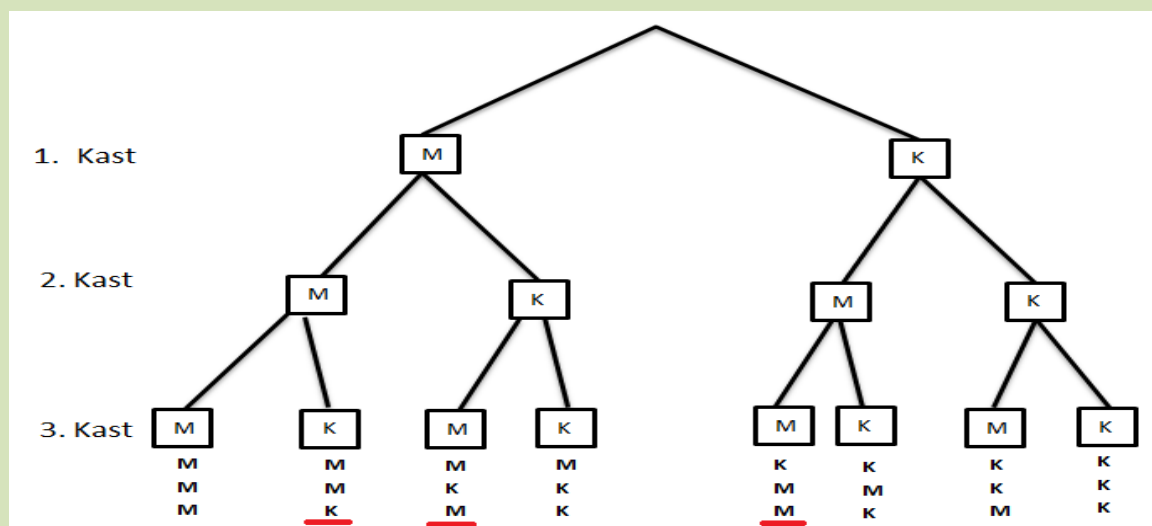
- Hvor mange mulige utfall er det i denne tippekonsurransen?
- Lag et valgtre som viser de mulige utfallene.
- Hvor mange mulige utfall er det hvis man tipper resultatet av 12 kamper?

### Eksempel 3

Vi kaster tre pengestykker etter hverandre.

- Finnsannsynligheten for 2 mynt og en kron.
- Finnsannsynligheten for 1 mynt og to kron

Tegner et valgtre som gir oss oversikt over de forskjellige utfallene.



a) Vi ser at vi har 8 forskjellige utfall. Av disse gir tre forskjellige to mynt og 1 kron. Dette er MMK, MKM og KMM som er markert i rødt. Sannsynligheter for to mynt og en kron er dermed  $\frac{3}{8}$ .

b) Av valgtreet ser vi at det er tre muligheter for å få 1 mynt og to kron. MKK, KMK og KKM.

Sannsynligheter for 1 mynt og to kron er dermed  $\frac{3}{8}$ .

### Oppgave 7

Vi kaster to pengestykker etter hverandre.

- Tegn et valgtre som viser de mulige utfallene vi kan få.
- Finnsannsynligheten for 2 kron.
- Finnsannsynligheten for 2 mynt.
- Finnsannsynligheten for 1 mynt og 1 kron.

### Oppgave 8

CMT er en arvelig nervesykdom. I gjennomsnitt vil halvparten av barna hvor en av foreldrene har CMT, arve sykdommen.

I en familie har mor CMT. Familien har tre barn.

- Finnsannsynligheten for at alle tre barna har CMT.
- Finnsannsynligheten for at to av barna har CMT.
- Finnsannsynligheten for at ett av barna har CMT.
- Finnsannsynligheten for at ingen av barna har CMT.

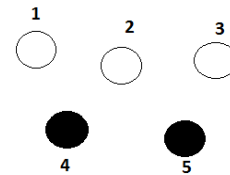
## Oppgave 9

- a) Finn sannsynligheten for at det er tre gutter og ei jente i en firebarnsfamilie. Vi regner alle de mulige utfallene som like sannsynlige (ikke helt riktig).
- b) Vi undersøker 1000 firebarnsfamilier. I omtrent hvor mange av disse vil vi finne tre gutter?



### 3.4. Sammensatte forsøk. Produktsetningen.

Vi har fem nummererte kuler, tre hvite og to svarte. Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at både den første og den andre er hvite *når vi legger den første tilbake før vi trekker den andre*?



I følge multiplikasjonsprinsippet har vi  $5 \cdot 5 = 25$  mulige utfall. 9 av disse, nemlig (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) gir oss hendelsen “første er hvit og andre er hvit”. Da får vi :

$$P(\text{første er hvit og andre er hvit}) = \frac{9}{25}.$$

Trekningen av de to kulene er et eksempel på et *sammensatt forsøk*. Forsøket består av to *delforsøk*.

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen  $A$  i første delforsøk og hendelsen  $B$  i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for  $B$  påvirkes av at  $A$  har skjedd.

I trekningsforsøket vårt er hendelsen  $A$  “første er hvit” og hendelsen  $B$  er “andre er hvit”. Det er for begge hendelsene 3 gunstige utfall av 5 mulige. Derfor har vi:

$$P(\text{første hvit og andre hvit}) = P(\text{første hvit}) \cdot P(\text{andre hvit}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

som er samme svar som vi fant på en annen måte ovenfor.

## Oppgave 10

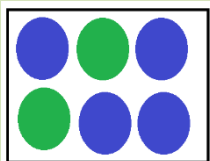
Finn sannsynligheten for å trekke to *svarte* kuler i eksemplet ovenfor (hvor vi legger den første kula tilbake før vi trekker den andre). Løs oppgaven både ved å se på antall gunstige og mulige utfall i det sammensatte forsøket, og ved å bruke produktsetningen.

## Oppgave 11

Finn sannsynligheten for å trekke to svarte kuler i eksemplet ovenfor når vi *ikke* legger den første kula tilbake før vi trekker den andre.

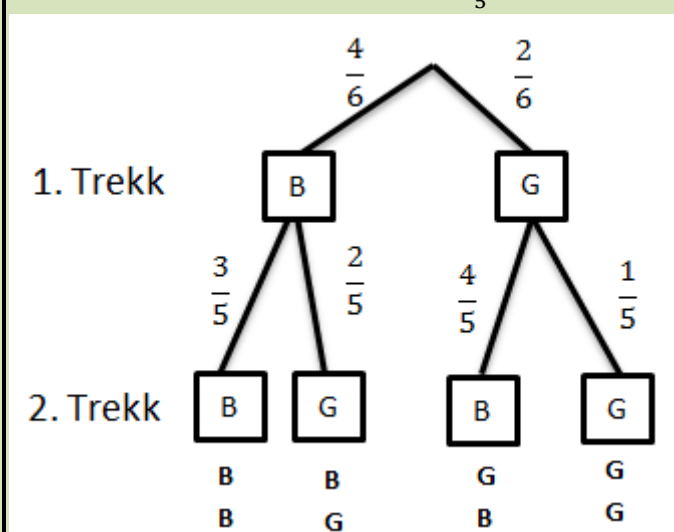
#### Eksempel 4

I en eske er det fire blå og to grønne kuler. Kenneth trekker tilfeldig to av kulene.



- Bestem sannsynligheten for at han trekker to blå kuler.
- Bestem sannsynligheten for at han trekker to grønne kuler.

Velger å tegne et valgtre først. Brøken angir sannsynligheten for hver mulighet. F.eks er det  $\frac{4}{6}$  sjanse for å få blå på det første trekket. Hvis vi fikk blå på det første trekket er det kun 3 blå kuler igjen. Sannsynligheten blir da  $\frac{3}{5}$  for å få blå på det andre trekket.



- Vi bruker produksetningen:

$$P(\text{første blå og andre blå}) = P(\text{første blå}) * P(\text{andre blå}) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

Sannsynligheten for to blå er  $\frac{6}{15}$

- $(\text{begge grønn}) = P(\text{første grønn}) * P(\text{andre grønn}) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Sannsynligheten for to grønn er  $\frac{1}{15}$

#### Oppgave 12

I en klasse arrangeres et lotteri med 40 lodd. Hver elev skal trekke to lodd, og det er gevinst på tre av de 40 loddene. Ida er den første til å trekke og hun tar to lodd.

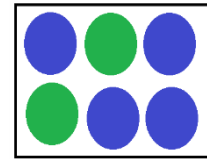
Hva er sannsynligheten for at hun har vunnet på begge loddene?





### 3.5. Addisjonssetningen: En annen måte å beregne sannsynlighet for hendelser

Vi ser tilbake på eksempel 4 med kuletreking.  
Hva er sannsynligheten for å trekke én blå og én grønn kule?



Produktsetningen alene kan bare gi oss sannsynlighetene for at den første er blå og den andre grønn, eller omvendt. Slik:

$$P(BG) = P(\text{første blå og andre grønn}) = P(\text{første blå}) \cdot P(\text{andre grønn}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(GB) = P(\text{første grønn og andre blå}) = P(\text{første grønn}) \cdot P(\text{andre blå}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for en blå og en grønn kule ved å *addere* (legge sammen) disse to sannsynlighetene:

$$P(\text{en grønn og en blå}) = P(BG) + P(GB) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Dette er et eksempel på bruk av *addisjonssetningen* for sannsynligheter.

**Addisjonssetningen.** Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A* eller hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

$$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B).$$

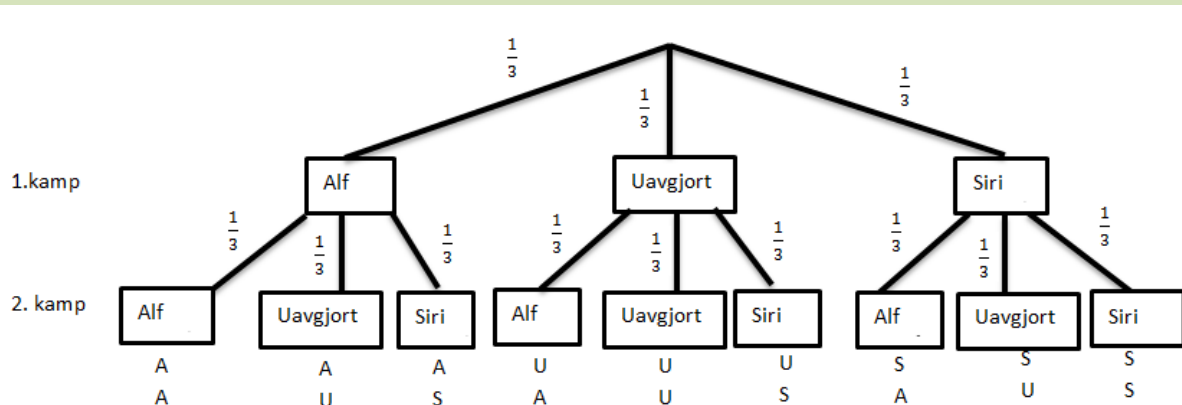
Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig.

#### Eksempel 5

Alf og Siri spiller “stein – papir – saks” to ganger på rad.

- Hva er sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre?
- Hva er sannsynligheten for at minst en av kampene blir uavgjort?

Velger å tegne et valgtre først. Alf betyr at Alf vinner, Siri betyr at Siri vinner.



a) At Siri vinner første, og får uavgjort på andre tilsvarer utfallet SU, i valgtreet.

$$P(SU) = P(\text{Siri vinner første}) \cdot P(\text{Uavgjort på andre}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre er  $\frac{1}{9}$ .

b) Her kan vi bruke addisjonssetningen. Vi ser at minst en av kampene blir uavgjort betyr at vi kan få: AU, UA, UU, US eller SU. Alle disse resultatene er like sannsynlig.

$$P(\text{Minst en av kampene blir uavgjort}) = P(AU) + P(UA) + P(UU) + P(US) + P(SU)$$

$$P(\text{Minst en av kampene blir uavgjort}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Sannsynligheten for at minst en kamp blir uavgjort er  $\frac{5}{9}$ .

### Eksempel 6

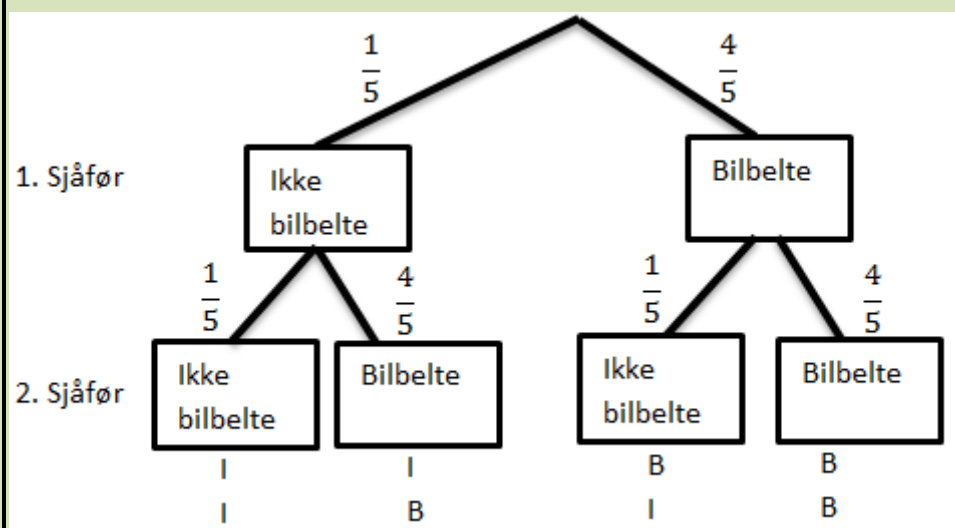
Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere.

a) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte?

b) Hva er sannsynligheten for at *en* bruker bilbelte?

Sannsynligheten for at han ikke bruker bilbelte må være 20 %.

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$  og  $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ . Lager et valgtre for å få oversikt.



a) At begge bruker bilbelte tilsvarer alternativet merket BB.  $P(BB) =$

$$P(\text{første bruker bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker bilbelte}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$$

Sannsynligheten for at begge bruker bilbelte er 64 %.

b) At kun *en* bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.

$$P(IB) = P(\text{første bruker ikke bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker bilbelte}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(BI) = P(\text{første bruker bilbelte}) \cdot P(\text{andre bruker ikke bilbelte}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(\text{en bruker bilbelte}) = P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 32\%$$

Sannsynligheten for at kun en bruker bilbelte er 32%.

### Oppgave 13

Vi går tilbake til oppgave 12. Hva er sannsynligheten for at Ida vinner på det ene loddet, men ikke på det andre?

### Oppgave 14

I en klasse er det 18 jenter og 12 gutter. Læreren trekker tilfeldig to elever til framføring.

- Hva er sannsynligheten for at det trekkes to jenter?
- Hva er sannsynligheten for at det trekkes to gutter?
- Hva er sannsynligheten for at det trekkes ei jente og en gutt?

### Eksempel 7

Vi trekker to kort fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Hva er sannsynligheten for å trekke to ess?

Det er 4 ess i stokken. Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{første er ess og andre er ess}) = P(\text{første er ess}) \cdot P(\text{andre er ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

Hva er sannsynligheten for å trekke to kort med samme verdi? Det vil si to ess, ..., to seksere, ..., to konger (13 ulike verdier).

Fordi det er fire kort av hver verdi, må sannsynlighetene for å trekke to toere, to treere osv. alle være lik  $1/221$ . Addisjonssetningen sier at vi må legge sammen 13 sannsynligheter, hver med verdi  $1/221$ . Vi får da

$$P(\text{to like}) = 13 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{13}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

### Oppgave 15

Vi trekker tre kort fra en kortstokk.

- Hva er sannsynligheten for at vi trekker tre spar?

De fire fargene i kortstokken er spar (♠), hjerter (♥), ruter (♦) og kløver (♣).

- Hva er sannsynligheten for at alle tre kortene har samme farge?

### 3.6. Krysstabeller

Mange eksamensoppgaver handler om en gruppe mennesker som er delt i fire undergrupper. Ofte skal du finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person tilhører en eller flere av disse gruppene.

#### Eksempel 8

I en klasse er det 30 elever som har valgt fag for neste år.

- 9 av elevene har valgt engelsk
- 14 av elevene har valgt matematikk
- 10 elever har ikke valgt noen av disse to fagene

For å få god oversikt over disse tallene, kan vi legge dem inn i en *krysstabell* med fire rader og fire kolonner:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk			<b>14</b>
Ikke matematikk		<b>10</b>	
Sum	<b>9</b>		<b>30</b>

Legg nøye merke til hvor tallene er plassert.

Det spiller ingen rolle om du tar engelsk i 1. kolonne istedenfor i 1. rad.

Nå er det lett å fylle ut de tomme rutene:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk	3	11	<b>14</b>
Ikke matematikk	6	<b>10</b>	16
Sum	<b>9</b>	21	<b>30</b>

Kontroller at alle de seks summene stemmer.

Vi trekker en tilfeldig elev fra klassen. Da kan vi bruke tabellen til å finne noen sannsynligheter:

Sannsynligheten for at eleven har valgt både matematikk og engelsk:  $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ .

Sannsynligheten for at eleven har engelsk, men ikke matematikk:  $P = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ .

Sannsynligheten for at en elev som har valgt matematikk også har valgt engelsk:  $P = \frac{3}{14}$ .

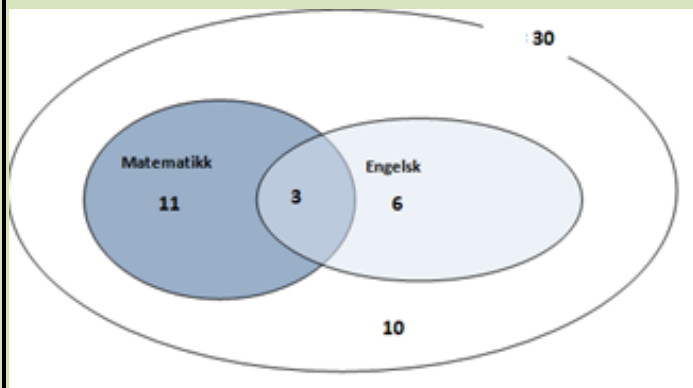
Sannsynligheten for at en elev har valgt matematikk eller engelsk:

$$P = \frac{6 + 11 + 3}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Vi legger altså sammen de som bare har engelsk, de som bare har matematikk og de som har begge deler. “**Matematikk eller engelsk**“ betyr enten matematikk eller engelsk eller begge deler!

### Eksempel 9

Opplysningene i forrige eksempel kan også framstilles i et *Venn-diagram*



Et Venn-diagram er kanskje vanskeligere å lage enn en krysstabell, men kan være lettere å forstå. Her ser vi for eksempel tydelig at det er  $11+3+6 = 20$  elever som har valgt matematikk eller engelsk.

### Oppgave 16

En klasse har 28 elever. Av dem har 12 elever biologi og 8 har kjemi. 4 elever har både biologi og kjemi.

- Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.
- Systematiser opplysningene ovenfor i et Venn-diagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra denne klassen.

- Finn sannsynligheten for at denne eleven har biologi.
- Finn sannsynligheten for at eleven har biologi eller kjemi. (Se siste linje i eksempel 4.)
- Det viser seg at den valgte eleven har biologi. Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har kjemi?



### Eksempel 10

Klasserommet til 1STB skal males, og rommet skal få nye gardiner. Elevene blir enige om at rommet skal males hvitt eller lysegult, mens gardinene skal være grå eller røde. De skriver valgene sine på to lapper og putter lappene i to krukker. Tabellene viser ønskene til de 30 elevene i klassen:

Rommet		Gardinene	
Hvitt	18	Grå	16
Lysegult	12	Røde	14

For å bestemme fargen på malingen og gardinene, trekkes det en lapp fra hver krukke.

Sannsynligheten for at det blir hvit maling blir da  $P(\text{hvit maling}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ .

Vi bruker produktsetningen for å finne sannsynligheten for at det blir hvit maling og røde

gardiner:  $P(\text{hvit maling og røde gardiner}) = \frac{18}{30} \cdot \frac{14}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15} = \frac{21}{75} = 0,28$ .

Det viser seg at 5 elever ønsker lysegul maling og røde gardiner.

Vi vil ved hjelp av denne opplysningen finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ønsker hvit maling og grå gardiner. Da lager vi først en krysstabell:

	Hvit maling	Lysegul maling	Sum
Grå gardiner	9	7	<b>16</b>
Røde gardiner	9	5	<b>14</b>
Sum	<b>18</b>	<b>12</b>	<b>30</b>

Nå er det lett å se at  $P(\text{hvit maling og grå gardiner}) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$ .

## 4. Sannsynlighetsregning når utfallene ikke er like sannsynlige

### 4.1. Innledning

Svært ofte i praktisk sannsynlighetsregning er alle utfallene ikke like sannsynlige. I noen tilfelle må vi da selv finne sannsynligheter for utfall ved å regne ut relative frekvenser. I andre tilfelle får vi *oppgitt* slike sannsynligheter som er funnet ved forsøk. Disse sannsynlighetene skal så gjerne brukes til å regne ut sannsynligheter for ulike hendelser.

### 4.2. Bruk av produktsetningen og addisjonssetningen

#### Eksempel 11

Hvis mor og far begge har brune øyne, er sannsynligheten for at et barn har brune øyne lik 0,75. Sannsynligheten for at øynene er blå, er 0,25. Paret får fire barn.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fire barna får brune øyne?

Ifølge produktsetningen har vi:

$$P(\text{alle fire har brune øyne}) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,75^4 = 0,316.$$

Dette betyr at hvis vi undersøker mange firebarnsfamilier med brunøyde foreldre, vil alle fire barna ha brune øyne i omtrent 31,6 % av familiene.

b) Hva er sannsynligheten for at de to første er brunøyde og de to siste er blåøyde?

Sannsynligheten for at de to første barna er brunøyde og de to siste er blåøyde, er

$$P(\text{brun, brun, blå, blå}) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,035$$

De to utfallene (brun, brun, brun, brun) og (brun, brun, blå, blå) av det sammensatte forsøket er altså ikke like sannsynlige.

#### Oppgave 17

Det har vist seg at sannsynligheten for at et nyfødt barn er en gutt ikke er helt den samme som sannsynligheten for at det er ei jente. Sannsynlighetene er  $P(\text{gutt})=0,514$  og  $P(\text{jente}) = 0,486$ .

a) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er gutter.

b) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er jenter.

#### Oppgave 18

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,8. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fem frøene spirer?

b) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem spirer?

### Eksempel 12

Jonas sykler til skolen. På veien passerer han to lyskryss. Etter mange passeringer har han funnet ut at sannsynligheten for at han får grønt lys i første krysset er 0,6, og sannsynligheten for at han får grønt lys i andre krysset er 0,3.

a) Hva er sannsynligheten for at han får *rødt* lys i første krysset?

Fordi det bare er to mulige utfall må vi ha at  $P(\text{grønt}) + P(\text{rødt}) = 1$ .

Da er  $P(\text{rødt}) = 1 - P(\text{grønt}) = 1 - 0,6 = 0,4$ .

b) Hva er sannsynligheten for å få rødt i begge kryssene?

Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{rødt i første og rødt i andre}) = P(\text{rødt i første}) \cdot P(\text{rødt i andre}) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$$

c) Hva er sannsynligheten for å få grønt i begge kryssene?

$$P(\text{grønt i første og grønt i andre}) = P(\text{grønt i første}) \cdot P(\text{grønt i andre}) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$$

d) Hva er sannsynligheten for å få rødt i nøyaktig ett av kryssene?

Her må vi bruke både addisjonssetningen og produktsetningen.

$$\begin{aligned} P(\text{ett grønt og ett rødt}) &= P(\text{rødt i første og grønt i andre} \text{ eller } \text{grønt i første og rødt i andre}) = \\ &P(\text{rødt i første og grønt i andre}) + P(\text{grønt i første og rødt i andre}) = \\ &0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,12 + 0,42 = 0,54. \end{aligned}$$

Legg merke til at summen av sannsynlighetene i b, c og d er lik 1. Hvorfor må det være slik?

### Oppgave 19

Per og Kari kommer ofte for sent til første time. Etter at det har gått noen måneder av skoleåret, har klassens ekspert i sannsynlighetsregning funnet ut at sannsynligheten for at Per kommer for sent er 0,23, og sannsynligheten for at Kari kommer for sent er 0,18. Per og Kari kjenner ikke hverandre, og kommer ikke med samme buss, slik at det at Per kommer for sent ikke påvirker sannsynligheten for at Kari kommer for sent.

a) Hva er sannsynligheten for at Per kommer *tidsnok* en bestemt dag?

b) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer *tidsnok* en bestemt dag?

c) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem kommer *tidsnok* en bestemt dag?

d) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer *tidsnok* en hel skoleuke (fem dager)?





### 4.3. Oppgaver med sannsynlighet “minst én”

#### Eksempel 13

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,7. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av frøene spirer?

Sannsynligheten for at et bestemt frø ikke skal spire blir  $1 - 0,7 = 0,3$ .

Produktsetningen gir da

$$P(\text{ingen spirer}) = 0,3^5 = 0,002.$$

b) Hva er sannsynligheten for at minst ett av frøene spirer?

At “minst ett” spirer betyr at ett eller flere frø spirer. Denne sannsynligheten kan vi regne ut ved å legge sammen de fem sannsynlighetene for at 1, 2, 3, 4 og 5 spirer, men dette er mye arbeid og vanskelig. Det er mye lettere hvis vi deler alle mulige utfall i *to* hendelser istedenfor i seks, nemlig “ingen frø spirer” og “minst ett frø spirer”. Fordi disse to hendelsene dekker alle muligheter, må vi ha

$$P(\text{ingen frø spirer}) + P(\text{minst ett frø spirer}) = 1$$

Derfor har vi

$$P(\text{minst ett frø spirer}) = 1 - P(\text{ingen frø spirer}) = 1 - 0,002 = 0,998 = 99,8 \%$$

#### Oppgave 20

Sannsynligheten for at Per kommer for sent til skolen en tilfeldig dag er 0,23.

a) Hva er sannsynligheten for at han kommer for sent både onsdag, torsdag og fredag?

b) Hva er sannsynligheten for at han kommer *tidsnok* minst én av disse tre dagene?

#### Oppgave 21

I en kommune stemte 48 % på et av de “rødgrønne” partiene. Vi velger tilfeldig ut fem av de som stemte. Hva er sannsynligheten for at minst én av disse velgerne stemte “rødgrønt”?

## Eksamensoppgaver

### E1

(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

I en twistpose er det 30 twistbiter. Per liker 18 av disse. Vi trekker tilfeldig én twistbit fra posen.

1) Finn sannsynligheten for at Per liker denne twistbiten.

Sannsynligheten for at Ola liker en tilfeldig valgt twistbit fra posen, er 0,4.

2) Hvor mange av twistbitene i posen liker Ola?

### E2

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

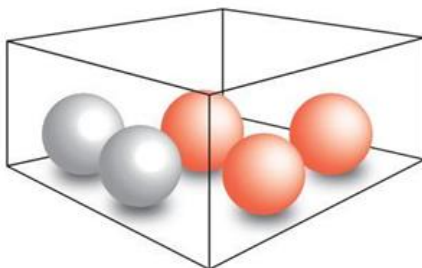
Hva er mest sannsynlig å få?

- en sekser når du kaster én terning
- to like når du kaster to terninger



### E3

(Eksamen 1P vår 2013, Del 1)



I en eske er det tre røde og to blå kuler. Sondre trekker tilfeldig to av kulene.

- Bestem sannsynligheten for at han trekker to røde kuler.
- Bestem sannsynligheten for at de to kulene han trekker, har samme farge.

#### E4

(Eksamen 1P høst 2011, Del 1)



Eva har én pakke blåbærgelé, to pakker kiwigelé, to pakker sitrongelé og tre pakker bringebærgelé.

Hun tar tilfeldig to pakker gelé.

- 1) Hva er sannsynligheten for at den første pakken hun tar, er kiwigelé?
- 2) Hva er sannsynligheten for at hun tar to pakker kiwigelé?
- 3) Hva er sannsynligheten for at hun tar én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé?

#### E5

(Eksamen 1P vår 2012, Del 2)



Karen har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker i en skuff. En dag tar hun tilfeldig to sokker fra skuffen.

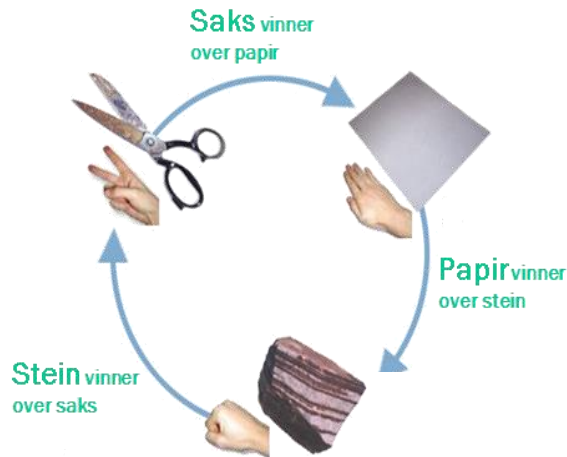
- a) Bestem sannsynligheten for at hun tar to rosa sokker.
- b) Bestem sannsynligheten for at hun tar én rosa sokk og én sokk i en annen farge.
- c) 🤔 Bestem sannsynligheten for at hun tar to sokker med samme farge.

## E6

(Eksamen 1P vår 2011, Del 2)



“Stein – saks- papir” er en konkurranse mellom to personer. Hver person bestemmer seg for enten stein, saks eller papir, og begge viser så samtidig, ved å bruke den ene hånden, hva de har valgt. Se figuren nedenfor.



Reglene er slik:

- Saks vinner over papir.
- Papir vinner over stein.
- Stein vinner over saks.

Dersom begge velger det samme (for eksempel stein), blir det uavgjort.

Bård og Lars skal spille “Stein- saks- papir”. Ett mulig utfall kan da for eksempel bli at Bård velger Stein og Lars velger papir.

- a) Lag en oversikt som viser alle de ni mulige utfallene når Bård og Lars spiller “Stein- saks- papir” en gang.

La B bety seier til Bård, U avgjort og L seier til Lars.

- b) Forklar at sannsynligheten for at Bård vinner,  $P(B)$ , er  $1/3$ .

Bård og Lars skal spille “Stein- saks- papir” tre ganger. Et mulig resultat er da BUL, som betyr at Lars vinner første gang, at det blir uavgjort andre gang, og at Lars vinner tredje gang.

- c) Hvor mange ulike resultater kan vi få når Bård og Lars spiller tre ganger?

- d) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner minst to av de tre gangene?

Når to personer spiller “Stein- saks- papir”, er vinneren den som vinner flest av tre ganger. Dersom begge vinner like mange ganger, blir det uavgjort.

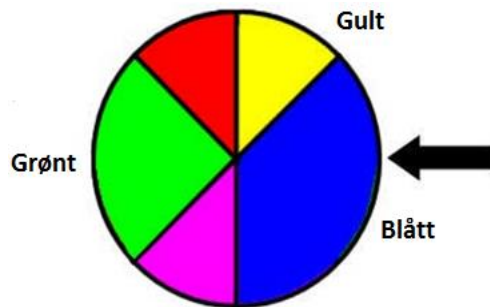
- e) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner?

### E7

(Eksamen vår 2010, Del 1)

Figuren til høyre viser et lykkehjul.

- 1) Lise snurrer hjulet én gang. Hva er sannsynligheten for at pilen peker på enten blått eller grønt felt når hjulet stopper?



- 2) Lotte snurrer hjulet to ganger. Hva er sannsynligheten for at pilen peker én gang på gult felt og én gang på grønt felt?

### E8

(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

En undersøkelse har vist at 20 % av alle syklister i en by sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig to syklister fra denne byen.

- a) Bestem sannsynligheten for at begge sykler uten lys i mørket.
- b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig én av dem sykler uten lys i mørket.

### E9

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 2)

I en klasse er det 22 elever. 12 av elevene har førerkort. 14 av elevene har bil. 4 elever har bil, men ikke førerkort.

- a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

- b) Bestem sannsynligheten for at eleven har førerkort og bil.

Vi velger tilfeldig en elev som har førerkort.

- c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har bil.

**E10**

(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. Én av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tall i de hvite rutene.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum			

Siv tar tilfeldig én bukse fra skapet.

b) Bestem sannsynligheten for at buksen passer.

Siv har tatt en bukse som passer.

c) Bestem sannsynligheten for at denne buksen er blå.

**E11**

(Eksamen 2P-Y høsten 2013, Del 2)

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tallene i de hvite rutene.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven drikker kaffe.

En elev fra klassen drikker kaffe.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven er ei jente.

**E12**

(Eksamen 2P-Y vår 2013)

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller i Spania.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et Venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har vært både i USA og Spania.

Vi velger tilfeldig en elev som ikke har vært i USA.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven har vært i Spania.

**E13**

(Eksamen 1P høst 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 25 elever. 12 av elevene har valgt internasjonal engelsk neste skoleår.

14 av elevene har valgt sosialkunnskap. 4 elever har verken valgt internasjonal engelsk eller sosialkunnskap.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har valgt både internasjonal engelsk og sosialkunnskap.

Vi velger tilfeldig en elev som har valgt sosialkunnskap.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har valgt internasjonal engelsk.

**E14**

(Eksamen 1P vår 2011, Del 1)

De 20 elevene i klasse 1A planlegger sommerferien.

- 16 elever har fått sommerjobb.
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

1) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

2) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klasse 1A skal på ferie.

**E15**

(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 20 elever. 15 av elevene spiller fotball, og 10 spiller håndball. Én elev spiller verken fotball eller håndball.

1) Systematiser opplysningene ovenfor i en krystabell eller i et venndiagram.

Fra klassen velger vi tilfeldig én av elevene som spiller fotball.

2) Bestem sannsynligheten for at denne eleven i tillegg spiller håndball.

**E16**

(Eksamen 1P vår 2010, Del 2)

En kommune har kartlagt utdanningsnivået blant innbyggerne i aldersgruppen 30–39 år. Tabellen viser høyeste fullførte utdanning for disse innbyggerne.

	Kvinner	Menn	Totalt
Grunnskole	166	253	419
Videregående skole	385	654	1039
Universitet eller høyskole	517	493	1010
Totalt	1068	1400	2468

a) Hvor mange personer i aldersgruppen 30–39 år bor det i kommunen?

b) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person i gruppen bare har fullført grunnskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

c) Hvor stor er sannsynligheten for at han ikke har fullført universitets- eller høyskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt kvinne og en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

d) Hva er sannsynligheten for at begge to bare har fullført grunnskoleutdanning?



**E17**

(Eksamen 1P høst 2010, Del 2)

Fotballgruppa i et idrettslag ønsker seg en ny ballbinge. De gjennomfører en spørreundersøkelse for å finne ut hva medlemmene i idrettslaget mener om dette.

- Alle de 240 medlemmene i idrettslaget blir spurt.
- 45 % av medlemmene er kvinner.
- 63 av mennene ønsker ballbinge.
- Til sammen 110 av medlemmene ønsker ikke ballbinge.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk opplysningene ovenfor og fyll inn tallene som skal stå i de hvite feltene.

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge			
Ønsker ikke ballbinge			
Totalt			

b) Finn sannsynligheten for at et tilfeldig valgt medlem i idrettslaget ønsker ballbinge.

Et medlem blir valgt tilfeldig. Det viser seg at dette medlemmet ønsker ballbinge.

c) Finn sannsynligheten for at dette medlemmet er en mann.

**E18**

(Eksamen 1P høst 2011, Del 2)

I klasse 1B er det 12 jenter og 15 gutter. 8 av jentene og 9 av guttene kjører moped til skolen.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi trekker tilfeldig en elev fra klassen.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke kjører moped?

Vi trekker tilfeldig en av elevene fra klassen som kjører moped.

c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en gutt?

(Oppgaven fortsetter på neste side)

Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer for sent til første time, er 10 %.  
Sannsynligheten for at en elev som ikke kjører moped kommer for sent til første time, er 5 %.  
Vi antar at elevene kommer for sent uavhengig av hverandre.

d) 🧐 Forklar at sannsynligheten for at alle jentene i klassen kommer presis til første time, er  $0,9^8 \cdot 0,95^4$ .

e) 🧐 Hva er sannsynligheten for at minst én elev i klassen kommer for sent til første time?

### E19

(Eksamen vår 2013, Del 2) 🧐

I en klasse er det 30 elever. Klassen skal arrangere fest. Elevene må bestemme seg for om de vil ha taco eller pizza til middag, og om de vil ha sjokoladecake eller marsipankake til dessert.

Hver elev legger en lapp med hvilken middag de ønsker, i én krukke og en lapp med hvilken kake de ønsker, i en annen krukke.

Nedenfor ser du hvordan ønskene fordeler seg.

Taco	18
Pizza	12

Sjokoladecake	6
Marsipankake	24

For å avgjøre hva menyen skal være, trekker læreren tilfeldig en lapp fra hver krukke.

- a) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag.
- b) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag og marsipankake til dessert.

4 elever vil ha pizza og sjokoladecake.

Vi trekker tilfeldig ut en elev.

- c) Bestem sannsynligheten for at eleven vil ha taco og marsipankake.

## E20

(Eksamen 1P høst 2012, Del 2)



En dag fikk elevene ved en skole servert lunsj. De fikk velge mellom pizza og pølser.

$\frac{3}{4}$  av elevene valgte pizza. Resten valgte pølser.

I tillegg fikk alle tilbud om salat. Halvparten av elevene som valgte pizza, ønsket også salat, mens bare  $\frac{1}{5}$  av elevene som valgte pølser, ønsket salat.

Vi velger tilfeldig en elev ved skolen.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven valgte pølser, men ikke ønsket salat.

Anta at det er 200 elever ved skolen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket salat?

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen ønsket salat?

## E21

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 1)



En kveld gikk alle elevene i klasse 3A ut for å spise på restaurant.  $\frac{2}{5}$  av elevene bestilte pasta. Resten bestilte pizza. Halvparten av elevene som bestilte pasta, ønsket også dessert, mens bare  $\frac{1}{3}$  av elevene som bestilte pizza, ønsket dessert.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

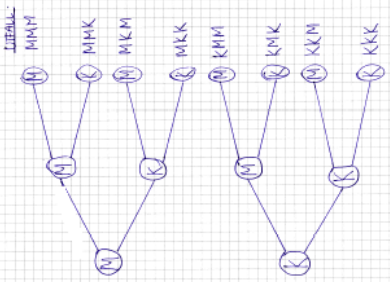
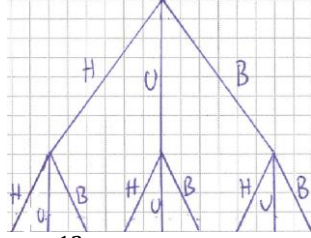
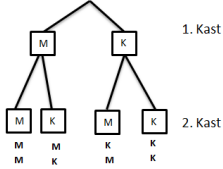
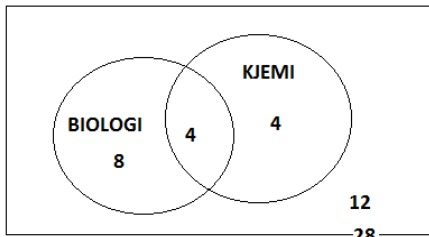
a) Bestem sannsynligheten for at eleven bestilte pizza, men ikke ønsket dessert.

Anta at det er 30 elever i klassen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket dessert?

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klassen ønsket dessert?

## Fasit øvingsoppgaver

<p>Oppgave 1 a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>UTFALL</th> <th>ANTALL</th> <th>ANTALL I %</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Jente</td> <td>300</td> <td>46 %</td> </tr> <tr> <td>Gutt</td> <td>350</td> <td>54 %</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>650</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table> <p>b) 0,46 c) 0,54</p>	UTFALL	ANTALL	ANTALL I %	Jente	300	46 %	Gutt	350	54 %	SUM	650	100%	<p>Oppgave 2 a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>UTFALL</th> <th>ANTALL</th> <th>ANTALL I %</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Fargeblind</td> <td>437</td> <td>%</td> </tr> <tr> <td>Normal</td> <td>5423</td> <td>9 %</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>5460</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table> <p>b) 0,08 c) 0,92</p>	UTFALL	ANTALL	ANTALL I %	Fargeblind	437	%	Normal	5423	9 %	SUM	5460	100%
UTFALL	ANTALL	ANTALL I %																							
Jente	300	46 %																							
Gutt	350	54 %																							
SUM	650	100%																							
UTFALL	ANTALL	ANTALL I %																							
Fargeblind	437	%																							
Normal	5423	9 %																							
SUM	5460	100%																							
<p>Oppgave 3a) <math>\frac{1}{6}</math> b) <math>\frac{1}{2}</math> c) <math>\frac{1}{52}</math> d) <math>\frac{1}{4}</math> e) <math>\frac{1}{2}</math> f) Undersøke hvor mange som er født på de ulike datoene over lengre tid, f.eks. ti år. <math>\frac{1}{365}</math></p>	<p>Oppgave 4 a) <math>\frac{4}{36} = \frac{1}{9}</math> b) <math>\frac{3}{36} = \frac{1}{12}</math> c) <math>\frac{1}{36}</math></p>																								
<p>Oppgave 5 a) 8 b) <math>\frac{1}{8}</math> c)</p> 	<p>Oppgave 6 a) 9 b)</p>  <p>c) <math>3^{12} = 531441</math></p>																								
	<p>Oppgave 7a)</p>  <p>b) <math>\frac{1}{4}</math> c) <math>\frac{1}{4}</math> d) <math>\frac{2}{4} = \frac{1}{2}</math></p>																								
<p>Oppgave 8 a) <math>\frac{1}{8}</math> b) <math>\frac{3}{8}</math> c) <math>\frac{3}{8}</math> d) <math>\frac{1}{8}</math></p>	<p>Oppgave 9 a) <math>\frac{4}{16} = \frac{1}{4}</math> b) 250</p>																								
<p>Oppgave 10. <math>\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}</math></p>	<p>Oppgave 11. <math>\frac{2}{20} = \frac{1}{10}</math></p>																								
<p>Oppgave 12. <math>\frac{6}{1560} = \frac{1}{260} \approx 0,004</math></p>	<p>Oppgave 13. <math>2 \cdot \frac{37}{520} = \frac{37}{260} \approx 0,142</math></p>																								
<p>Oppgave 14. a) <math>\frac{51}{145} \approx 0,352</math> b) <math>\frac{22}{145} \approx 0,152</math> c) <math>\frac{72}{145} \approx 0,497</math></p>	<p>Oppgave 15. a) <math>\frac{11}{850} \approx 0,013</math> b) <math>\frac{44}{850} = \frac{22}{425} \approx 0,052</math></p>																								
<p>Oppgave 16a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Bilogi</th> <th>Ikke bioogi</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Kjmi</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Ikke kjemi</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>12</td> <td>1</td> <td>28</td> </tr> </tbody> </table> <p>c) <math>\frac{12}{28} = \frac{3}{7}</math> d) <math>\frac{16}{28} = \frac{4}{7}</math> e) <math>\frac{4}{12} = \frac{1}{3}</math></p>		Bilogi	Ikke bioogi	SUM	Kjmi	4	4	8	Ikke kjemi	8	12	20	SUM	12	1	28	<p>b)</p> 								
	Bilogi	Ikke bioogi	SUM																						
Kjmi	4	4	8																						
Ikke kjemi	8	12	20																						
SUM	12	1	28																						
<p>Oppgave 17. a) 0,0698 b) 0,0558</p>	<p>Oppgave 18. a) 0,328 b) 0,00032</p>																								
<p>Oppgave 19. a) <math>1 - 0,23 = 0,77</math> b) 0,63 c) 0,33 d) 0,10</p>	<p>Oppgave 20 a) 0,012 b) 0,988</p>																								
<p>Oppgave 21. 0,96</p>																									

## Fasit eksamensoppgaver

E1. 1) $P(\text{Per liker twistbiten}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 2) 12																																	
E2. $P(\text{sekser}) = \frac{1}{6}$ , $P(\text{to like}) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Sannsynligheten er altså lik.																																	
E3. a) $P(\text{to rød}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ b) $P(\text{to rød eller to blå}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$																																	
E4. 1) $P(\text{kiwigele}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 2) $P(\text{to kiwigele}) = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$ 3) $P(\text{én kiwigele og én blåbæregle}) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$																																	
E5. a) $P(\text{to rosa}) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$ b) $P(\text{en rosa og en annen}) = \frac{32}{90} = \frac{8}{45}$ c) $P(\text{to like}) = 5 \cdot \frac{1}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$																																	
E6. a)		b) Av tabellen i a) ser vi at utfallene 2, 6 og 7 gir seier til Bård. Dvs $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th>UTFALL nr</th> <th>Bård</th> <th>Lars</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>Stein</td><td>Stein</td></tr> <tr><td>2</td><td>Stein</td><td>Saks</td></tr> <tr><td>3</td><td>Stein</td><td>Papir</td></tr> <tr><td>4</td><td>Saks</td><td>Stein</td></tr> <tr><td>5</td><td>Saks</td><td>Saks</td></tr> <tr><td>6</td><td>Saks</td><td>Papir</td></tr> <tr><td>7</td><td>Papir</td><td>Stein</td></tr> <tr><td>8</td><td>Papir</td><td>Saks</td></tr> <tr><td>9</td><td>Papir</td><td>Papir</td></tr> </tbody> </table>		UTFALL nr	Bård	Lars	1	Stein	Stein	2	Stein	Saks	3	Stein	Papir	4	Saks	Stein	5	Saks	Saks	6	Saks	Papir	7	Papir	Stein	8	Papir	Saks	9	Papir	Papir	c) $3^3 = 27$ d) $7/27$ e) $10/27$	
UTFALL nr	Bård	Lars																															
1	Stein	Stein																															
2	Stein	Saks																															
3	Stein	Papir																															
4	Saks	Stein																															
5	Saks	Saks																															
6	Saks	Papir																															
7	Papir	Stein																															
8	Papir	Saks																															
9	Papir	Papir																															
E7. 1) $P(\text{blått eller grønt}) = \frac{5}{8}$ 2) $P(\text{gult og grønt}) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$																																	
E8. a) $P(\text{begge uten lys}) = 0,2^2 = 0,04$ b) $P(\text{en uten lys}) = 0,32$																																	
E9. a)		b) $P(\text{førererkort og bil}) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Førererkort</th> <th>Ikke førererkort</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Bil</td> <td>10</td> <td>4</td> <td>14</td> </tr> <tr> <td>Ikke bil</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>12</td> <td>10</td> <td>22</td> </tr> </tbody> </table>			Førererkort	Ikke førererkort	SUM	Bil	10	4	14	Ikke bil	2	6	8	SUM	12	10	22	c) $P(\text{bil, hvis førererkort}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$															
	Førererkort	Ikke førererkort	SUM																														
Bil	10	4	14																														
Ikke bil	2	6	8																														
SUM	12	10	22																														
E10. a)		b) $P(\text{buksen passer}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Blå bukser</th> <th>Svarte bukser</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Bukser som passer</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Busker som ikke passer</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table>			Blå bukser	Svarte bukser	SUM	Bukser som passer	3	3	6	Busker som ikke passer	1	3	4	SUM	4	6	10	c) $P(\text{blå, hvis buksen passer}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$															
	Blå bukser	Svarte bukser	SUM																														
Bukser som passer	3	3	6																														
Busker som ikke passer	1	3	4																														
SUM	4	6	10																														
E11. a)		b) $P(\text{eleven drikker kaffe}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Jenter</th> <th>Gutter</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Drikker kaffe</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Drikker ikke kaffe</td> <td>10</td> <td>5</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>15</td> <td>10</td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>			Jenter	Gutter	SUM	Drikker kaffe	5	5	10	Drikker ikke kaffe	10	5	15	SUM	15	10	25	c) $P(\text{jente, hvis eleven drikker kaffe}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$															
	Jenter	Gutter	SUM																														
Drikker kaffe	5	5	10																														
Drikker ikke kaffe	10	5	15																														
SUM	15	10	25																														
E12. a)		b) $P(\text{USA og Spania}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Spania</th> <th>Ikke Spania</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>USA</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Ikke USA</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>11</td> <td>9</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table>			Spania	Ikke Spania	SUM	USA	4	4	8	Ikke USA	7	5	12	SUM	11	9	20	c) $P(\text{Spania, hvis ikke USA}) = \frac{7}{12}$															
	Spania	Ikke Spania	SUM																														
USA	4	4	8																														
Ikke USA	7	5	12																														
SUM	11	9	20																														
E13. a)		b) $P(\text{Int. engelsk og sos.kunnskap}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Sosialkunnskap</th> <th>Ikke sosialkunnskap</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Internasjonal engelsk</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Ikke internasjonal engelsk</td> <td>9</td> <td>4</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>14</td> <td>11</td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>			Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	SUM	Internasjonal engelsk	5	7	12	Ikke internasjonal engelsk	9	4	13	SUM	14	11	25	c) $P(\text{Int. engelsk, hvis sos.kunnskap}) = \frac{5}{14}$															
	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	SUM																														
Internasjonal engelsk	5	7	12																														
Ikke internasjonal engelsk	9	4	13																														
SUM	14	11	25																														

<p>E14.1)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Jobb</th> <th>Ikke jobb</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ferie</td> <td>10</td> <td>2</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Ikke ferie</td> <td>6</td> <td>2</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>16</td> <td>4</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table>		Jobb	Ikke jobb	SUM	Ferie	10	2	12	Ikke ferie	6	2	8	SUM	16	4	20	<p>2) <math>P(\text{ferie}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}</math></p>
	Jobb	Ikke jobb	SUM														
Ferie	10	2	12														
Ikke ferie	6	2	8														
SUM	16	4	20														
<p>E15. 1)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Fotball</th> <th>Ikke fotball</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Håndball</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Ikke håndball</td> <td>9</td> <td>1</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>15</td> <td>5</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table>		Fotball	Ikke fotball	SUM	Håndball	6	4	10	Ikke håndball	9	1	10	SUM	15	5	20	<p>2) <math>P(\text{håndball, hvis fotball}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}</math></p>
	Fotball	Ikke fotball	SUM														
Håndball	6	4	10														
Ikke håndball	9	1	10														
SUM	15	5	20														
<p>E16a) 2468</p> <p>b) <math>P(\text{grunnskole}) = \frac{419}{2468} \approx 0,17</math></p> <p>c) <math>P(\text{ikke universitet/høyskole}) = \frac{907}{1400} = 0,65</math></p>	<p>d) <math>P(\text{begge grunnskole}) = \frac{166}{1068} \cdot \frac{253}{1400} \approx 0,026</math></p>																
<p>E17. a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mann</th> <th>Kvinne</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ønsker ballbinge</td> <td>63</td> <td>67</td> <td>130</td> </tr> <tr> <td>Ønsker ikke ballbinge</td> <td>69</td> <td>41</td> <td>110</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>132</td> <td>108</td> <td>240</td> </tr> </tbody> </table>		Mann	Kvinne	SUM	Ønsker ballbinge	63	67	130	Ønsker ikke ballbinge	69	41	110	SUM	132	108	240	<p>b) <math>P(\text{medlemmet ønsker ballbinge}) = \frac{130}{240} = 0,54</math></p> <p>c) <math>P(\text{mann, hvis medlemmet ønsker ballbinge}) = \frac{63}{130} = 0,49</math></p>
	Mann	Kvinne	SUM														
Ønsker ballbinge	63	67	130														
Ønsker ikke ballbinge	69	41	110														
SUM	132	108	240														
<p>E18. a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Jenter</th> <th>Gutter</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Kjører moped</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>Kjører ikke moped</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>27</td> </tr> </tbody> </table> <p>b) <math>P(\text{kjører ikke moped}) = \frac{10}{27} \approx 0,37</math></p> <p>c) <math>P(\text{gutt, hvis eleven kjører moped}) = \frac{9}{17} \approx 0,53</math></p>		Jenter	Gutter	SUM	Kjører moped	8	9	17	Kjører ikke moped	4	6	10	SUM	12	15	27	<p>d) Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer presis til første time er <math>1 - 0,10 = 0,90</math>. 8 jenter kjører moped, samlet er sannsynligheten for at disse kommer presis <math>0,90^8</math>. Tilsvarende tankegang for jentene som ikke kjører moped gir sannsynligheten <math>0,95^4</math>. Totalt gir dette <math>0,90^8 \cdot 0,95^4</math></p> <p>e) <math>P(\text{minst en elev kommer for sent}) = 1 - P(\text{alle kommer tidnok}) = 1 - (0,90^{17} \cdot 0,95^{10}) = 0,90</math></p>
	Jenter	Gutter	SUM														
Kjører moped	8	9	17														
Kjører ikke moped	4	6	10														
SUM	12	15	27														
<p>E19a) <math>P(\text{taco}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}</math></p> <p>b) <math>P(\text{taco og marsipankake}) = \frac{18}{30} \cdot \frac{24}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}</math></p>	<p>c) Lager en krysstabell til hjelp:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Taco</th> <th>Pizza</th> <th>SUM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sjokoladecake</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Marsipankake</td> <td>16</td> <td>8</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>SUM</td> <td>18</td> <td>12</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>P(\text{taco og marsipankake}) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}</math></p>		Taco	Pizza	SUM	Sjokoladecake	2	4	6	Marsipankake	16	8	24	SUM	18	12	30
	Taco	Pizza	SUM														
Sjokoladecake	2	4	6														
Marsipankake	16	8	24														
SUM	18	12	30														
<p>E20. a) <math>P(\text{pølser, ikke salat}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}</math></p> <p>b) <math>200 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = 85</math></p>	<p>c) <math>P(\text{salat}) = \frac{85}{200} = 0,485</math></p>																
<p>E21. a) <math>P(\text{pizza, ikke dessert}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}</math></p>	<p>b) <math>30 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{60}{5} = 12</math></p> <p><math>P(\text{dessert}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}</math></p>																

## Stikkordregister

Areal .....	104	Kart og målestokk .....	55
Arealenheter .....	110	Målenheter .....	94
Arealformler .....	105	Målestokk .....	55
Overflater .....	134; 136	Sidelengder i rettvinklede trekanter ...	95
Sammensatte figurer .....	108	Løse likning .....	33–36
Brøk .....	8	Potenslikning .....	36
Addisjon .....	10	Masse (vekt) .....	50
Brøkdel av et tall .....	11	Omkrets .....	96
Brøkdel som prosent .....	74	Omvendt proporsjonale størrelser .....	59
Desimaltall .....	14	Overslagsregning .....	60
Forkorting .....	9	Areal .....	109
Multiplikasjon .....	12	Lengder .....	109
Nevner .....	8	Potenser .....	22
Teller .....	8	Eksponent .....	22
Utviding .....	9	Grunntall .....	22
Desimaltall .....	13	Kvadratrot .....	23
Skriv som brøk .....	14	Proporsjonale størrelser .....	58
Forholdsregning .....	54	Prosent	
Blandinger .....	56	Finne førverdi .....	79
Formelregning .....	38	Finne ny verdi .....	80
Innsetting av tall i formler .....	39	Flere prosentvise forandringer etter	
Omforming av formler .....	39	hverandre .....	82
Formlike figurer .....	98	Prosent som brøkdel .....	74
Funksjoner		Prosentpoeng .....	87
Funksjonsuttrykk .....	194	Prosenttallet er oppgitt .....	77
Lineære funksjoner .....	195	Regne ut en prosent .....	74
Polynomfunksjoner .....	213	Prosentfaktor .....	74
GeoGebra .....	200	Prosenttall .....	74
Ekstremalpunkt .....	213	Pythagoras' setning .....	95
Grafisk løsning .....	201	Regneregler	
Nullpunkt .....	215	Divisjon .....	22
Skjæring mellom to grafer .....	211	Gange ut parentesen .....	31
Skjæringspunkt .....	216	Multiplikasjon .....	22
Graf .....	191	Regnerekkefølgen .....	23
Tegne for hånd .....	192	Sannsynlighet .....	232
Hele tall .....	15	Addisjonssetningen .....	240
Addisjon .....	15	Hendelser .....	233
Divisjon .....	18	Ikke lik sannsynlighet .....	246
Multiplikasjon .....	15	Krysstabell .....	243
Negative tall .....	21	Lik sannsynlighet .....	233
Subtraksjon .....	15	Minst én .....	248
Konstantledd .....	199	Multiplikasjonsprinsippet .....	235
Negativt .....	208	Produktsetningen i sammensatte forsøk	
Kvadratrot .....	Se Potenser	.....	238
Lengder .....	47	Utfall .....	233

Valgtre .....	236	Budsjett .....	164
Venn-diagram .....	244	Feriepenger .....	154
Stigningstall .....	197	Kjøpekraft .....	171
Negativt .....	206	Konsumprisindeks .....	169
Positivt .....	204	Kredittkort .....	162
Store tall .....	13	Lønn .....	150
Tabell .....	191	Lån .....	158
Tid .....	51	Prestasjonslønn .....	151
Vekstfaktor .....	80	Prisindeks .....	167
Volum		Reallønn .....	170
Finne høyde eller radius .....	130	Regnskap .....	164
Sammensatte gjenstander .....	132	Serielån .....	159
Volumenheter .....	123	Skatt og avgifter .....	155
Volumformler .....	125	Sparing .....	158
Økonomi		Tidslønn .....	150
Annuitetslån .....	160		