Kapittel 9. Sannsynlighetsregning

Sannsynlighet handler om å finne ut hvor ofte noe vil skje i en prosess som kan gjentas mange ganger.

Kapitlet handler blant annet om dette:

- Hva *er* sannsynlighet.
- Beregne sannsynligheter ut fra forsøk.
- Beregne sannsynligheter når alle utfall er like sannsynlige; for eksempel i spill.
- Beregne sannsynligheten for at A *og* B skjer.
- Beregne sannsynligheten for at A *eller* B skjer.
- Beregne sannsynligheter ved hjelp av valgtre og krysstabell.

DINE VINNERSJANSER		
SPILL	SANNSYNLIGHET	ANTALL ÅR
Joker - onsdag (taktisk)	1 : 77.802	3 432
Joker - onsdag	1 : 92.657	4 087
Keno	1 : 107.359	4 736
Flax Million	1 : 125.000	5 514
Joker - lørdag	1 : 142.977	6 307
Lotto*	1 : 210.159	9 270
Extra	1 : 361 000	15 924
Flax Livet	1 : 500.000	22 055
Tippekupongen, søndag**	1 : 608 000	26 819
VikingLotto	1 : 613.576	27 065
Tippekupongen, lørdag**	1 : 940 000	41 464

Tabellen viser sannsynligheten for å bli millionær ved en innsats på 100 kroner.
Den viser altså sannsynligheten for å vinne toppgevinsten når denne utgjør mer enn 1 million.

1. Innledning

I de fleste tilfelle er det umulig å vite sikkert hva som vil skje. Av og til kan vi likevel regne ut hvor *sannsynlig* det er at noe bestemt kommer til å hende.

I daglig tale kan vi si noe sånt som at det er 80 % sannsynlig at Manchester United kommer til å slå Chelsea i lørdagens fotballkamp, eller at det bare er 10 % sannsynlig at Sara får 5 på neste matematikkprøve. Da gir vi uttrykk for at vi er ganske sikre på at Manchester U. vil vinne, og at Sara antagelig ikke vil få 5. Men de to sannsynlighetene gir bare uttrykk for hva vi *tror* på grunnlag av hva fotball-lagene og Sara har prestert tidligere. Hvis vi er helt sikre på at noe bestemt vil skje, sier vi ofte at "det er 100 % sikkert". Er vi sikre på at det ikke vil skje, kan vi si "det er null sannsynlighet" eller "null sjanse".
Sannsynligheter som uttrykker noe mer enn bare hva vi tror, må *beregnes*. De enkleste regnemåtene skal du lære i dette kapitlet.
Avansert sannsynlighetsregning er svært viktig i praktiske sammenhenger, for eksempel i forsikringsbransjen, medisinsk forskning, genetikk og mange typer lotterier og spill.

2. Hva *er* sannsynlighet?

Anta at vi har undersøkt kjønn til 10 000 nyfødte barn på et stort sykehus. Vi setter opp resultatene i en tabell:

Utfall	Antall	Antall i prosent
Gutt	5140	51,4 %
Jente	4860	48,6 %
Gutt eller jente	10000	100 %

Den andre kolonnen viser hvor mange tilfeller det er av hvert utfall.
Siste kolonne viser hvor mange prosent av forsøkene hvert av de to mulige utfallene forekommer.

Etter å ha gjort denne undersøkelsen, kan vi si at sannsynligheten for at et tilfeldig valgt barn er en gutt, er 51,4 %, eller 0,514. Sannsynligheten for at det er en jente, er 48,6 %, eller 0,486. Det skriver vi kort slik:

$$P(\text{gutt}) = 0{,}514\ ,\ P(\text{jente}) = 0{,}486.$$

Vi bruker P fordi sannsynlighet heter "probability" på engelsk.

Sannsynligheten for et bestemt utfall viser i hvor stor prosent av et forsøk dette utfallet forekommer, hvis vi gjør et forsøk *mange* ganger.
Verdien blir mer og mer nøyaktig jo flere ganger vi gjør forsøket.

Oppgave 1

På Hellerud videregående skole er det 650 elever. Blant disse elevene er 300 jenter.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er gutt?

Oppgave 2

Rød-grønn fargeblindhet rammer først og fremst gutter. Blant 5460 undersøkte norske mannlige rekrutter var 437 fargeblinde. Resten hadde normalt fargesyn.
a) Framstill resultatene i en tabell med antall og prosenter som vist på forrige side.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann er fargeblind?
c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt norsk gutt/mann *ikke* er fargeblind?

3. Sannsynlighetsregning når alle utfall er like sannsynlige

3.1. Innledning

Hvis vi kaster et pengestykke har vi to mulige utfall. Vi kan få mynt, eller kron. Begge utfallene er like sannsynlige. Det betyr at P(M) = 1/2 og P(K) = 1/2. Fordi sannsynlighetene her er *nøyaktig* 50 % (0,50), bruker vi gjerne brøken ½ isteden.

Her er noen eksempler på forsøk og de mulige utfallene i hvert forsøk.

Forsøk	Mulige utfall
Kaste et pengestykke	Mynt, kron
Kaste en terning	1, 2, 3, 4, 5, 6
Trekke et kort fra en kortstokk med 52 kort	Hjerter ess, spar to, ... (tilsammen 52)
Bestemme kjønn til nyfødt barn	Gutt, jente
Bestemme antall jenter i en trebarnsfamilie	0, 1, 2, 3
Undersøke om en person er fargeblind	Fargeblind, ikke fargeblind
Undersøke fabrikkmerket på mobilen til en person	Apple, Samsung, LG, Nokia, HTC,...

3.2. Hendelser

Hva er sannsynligheten for å trekke en *hjerter* fra en kortstokk? Det er 13 hjerter i stokken slik at det er 13 av 52 mulige utfall som gir en hjerter.
Vi sier at ”hjerter” er en *hendelse* som består av 13 utfall. Disse utfallene kaller vi *gunstige utfall* for hendelsen ”hjerter”. (Ordet “gunstig” betyr “passende” eller “bra”.) Da finner vi sannsynligheten for at vi trekker et hjerterkort slik

$$P(\text{hjerter}) = \frac{13}{52} = \frac{13}{13 \cdot 4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

(her har vi skrevet sannsynligheten som både brøk, desimaltall og prosent).

Hvis alle utfallene er like sannsynlige, finner vi sannsynligheten for en *hendelse* slik:

$$P(\text{ en hendelse}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Hvis vi kaster to terninger, kan vi kalle summen av øynene for en hendelse. Summen kan variere fra 2 til 12. Det er $6 \cdot 6 = 36$ mulige utfall i dette forsøket. Hendelsen "summen av øynene er 7" har seks gunstige utfall: (1+6), (2+5), (3+4), (4+3), (5+2), (6+1). Da får vi

$$P(\text{sum øyne lik 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Oppgave 3

a) Hva er sannsynligheten P(fem) for å få en *femmer* når vi kaster en terning?
b) Hva er sannsynligheten P(partall) for å få et *partall* når vi kaster en terning?
c) Hva er sannsynligheten for å trekke *hjerter ess* fra en kortstokk?
d) Hva er sannsynligheten for å trekke *ruter* fra en kortstokk?
e) Hva er sannsynligheten for å trekke *et "svart kort"* fra en kortstokk?
f) Hvordan ville du gå fram for å finne ut om alle fødselsdatoer er like sannsynlige? Anta at de faktisk er det. Hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person er født 1. mai? Et *gunstig utfall* er et utfall som gir oss hendelsen.

Oppgave 4

Finn sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger er lik
a) 5
b) 10
c) 12

3.3. Multiplikasjonsprinsippet: Hvordan finne antall mulige utfall

Anta at en restaurant tilbyr 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Du kan ikke bestemme deg og velger derfor forrett, hovedrett og dessert ved å sette ned fingeren i menyen helt tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å velge kamskjell til forrett, laks til hovedrett og sjokolademousse til dessert (hvis alle disse står på menyen)?

Vi antar at alle valg av de tre rettene er like sannsynlige, og trenger da antall mulige utfall. Hver av de tre forrettene kan vi kombinere med fem hovedretter. Det gir $3 \cdot 5 = 15$ mulige kombinasjoner. Hver av disse 15 kombinasjonene kan vi kombinere med 4 desserter. Det gir tilsammen $15 \cdot 4 = 60$ mulige treretters middager. Sannsynligheten for et bestemt treretters valg blir da 1/60.

Multiplikasjonsprinsippet: Hvis vi skal gjøre flere valg etter hverandre, finner vi antall mulige utfall ved å multiplisere antall muligheter i hvert av valgene.

Eksempel 1
Ida kan velge mellom sju sjokolader. For at det ikke skal bli for usunt, må hun også velge en av fire frukter. Hun klarer ikke å bestemme seg så hun trekker lodd for å velge. Hva er sannsynligheten for at hun trekker firkløver og pære?

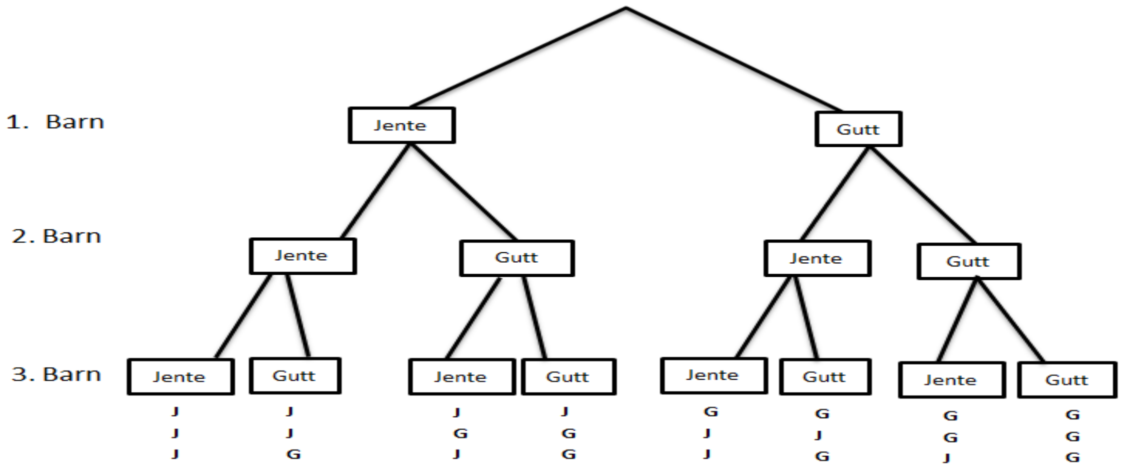
Antall mulige utfall av trekningen er $7 \cdot 4 = 28$.
Hvis hun trekker lodd, kan vi anta at alle de 28 utfallene er like sannsynlige. Derfor er
$P(\text{firkløver og pære}) = \dfrac{1}{28}$.

Eksempel 2

Hva er sannsynligheten for at det første barnet er en gutt, og de to neste er jenter, i en trebarnsfamilie? Anta at alle utfall er like sannsynlige.

Antall mulige utfall er her $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Derfor er $P(\text{GJJ}) = \frac{1}{8}$.

De mulige utfallene i eksempel 2 kan framstilles i et *valgtre*:



Her kan vi se at GJJ er en av åtte muligheter totalt. Slik kunne vi brukt valgtreet og funnet at $P(GJJ) = \frac{1}{8}$, akkurat som vi fant i eksempelet over.

Oppgave 5

a) Hvor mange mulige utfall er det hvis vi kaster tre pengestykker?

b) Hva er sannsynligheten for at vi skal få MMK? (mynt på første pengestykke, mynt på andre og kron på tredje)?

c) Tegn et valgtre som ligner på valgtreet ovenfor, og som viser de ulike utfallene i dette forsøket.

Oppgave 6

Vi skal tippe utfallet av to fotballkamper. Hver kamp kan gi hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

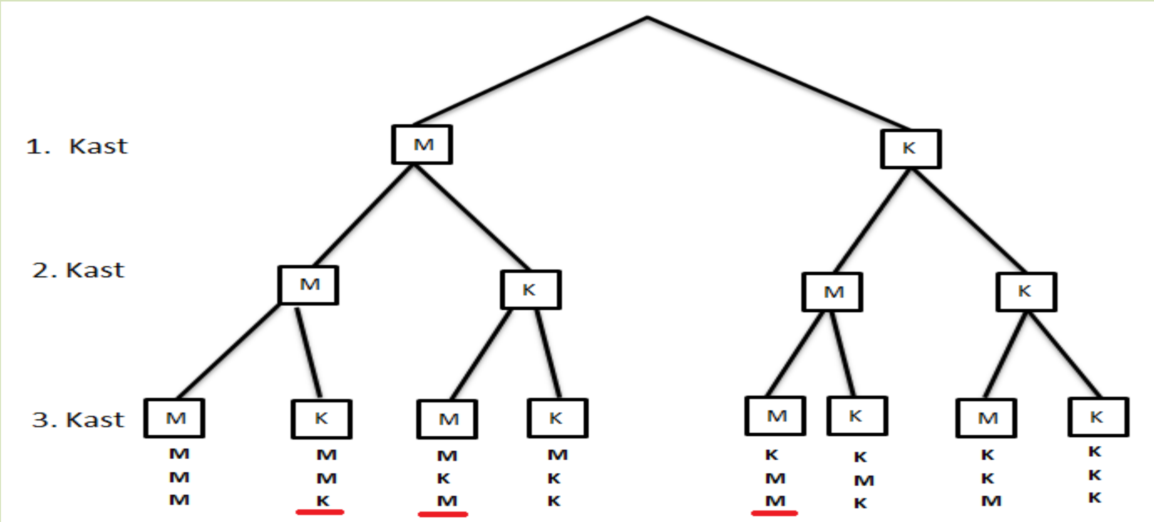
a) Hvor mange mulige utfall er det i denne tippekonkurransen?

b) Lag et valgtre som viser de mulige utfallene.

c) Hvor mange mulige utfall er det hvis man tipper resultatet av 12 kamper?

Eksempel 3
Vi kaster tre pengestykker etter hverandre.
a) Finn sannsynligheten for 2 mynt og en kron.
b) Finn sannsynligheten for 1 mynt og to kron

Tegner et valgtre som gir oss oversikt over de forskjellige utfallene.



a) Vi ser at vi har 8 forskjellige utfall. Av disse gir tre forskjellige to mynt og 1 kron. Detter er MMK, MKM og KMM som er markert i rødt. Sannsynligheter for to mynt og en kron er dermed $\frac{3}{8}$.

b) Av valgtreet ser vi at det er tre muligheter for å få 1 mynt og to kron. MKK, KMK og KKM.
Sannsynligheter for 1 mynt og to kron er dermed $\frac{3}{8}$.

Oppgave 7
Vi kaster to pengestykker etter hverandre.
a) Tegn et valgtre som viser de mulige utfallene vi kan få.
b) Finn sannsynligheten for 2 kron.
c) Finn sannsynligheten for 2 mynt.
d) Finn sannsynligheten for 1 mynt og 1 kron.

Oppgave 8
CMT er en arvelig nervesykdom. I gjennomsnitt vil halvparten av barna hvor en av foreldrene har CMT, arve sykdommen.
I en familie har mor CMT. Familien har tre barn.
a) Finn sannsynligheten for at alle tre barna har CMT.
b) Finn sannsynligheten for at to av barna har CMT.

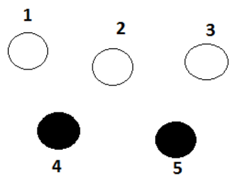
c) Finn sannsynligheten for at ett av barna har CMT.
d) Finn sannsynligheten for at ingen av barna har CMT.

Oppgave 9

a) Finn sannsynligheten for at det er tre gutter og ei jente i en firebarnsfamilie. Vi regner alle de mulige utfallene som like sannsynlige (ikke helt riktig).
b) Vi undersøker 1000 firebarnsfamilier. I omtrent hvor mange av disse vil vi finne tre gutter?

3.4. Sammensatte forsøk. Produktsetningen.

Vi har fem nummererte kuler, tre hvite og to svarte. Vi trekker tilfeldig to kuler etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at både den første og den andre er hvite *når vi legger den første tilbake før vi trekker den andre*?



I følge multiplikasjonsprinsippet har vi $5 \cdot 5 = 25$ mulige utfall. 9 av disse, nemlig (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) gir oss hendelsen "første er hvit og andre er hvit". Da får vi :

$$P(\text{første er hvit og andre er hvit}) = \frac{9}{25}.$$

Trekningen av de to kulene er et eksempel på et *sammensatt forsøk*. Forsøket består av to *delforsøk*.

I et sammensatt forsøk er sannsynligheten for hendelsen A i første delforsøk og hendelsen B i andre delforsøk gitt ved *produktsetningen*:

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Det kan hende at sannsynligheten for B påvirkes av at A har skjedd.

I trekningsforsøket vårt er hendelsen A "første er hvit" og hendelsen B er "andre er hvit". Det er for begge hendelsene 3 gunstige utfall av 5 mulige. Derfor har vi:

$$P(\text{første hvit og andre hvit}) = P(\text{første hvit}) \cdot P(\text{andre hvit}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

som er samme svar som vi fant på en annen måte ovenfor.

Oppgave 10

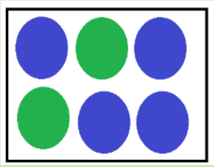
Finn sannsynligheten for å trekke to *svarte* kuler i eksemplet ovenfor (hvor vi legger den første kula tilbake før vi trekker den andre). Løs oppgaven både ved å se på antall gunstige og mulige utfall i det sammensatte forsøket, og ved å bruke produktsetningen.

Oppgave 11

Finn sannsynligheten for å trekke to svarte kuler i eksemplet ovenfor når vi *ikke* legger den første kulen tilbake før vi trekker den andre.

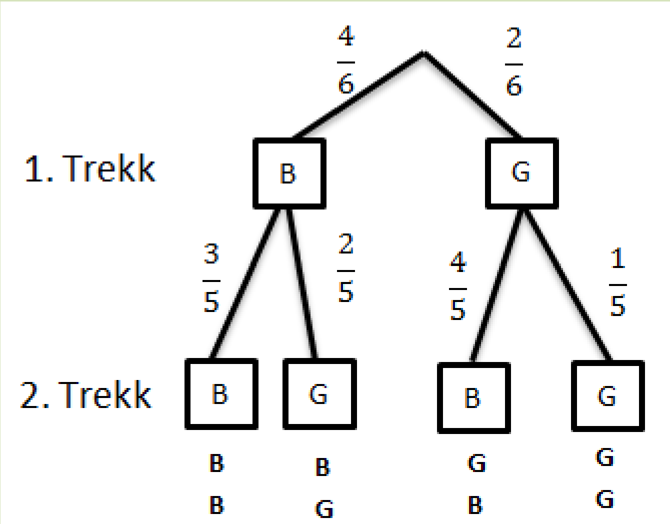
Eksempel 4

I en eske er det fire blå og to grønne kuler. Kenneth trekker tilfeldig to av kulene.



a) Bestem sannsynligheten for at han trekker to blå kuler.
b) Bestem sannsynligheten for at han trekker to grønne kuler.

Velger å tegne et valgtre først. Brøken angir sannsynligheten for hver mulighet. F.eks er det $\frac{4}{6}$ sjanse for å få blå på det første trekket. Hvis vi fikk blå på det første trekket er det kun 3 blå kuler igjen. Sannsynligheten blir da $\frac{3}{5}$ for å få blå på det andre trekket.



a) Vi bruker produksetningen:

$$P(første\ blå\ og\ andre\ blå) = P(første\ blå) * P(andre\ blå) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

Sannsynligheten for to blå er $\frac{6}{15}$

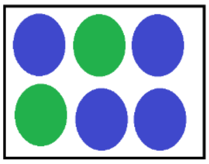
b) $(begge\ grønn) = P(første\ grønn) * P(andre\ grønn) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Sannsynligheten for to grønn er $\frac{1}{15}$

Oppgave 12
I en klasse arrangeres et lotteri med 40 lodd. Hver elev skal trekke to lodd, og det er gevinst på tre av de 40 loddene. Ida er den første til å trekke og hun tar to lodd.
Hva er sannsynligheten for at hun har vunnet på begge loddene?

3.5. Addisjonssetningen: En annen måte å beregne sannsynlighet for hendelser

Vi ser tilbake på eksempel 4 med kuletrekning.
Hva er sannsynligheten for å trekke én blå og grønn kule?



Produktsetningen alene kan bare gi oss sannsynlighetene for at den første er blå og den andre grønn, eller omvendt. Slik:

$$P(BG) = P(første\ blå\ og\ andre\ grønn) = P(første\ blå) \cdot P(andre\ grønn) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$
$$P(GB) = P(første\ grønn\ og\ andre\ blå) = P(første\ grønn) \cdot P(andre\ blå) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for en blå og en grønn kule ved å *addere* (legge sammen) disse to sannsynlighetene:

$$P(en\ grønn\ og\ en\ blå) = P(BG) + P(GB) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Dette er et eksempel på bruk av *addisjonssetningen* for sannsynligheter.

Addisjonssetningen. Vi finner sannsynligheten for at hendelse *A eller* hendelse *B* vil inntreffe ved å *legge sammen* sannsynlighetene for hver av hendelsene.

$P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B)$.

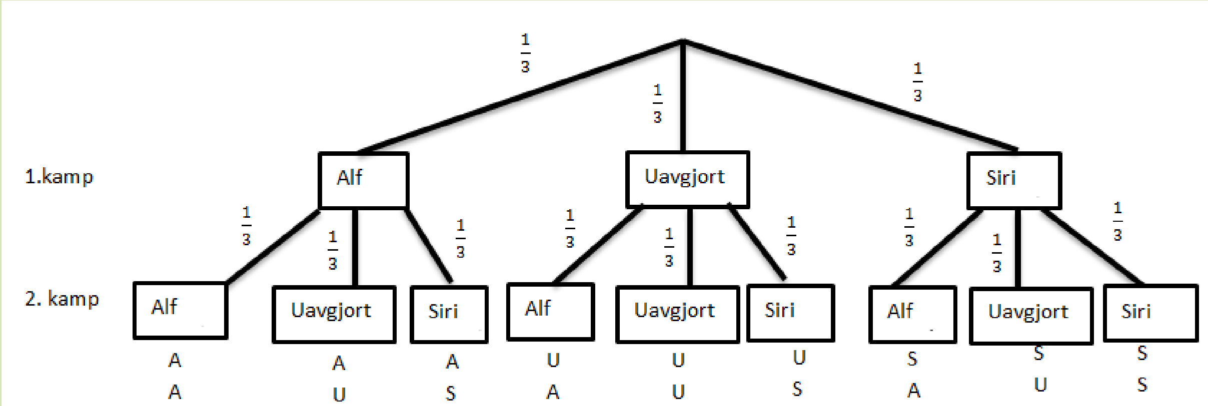
Forutsetningen er at hendelsene ikke har noen felles utfall. Det betyr at ikke begge kan skje samtidig.

<u>Eksempel 5</u>

Alf og Siri spiller "stein –papir –saks" to ganger på rad.

a) Hva er sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre?
b) Hva er sannsynligheten for at minst en av kampene blir uavgjort

Velger å tegne et valgtre først. Alf betyr at Alf vinner, Siri betyr at Siri vinner.



a) At Siri vinner første, og får uavgjort på andre tilsvarer utfallet SU, i valgtreet.

$$P(SU) = P(Siri\ vinner\ første) * P(Uavgjort\ på\ andre) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Sannsynligheten for at Siri vinner første og får uavgjort på andre er $\frac{1}{9}$.

b) Her kan vi bruke addisjonssetningen. Vi ser at minst en av kampene blir uavgjort betyr at vi kan få: AU, UA, UU, US eller SU. Alle disse resultatene er like sannsynlig.

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = P(AU) + P(UA) + P(UU) + P(US) + P(SU)$$

$$P(Minst\ en\ av\ kampene\ blir\ uavgjort) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

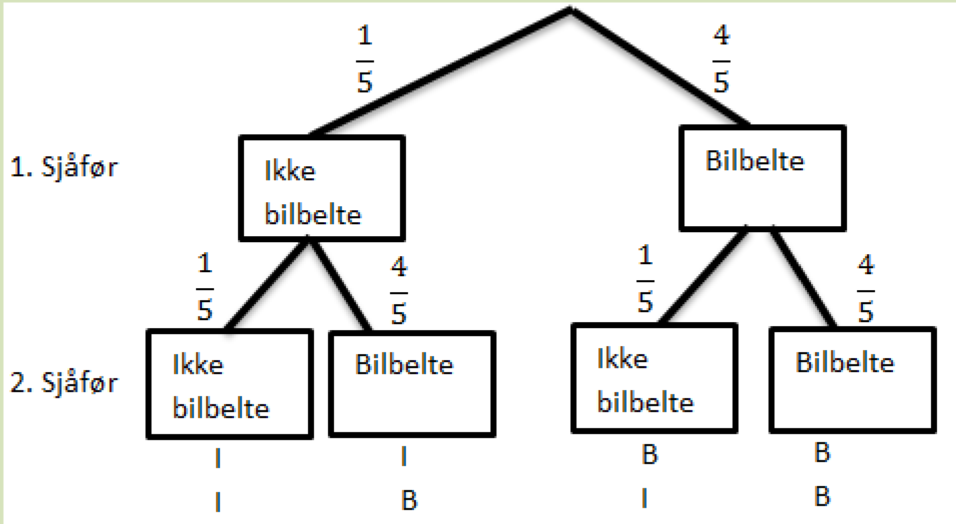
Sannsynligheten for at minst en kamp blir uavgjort er $\frac{5}{9}$.

Eksempel 6

Vi antar at det er 80% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt bilfører bruker bilbelte. Vi kontrollerer to tilfeldige bilførere.

a) Hva er sannsynligheten for at begge bruker bilbelte?
b) Hva er sannsynligheten for at *en* bruker bilbelte?

Sannsynligheten for at han ikke bruker bilbelte må være 20 %.
$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ og $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Lager et valgtre for å få oversikt.



a) At begge bruker bilbelte tilsvarer alternativet merket BB. $P(BB) =$
$P(første\ bruker\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ bilbelte) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 64\%$

Sannsynligheten for at begge bruker bilbelte er 64 %.

b) At kun *en* bruker bilbelte tilsvarer alternativ IB og BI.

$$P(IB) = P(første\ bruker\ ikke\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ bilbelte) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(BI) = P(første\ bruker\ bilbelte) * P(andre\ bruker\ ikke\ bilbelte) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(en\ bruker\ bilbelte) = P(IB) + P(BI) = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 32\%$$

Sannsynligheten for at kun en bruker bilbelte er 32%.

Oppgave 13

Vi går tilbake til oppgave 12. Hva er sannsynligheten for at Ida vinner på det ene loddet, men ikke på det andre?

Oppgave 14

I en klasse er det 18 jenter og 12 gutter. Læreren trekker tilfeldig to elever til framføring.
a) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to jenter?
b) Hva er sannsynligheten for at det trekkes to gutter?
c) Hva er sannsynligheten for at det trekkes ei jente og en gutt?

Eksempel 7

Vi trekker to kort fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Hva er sannsynligheten for å trekke to ess?

Det er 4 ess i stokken. Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{første er ess og andre er ess}) = P(\text{første er ess}) \cdot P(\text{andre er ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

Hva er sannsynligheten for å trekke to kort med samme verdi? Det vil si to ess, ..., to seksere, ..., to konger (13 ulike verdier).

Fordi det er fire kort av hver verdi, må sannsynlighetene for å trekke to toere, to treere osv. alle være lik 1/221. Addisjonssetningen sier at vi må legge sammen 13 sannsynligheter, hver med verdi 1/221. Vi får da

$$P(\text{to like}) = 13 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{13}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

Oppgave 15

Vi trekker tre kort fra en kortstokk.

a) Hva er sannsynligheten for at vi trekker tre spar?

De fire fargene i kortstokken er spar (♠), hjerter (♥), ruter (♦) og kløver (♣).

b) Hva er sannsynligheten for at alle tre kortene har samme farge?

3.6. Krysstabeller

Mange eksamensoppgaver handler om en gruppe mennesker som er delt i fire undergrupper. Ofte skal du finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person tilhører en eller flere av disse gruppene.

Eksempel 8
I en klasse er det 30 elever som har valgt fag for neste år.
- 9 av elevene har valgt engelsk
- 14 av elevene har valgt matematikk
- 10 elever har ikke valgt noen av disse to fagene

For å få god oversikt over disse tallene, kan vi legge dem inn i en *krysstabell* med fire rader og fire kolonner:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk			**14**
Ikke matematikk		**10**	
Sum	**9**		**30**

Legg nøye merke til hvor tallene er plassert.
Det spiller ingen rolle om du tar engelsk i 1. kolonne istedenfor i 1. rad.

Nå er det lett å fylle ut de tomme rutene:

	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk	3	11	**14**
Ikke matematikk	6	**10**	16
Sum	**9**	21	**30**

Kontroller at alle de seks summene stemmer.

Vi trekker en tilfeldig elev fra klassen. Da kan vi bruke tabellen til å finne noen sannsynligheter:

Sannsynligheten for at eleven har valgt både matematikk og engelsk: $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

Sannsynligheten for at eleven har engelsk, men ikke matematikk: $P = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

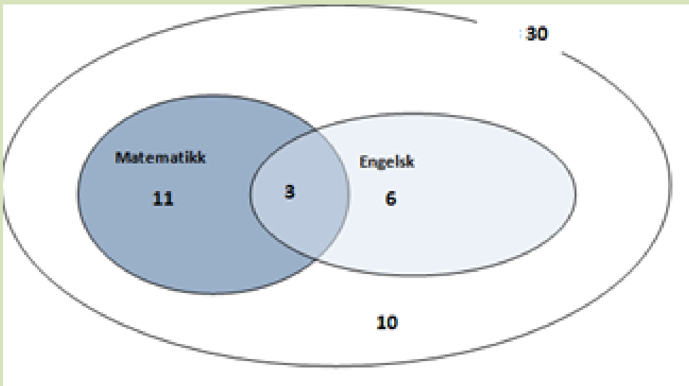
Sannsynligheten for at en elev som har valgt matematikk også har valgt engelsk: $P = \frac{3}{14}$.

Sannsynligheten for at en elev har valgt matematikk eller engelsk:

$$P = \frac{6 + 11 + 3}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Vi legger altså sammen de som bare har engelsk, de som bare har matematikk og de som har begge deler. "**Matematikk eller engelsk**" **betyr enten matematikk eller engelsk *eller begge deler!***

Eksempel 9
Opplysningene i forrige eksempel kan også framstilles i et *Venn-diagram*:



Et Venndiagram er kanskje vanskeligere å lage enn en krysstabell, men kan være lettere å forstå. Her ser vi for eksempel tydelig at det er 11+3+6 = 20 elever som har valgt matematikk eller engelsk.

Oppgave 16

En klasse har 28 elever. Av dem har 12 elever biologi og 8 har kjemi. 4 elever har både biologi og kjemi.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell.
b) Systematiser opplysningene ovenfor i et Venn-diagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra denne klassen.

c) Finn sannsynligheten for at denne eleven har biologi.
d) Finn sannsynligheten for at eleven har biologi eller kjemi. (Se siste linje i eksempel 4.)
e) Det viser seg at den valgte eleven har biologi. Hva er sannsynligheten for at denne eleven også har kjemi?

Eksempel 10

Klasserommet til 1STB skal males, og rommet skal få nye gardiner. Elevene blir enige om at rommet skal males hvitt eller lysegult, mens gardinene skal være grå eller røde. De skriver valgene sine på to lapper og putter lappene i to krukker. Tabellene viser ønskene til de 30 elevene i klassen:

Rommet	
Hvitt	18
Lysegult	12

Gardinene	
Grå	16
Røde	14

For å bestemme fargen på malingen og gardinene, trekkes det en lapp fra hver krukke. Sannsynligheten for at det blir hvit maling blir da $P(\text{hvit maling}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Vi bruker produktsetningen for å finne sannsynligheten for at det blir hvit maling og røde gardiner: $P(\text{hvit maling og røde gardiner}) = \frac{18}{30} \cdot \frac{14}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15} = \frac{21}{75} = 0,28$.

Det viser seg at 5 elever ønsker lysegul maling og røde gardiner.

Vi vil ved hjelp av denne opplysningen finne sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ønsker hvit maling og grå gardiner. Da lager vi først en krysstabell:

	Hvit maling	Lysegul maling	Sum
Grå gardiner	9	7	**16**
Røde gardiner	9	**5**	**14**
Sum	**18**	**12**	**30**

Nå er det lett å se at $P(\text{hvit maling og grå gardiner}) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$.

4. Sannsynlighetsregning når utfallene ikke er like sannsynlige

4.1. Innledning

Svært ofte i praktisk sannsynlighetsregning er alle utfallene ikke like sannsynlige. I noen tilfelle må vi da selv finne sannsynligheter for utfall ved å regne ut relative frekvenser. I andre tilfelle får vi *oppgitt* slike sannsynligheter som er funnet ved forsøk. Disse sannsynlighetene skal så gjerne brukes til å regne ut sannsynligheter for ulike hendelser.

4.2. Bruk av produktsetningen og addisjonssetningen

Eksempel 11

Hvis mor og far begge har brune øyne, er sannsynligheten for at et barn har brune øyne lik 0,75. Sannsynligheten for at øynene er blå, er 0,25. Paret får fire barn.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fire barna får brune øyne?

Ifølge produktsetningen har vi:

$P(\text{alle fire har brune øyne}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}75^4 = 0{,}316$.

Dette betyr at hvis vi undersøker mange firebarnsfamilier med brunøyde foreldre, vil alle fire barna ha brune øyne i omtrent 31,6 % av familiene.

b) Hva er sannsynligheten for at de to første er brunøyde og de to siste er blåøyde?

Sannsynligheten for at de to første barna er brunøyde og de to siste er blåøyde, er

$$P(\text{brun, brun, blå, blå}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}035$$

De to utfallene (brun, brun, brun, brun) og (brun, brun, blå, blå) av det sammensatte forsøket er altså ikke like sannsynlige.

Oppgave 17

Det har vist seg at sannsynligheten for at et nyfødt barn er en gutt ikke er helt den samme som sannsynligheten for at det er ei jente. Sannsynlighetene er $P(\text{gutt})=0{,}514$ og $P(\text{jente}) = 0{,}486$.

a) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er gutter.

b) Finn sannsynligheten for at alle barna i en firebarnsfamilie er jenter.

Oppgave 18

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,8. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at alle fem frøene spirer?

b) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem spirer?

Eksempel 12
Jonas sykler til skolen. På veien passerer han to lyskryss. Etter mange passeringer har han funnet ut at sannsynligheten for at han får grønt lys i første krysset er 0,6, og sannsynligheten for at han får grønt lys i andre krysset er 0,3.
a) Hva er sannsynligheten for at han får *rødt* lys i første krysset?

Fordi det bare er to mulige utfall må vi ha at P(grønt) + P(rødt) = 1.
Da er P(rødt) = 1 – P(grønt) = 1 – 0,6 = 0,4.

b) Hva er sannsynligheten for å få rødt i begge kryssene?

Vi bruker produktsetningen:

$$P(\text{rødt i første og rødt i andre}) = P(\text{rødt i første}) \cdot P(\text{rødt i andre}) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$$

c) Hva er sannsynligheten for å få grønt i begge kryssene?

$$P(\text{grønt i første og grønt i andre}) = P(\text{grønt i første}) \cdot P(\text{grønt i andre}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$$

d) Hva er sannsynligheten for å få rødt i nøyaktig ett av kryssene?

Her må vi bruke både addisjonssetningen og produktsetningen.

P(ett grønt og ett rødt) = P(rødt i første og grønt i andre *eller* grønt i første og rødt i andre) =
P(rødt i første og grønt i andre) + P(grønt i første og rødt i andre) =
$0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$.

Legg merke til at summen av sannsynlighetene i b, c og d er lik 1. Hvorfor må det være slik?

Oppgave 19

Per og Kari kommer ofte for sent til første time. Etter at det har gått noen måneder av skoleåret, har klassens ekspert i sannsynlighetsregning funnet ut at sannsynligheten for at Per kommer for sent er 0,23, og sannsynligheten for at Kari kommer for sent er 0,18. Per og Kari kjenner ikke hverandre, og kommer ikke med samme buss, slik at det at Per kommer for sent ikke påvirker sannsynligheten for at Kari kommer for sent.
a) Hva er sannsynligheten for at Per kommer *tidsnok* en bestemt dag?
b) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en bestemt dag?
c) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem kommer tidsnok en bestemt dag?
d) Hva er sannsynligheten for at både Per og Kari kommer tidsnok en hel skoleuke (fem dager)?

4.3. Oppgaver med sannsynlighet for "minst én"

Eksempel 13

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø fra en frøpose skal spire og bli til en plante, er 0,7. Vi sår fem frø.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av frøene spirer?

Sannsynligheten for at et bestemt frø ikke skal spire blir 1 – 0,7 = 0,3.
Produktsetningen gir da

$$P(\text{ingen spirer}) = 0{,}3^5 = 0{,}002.$$

b) Hva er sannsynligheten for at minst ett av frøene spirer?

At "minst ett" spirer betyr at ett eller flere frø spirer. Denne sannsynligheten kan vi regne ut ved å legge sammen de fem sannsynlighetene for at 1, 2, 3, 4 og 5 spirer, men dette er mye arbeid og vanskelig. Det er mye lettere hvis vi deler alle mulige utfall i *to* hendelser istedenfor i seks, nemlig "ingen frø spirer" og "minst ett frø spirer". Fordi disse to hendelsene dekker alle muligheter, må vi ha

$$P(\text{ ingen frø spirer}) + P(\text{minst ett frø spirer}) = 1$$

Derfor har vi

$$P(\text{minst ett frø spirer}) = 1 - P(\text{ ingen frø spirer}) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998 = 99{,}8\ \%.$$

Oppgave 20

Sannsynligheten for at Per kommer for sent til skolen en tilfeldig dag er 0,23.

a) Hva er sannsynligheten for at han kommer for sent både onsdag, torsdag og fredag?

b) Hva er sannsynligheten for at han kommer *tidsnok* minst én av disse tre dagene?

Oppgave 21

I en kommune stemte 48 % på et av de "rødgrønne" partiene. Vi velger tilfeldig ut fem av de som stemte. Hva er sannsynligheten for at minst én av disse velgerne stemte "rødgrønt"?

Eksamensoppgaver

E1
(Eksamen 1P høst 2010, Del 1)

I en twistpose er det 30 twistbiter. Per liker 18 av disse. Vi trekker tilfeldig én twistbit fra posen.

1) Finn sannsynligheten for at Per liker denne twistbiten.

Sannsynligheten for at Ola liker en tilfeldig valgt twistbit fra posen, er 0,4.

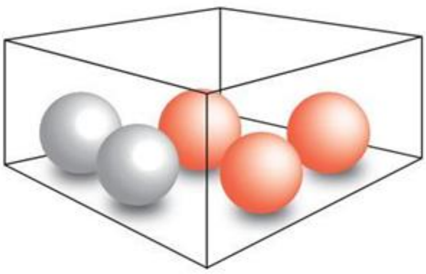
2) Hvor mange av twistbitene i posen liker Ola?

E2
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

Hva er mest sannsynlig å få?

- en sekser når du kaster én terning
- to like når du kaster to terninger

E3
(Eksamen 1P vår 2013, Del 1)



I en eske er det tre røde og to blå kuler. Sondre trekker tilfeldig to av kulene.

a) Bestem sannsynligheten for at han trekker to røde kuler.

b) Bestem sannsynligheten for at de to kulene han trekker, har samme farge.

E4
(Eksamen 1P høst 2011, Del 1)

Eva har én pakke blåbærgelé, to pakker kiwigelé, to pakker sitrongelé og tre pakker bringebærgelé.

Hun tar tilfeldig to pakker gelé.

1) Hva er sannsynligheten for at den første pakken hun tar, er kiwigelé?

2) Hva er sannsynligheten for at hun tar to pakker kiwigelé?

3) Hva er sannsynligheten for at hun tar én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé?

E5
(Eksamen 1P vår 2012, Del 2)

Karen har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker i en skuff. En dag tar hun tilfeldig to sokker fra skuffen.

a) Bestem sannsynligheten for at hun tar to rosa sokker.

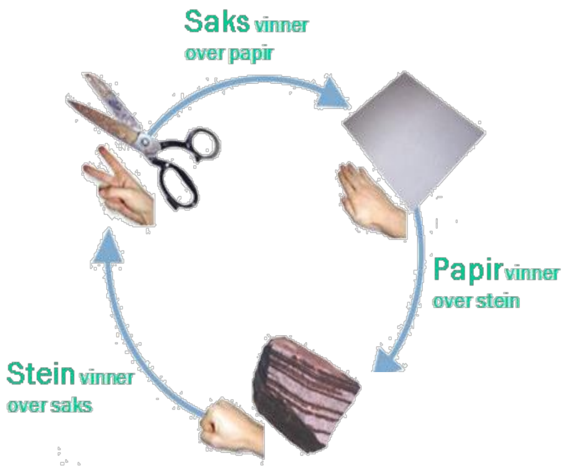
b) Bestem sannsynligheten for at hun tar én rosa sokk og én sokk i en annen farge.

c)  Bestem sannsynligheten for at hun tar to sokker med samme farge.

E6

(Eksamen 1P vår 2011, Del 2) 

"Stein – saks- papir" er en konkurranse mellom to personer. Hver person bestemmer seg for enten stein, saks eller papir, og begge viser så samtidig, ved å bruke den ene hånden, hva de har valgt. Se figuren nedenfor.



Reglene er slik:

- Saks vinner over papir.
- Papir vinner over stein.
- Stein vinner over saks.

Dersom begge velger det samme (for eksempel stein), blir det uavgjort.

Bård og Lars skal spille "Stein- saks- papir". Ett mulig utfall kan da for eksempel bli at Bård velger Stein og Lars velger papir.

a) Lag en oversikt som viser alle de ni mulige utfallene når Bård og Lars spiller "Stein- saks- papir" en gang.

La B betyr seier til Bård, U avgjort og L seier til Lars.

b) Forklar at sannsynligheten for at Bård vinner, $P(B)$, er 1/3.

Bård og Lars skal spille "Stein- saks- papir" tre ganger. Et mulig resultat er da BUL, som betyr at Lars vinner første gang, at det blir uavgjort andre gang, og at Lars vinner tredje gang.

c) Hvor mange ulike resultater kan vi få når Bård og Lars spiller tre ganger?

d) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner minst to av de tre gangene?

Når to personer spiller "Stein- saks- papir", er vinneren den som vinner flest av tre ganger. Dersom begge vinner like mange ganger, blir det uavgjort.

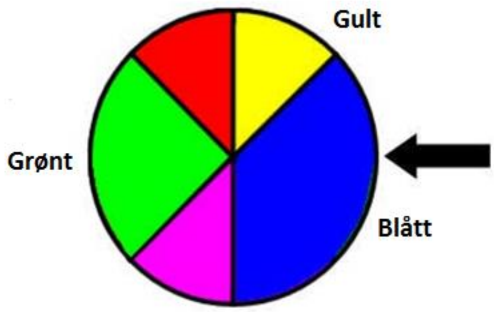
e) Hva er sannsynligheten for at Bård vinner?

E7

(Eksamen vår 2010, Del 1)

Figuren til høyre viser et lykkehjul.

1) Lise snurrer hjulet én gang. Hva er sannsynligheten for at pilen peker på enten blått eller grønt felt når hjulet stopper?



2) Lotte snurrer hjulet to ganger. Hva er sannsynligheten for at pilen peker én gang på gult felt og én gang på grønt felt?

E8

(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

En undersøkelse har vist at 20 % av alle syklister i en by sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig to syklister fra denne byen.

a) Bestem sannsynligheten for at begge sykler uten lys i mørket.

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig én av dem sykler uten lys i mørket.

E9

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 2)

I en klasse er det 22 elever. 12 av elevene har førerkort. 14 av elevene har bil. 4 elever har bil, men ikke førerkort.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har førerkort og bil.

Vi velger tilfeldig en elev som har førerkort.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har bil.

E10
(Eksamen 1P høst 2013, Del 2)

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. Én av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tall i de hvite rutene.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum			

Siv tar tilfeldig én bukse fra skapet.

b) Bestem sannsynligheten for at buksen passer.

Siv har tatt en bukse som passer.

c) Bestem sannsynligheten for at denne buksen er blå.

E11
(Eksamen 2P-Y høsten 2013, Del 2)

I en klasse er det 15 jenter og 10 gutter. 5 av jentene og 5 av guttene drikker kaffe.

a) Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tallene i de hvite rutene.

	Jenter	Gutter	Sum
Drikker kaffe			
Drikker ikke kaffe			
Sum			

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven drikker kaffe.

En elev fra klassen drikker kaffe.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven er ei jente.

E12
(Eksamen 2P-Y vår 2013)

I en klasse er det 20 elever. 8 av elevene har vært i USA. 11 har vært i Spania. 5 av elevene har verken vært i USA eller i Spania.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et Venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har vært både i USA og Spania.

Vi velger tilfeldig en elev som ikke har vært i USA.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven har vært i Spania.

E13
(Eksamen 1P høst 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 25 elever. 12 av elevene har valgt internasjonal engelsk neste skoleår.

14 av elevene har valgt sosialkunnskap. 4 elever har verken valgt internasjonal engelsk eller sosialkunnskap.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven har valgt både internasjonal engelsk og sosialkunnskap.

Vi velger tilfeldig en elev som har valgt sosialkunnskap.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven også har valgt internasjonal engelsk.

E14
(Eksamen 1P vår 2011, Del 1)

De 20 elevene i klasse 1A planlegger sommerferien.

- 16 elever har fått sommerjobb.
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

1) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

2) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klasse 1A skal på ferie.

E15
(Eksamen 1P vår 2012, Del 1)

I klasse 1A er det 20 elever. 15 av elevene spiller fotball, og 10 spiller håndball. Én elev spiller verken fotball eller håndball.

1) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Fra klassen velger vi tilfeldig én av elevene som spiller fotball.

2) Bestem sannsynligheten for at denne eleven i tillegg spiller håndball.

E16
(Eksamen 1P vår 2010, Del 2)

En kommune har kartlagt utdanningsnivået blant innbyggerne i aldersgruppen 30–39 år. Tabellen viser høyeste fullførte utdanning for disse innbyggerne.

	Kvinner	Menn	Totalt
Grunnskole	166	253	419
Videregående skole	385	654	1039
Universitet eller høyskole	517	493	1010
Totalt	1068	1400	2468

a) Hvor mange personer i aldersgruppen 30–39 år bor det i kommunen?

b) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person i gruppen bare har fullført grunnskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

c) Hvor stor er sannsynligheten for at han ikke har fullført universitets- eller høyskoleutdanning?

Du møter en tilfeldig valgt kvinne og en tilfeldig valgt mann mellom 30 og 39 år fra denne kommunen.

d) Hva er sannsynligheten for at begge to bare har fullført grunnskoleutdanning?

E17
(Eksamen 1P høst 2010, Del 2)

Fotballgruppa i et idrettslag ønsker seg en ny ballbinge. De gjennomfører en spørreundersøkelse for å finne ut hva medlemmene i idrettslaget mener om dette.

- Alle de 240 medlemmene i idrettslaget blir spurt.
- 45 % av medlemmene er kvinner.
- 63 av mennene ønsker ballbinge.
- Til sammen 110 av medlemmene ønsker ikke ballbinge.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk opplysningene ovenfor og fyll inn tallene som skal stå i de hvite feltene.

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge			
Ønsker ikke ballbinge			
Totalt			

b) Finn sannsynligheten for at et tilfeldig valgt medlem i idrettslaget ønsker ballbinge.

Et medlem blir valgt tilfeldig. Det viser seg at dette medlemmet ønsker ballbinge.

c) Finn sannsynligheten for at dette medlemmet er en mann.

E18
(Eksamen 1P høst 2011, Del 2)

I klasse 1B er det 12 jenter og 15 gutter. 8 av jentene og 9 av guttene kjører moped til skolen.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Vi trekker tilfeldig en elev fra klassen.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke kjører moped?

Vi trekker tilfeldig en av elevene fra klassen som kjører moped.

c) Hva er sannsynligheten for at denne eleven er en gutt?

Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer for sent til første time, er 10 %. Sannsynligheten for at en elev som ikke kjører moped kommer for sent til første time, er 5 %. Vi antar at elevene kommer for sent uavhengig av hverandre.

d) Forklar at sannsynligheten for at alle jentene i klassen kommer presis til første time, er $0{,}9^8 \cdot 0{,}95^4$.

e) Hva er sannsynligheten for at minst én elev i klassen kommer for sent til første time?

E19

(Eksamen vår 2013, Del 2)

I en klasse er det 30 elever. Klassen skal arrangere fest. Elevene må bestemme seg for om de vil ha taco eller pizza til middag, og om de vil ha sjokoladekake eller marsipankake til dessert.

Hver elev legger en lapp med hvilken middag de ønsker, i én krukke og en lapp med hvilken kake de ønsker, i en annen krukke.

Nedenfor ser du hvordan ønskene fordeler seg.

Taco	18
Pizza	12

Sjokoladekake	6
Marsipankake	24

For å avgjøre hva menyen skal være, trekker læreren tilfeldig en lapp fra hver krukke.

a) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag.

b) Bestem sannsynligheten for at det blir taco til middag og marsipankake til dessert.

4 elever vil ha pizza og sjokoladekake.

Vi trekker tilfeldig ut en elev.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven vil ha taco og marsipankake.

E20

(Eksamen 1P høst 2012, Del 2)

En dag fikk elevene ved en skole servert lunsj. De fikk velge mellom pizza og pølser.

3/4 av elevene valgte pizza. Resten valgte pølser.

I tillegg fikk alle tilbud om salat. Halvparten av elevene som valgte pizza, ønsket også salat, mens bare 1/5 av elevene som valgte pølser, ønsket salat.

Vi velger tilfeldig en elev ved skolen.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven valgte pølser, men ikke ønsket salat.

Anta at det er 200 elever ved skolen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket salat?

c) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen ønsket salat?

E21

(Eksamen 2P-Y høsten 2012, Del 1)

En kveld gikk alle elevene i klasse 3A ut for å spise på restaurant. 2/5 av elevene bestilte pasta. Resten bestilte pizza. Halvparten av elevene som bestilte pasta, ønsket også dessert, mens bare 1/3 av elevene som bestilte pizza, ønsket dessert.

Vi velger tilfeldig en elev fra klassen.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven bestilte pizza, men ikke ønsket dessert.

Anta at det er 30 elever i klassen.

b) Hvor mange av disse elevene ønsket dessert?
Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klassen ønsket dessert?

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a)

UTFALL	ANTALL	ANTALL I %
Jente	300	46 %
Gutt	350	54 %
SUM	650	100%

b) 0,46
c) 0,54

Oppgave 2 a)

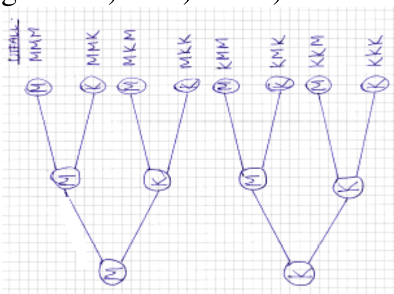
UTFALL	ANTALL	ANTALL I %
Fargeblind	437	%
Normal	5423	9 %
SUM	5460	100%

b) 0,08
c) 0,92

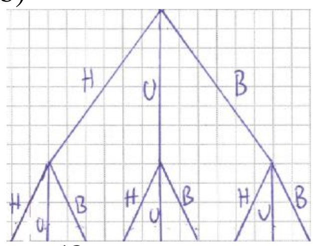
Oppgave 3a) 1/6 b) 1/2 c) 1/52 d) 1/4 e) 1/2
f) Undersøke hvor mange som er født på de ulike datoene over lengre tid, f.eks. ti år. 1/365

Oppgave 4 a) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ b) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{36}$

Oppgave 5 a) 8 b) 1/8 c)

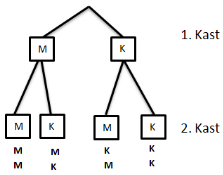


Oppgave 6 a) 9
b)



c) $3^{12} = 531441$

Oppgave 7a)



b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Oppgave 8 a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{8}$

Oppgave 9 a) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ b) 250

Oppgave 10. $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

Oppgave 11. $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Oppgave 12. $\frac{6}{1560} = \frac{1}{260} \approx 0{,}004$

Oppgave 13. $2 \cdot \frac{37}{520} = \frac{37}{260} \approx 0{,}142$

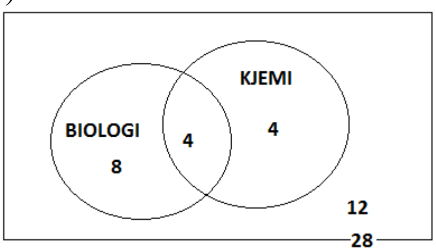
Oppgave 14. a) $\frac{51}{145} \approx 0{,}352$ b) $\frac{22}{145} \approx 0{,}152$ c) $\frac{72}{145} \approx 0{,}497$

Oppgave 15. a) $\frac{11}{850} \approx 0{,}013$ b) $\frac{44}{850} = \frac{22}{425} \approx 0{,}052$

Oppgave 16a)

	Bi logi	Ikke bio ogi	SUM
Kj mi	4	4	8
Ikke kjemi	8	12	20
SUM	12	1	28

b)



c) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ d) $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ e) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Oppgave 17. a) 0,0698 b) 0,0558

Oppgave 18. a) 0,328 b) 0,00032

Oppgave 19. a) $1 - 0{,}23 = 0{,}77$ b) 0,63 c) 0,33 d) 0,10

Oppgave 20 a) 0,012 b) 0,988

Oppgave 21. 0,96

Fasit eksamensoppgaver:

E1. 1)P (Per liker twistbiten) = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 2) 12

E2. P(sekser)=$\frac{1}{6}$,P(to like)=6 · $\frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Sannsynligheten er altså lik.

E3. a) P(to rød) = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ b) P(to rød eller to blå) = $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

E4. 1) P(kiwigele) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 2) P(to kiwigele) = $\frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

3) P(én kiwigele og én blåbæregele) = $\frac{4}{56} = \frac{1}{14}$

E5. a) P(to rosa) = $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$ b) P(en rosa og en annen) = $\frac{32}{90} = \frac{8}{45}$

c) P(to like) = 5 · $\frac{1}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

E6. a)

UTFAll nr	Bård	Lars
1	Stein	Stein
2	Stein	Saks
3	Stein	Papir
4	Saks	Stein
5	Saks	Saks
6	Saks	Papir
7	Papir	Stein
8	Papir	Saks
9	Papir	Papir

b) Av tabellen i a) ser vi at utfallene 2, 6 og 7 gir seier til Bård. Dvs P (B) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

c) $3^3 = 27$ d) 7/27 e) 10/27

E7. 1) P(blått eller grønt) = $\frac{5}{8}$ 2) P(gult og grønt) = $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

E8. a) P(begge uten lys) = $0{,}2^2 = 0{,}04$ b) P(en uten lys) = 0,32

E9. a)

	Førerkort	Ikke førerkort	SUM
Bil	10	4	14
Ikke bil	2	6	8
SUM	12	10	22

b) P(førerkort og bil) = $\frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

c) P(bil, hvis førerkort) = $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

E10. a)

	Blå bukser	Svarte bukser	SUM
Bukser som passer	3	3	6
Busker som ikke passer	1	3	4
SUM	4	6	10

b) P(buksen passer) = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) P(blå, hvis buksen passer) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

E11. a)

	Jenter	Gutter	SUM
Drikker kaffe	5	5	10
Drikker ikke kaffe	10	5	15
SUM	15	10	25

b) P (eleven drikker kaffe) = $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

c) P (jente, hvis eleven drikker kaffe) = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

E12. a)

	Spania	Ikke Spania	SUM
USA	4	4	8
Ikke USA	7	5	12
SUM	11	9	20

b) P (USA og Spania) = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) P (Spania, hvis ikke USA) = $\frac{7}{12}$

E13. a)

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	SUM
Internasjonal engelsk	5	7	12
Ikke internasjonal engelsk	9	4	13
SUM	14	11	25

b) P (Int. engelsk og sos.kunnskap) = $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

c) P (Int. engelsk, hvis sos.kunnskap) = $\frac{5}{14}$

E14.1)

	Jobb	Ikke jobb	SUM
Ferie	10	2	12
Ikke ferie	6	2	8
SUM	16	4	20

2) P (ferie) = $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

E15. 1)

	Fotball	Ikke fotball	SUM
Håndball	6	4	10
Ikke håndball	9	1	10
SUM	15	5	20

2) P (håndball, hvis fotball) = $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

E16a) 2468

b) P (grunnskole) = $\frac{419}{2468} \approx 0{,}17$

c) P (ikke universitet/høyskole) = $\frac{907}{1400} = 0{,}65$

d) P (begge grunnskole) = $\frac{166}{1068} \cdot \frac{253}{1400} \approx 0{,}026$

E17. a)

	Mann	Kvinne	SUM
Ønsker ballbinge	63	67	130
Ønsker ikke ballbinge	69	41	110
SUM	132	108	240

b) P (medlemmet ønsker ballbinge) = $\frac{130}{240} = 0{,}54$

c) P (mann, hvis medlemmet ønsker ballbinge) = $\frac{63}{130} = 0{,}49$

E18. a)

	Jenter	Gutter	SUM
Kjører moped	8	9	17
Kjører ikke moped	4	6	10
SUM	12	15	27

b) P (kjører ikke moped) = $\frac{10}{27} \approx 0{,}37$

c) P (gutt, hvis eleven kjører moped) = $\frac{9}{17} \approx 0{,}53$

d) Sannsynligheten for at en elev som kjører moped kommer presis til første time er $1 - 0{,}10 = 0{,}90$. 8 jenter kjører moped, samlet er sannsynligheten for at disse kommer presis $0{,}90^8$. Tilsvarende tankegang for jentene som ikke kjører moped gir sannsynligheten $0{,}95^4$. Totalt gir dette $0{,}90^8 \cdot 0{,}95^4$

e) P (minst en elev kommer for sent) = 1 – P (alle kommer tidsnok) = $1 - (0{,}90^{17} \cdot 0{,}95^{10}) = 0{,}90$

E19a) P (taco) = $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

b) P (taco og marsipankake) = $\frac{18}{30} \cdot \frac{24}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$

c) Lager en krysstabell til hjelp:

	Taco	Pizza	SUM
Sjokoladekake	2	4	6
Marsipankake	16	8	24
SUM	18	12	30

P (taco og marsipankake) = $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

E20. a) P (pølser, ikke salat) = $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

b) $200 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = 85$

c) P (salat) = $\frac{85}{200} = 0{,}485$

E21. a) P (pizza, ikke dessert) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $30 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{60}{5} = 12$

P (dessert) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$