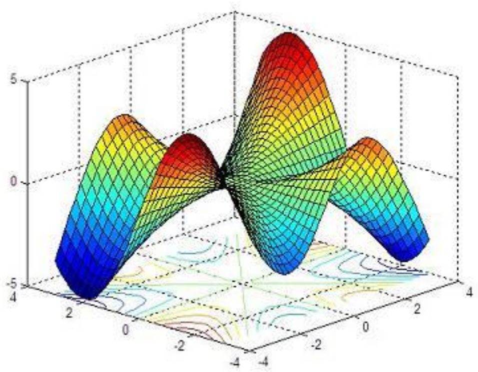
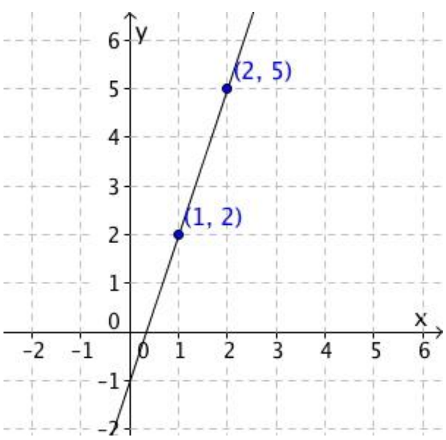
Kapittel 6. Funksjoner



Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Hva en funksjon er.
- Lineære funksjoner.
- Framstille funksjoner som formel, verditabell og graf.
- Tegne grafer til funksjoner, både med blyant og dataprogrammet Geogebra.
- Proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser.
- Polynomfunksjoner.
- Finne skjæringspunkter mellom to grafer.
- Finne topp- og bunnpunkter på grafer.



Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken.

Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser.

1. Noen begreper

1.1 Størrelse

I matematikk er en *størrelse* noe som kan måles og som vanligvis har en målenhet.

Eksempel 1

Dette er eksempler på størrelser:

- vekten av en pose med epler (målenhet kg)
- prisen for en pose med epler (målenhet kr)
- høyden av et tre (målenhet m)
- temperaturen i en kopp med kaffe (målenhet grader)
- farten til en bil (målenhet km/h)

1.2 Variabel.

En *variabel* er en størrelse som kan variere (forandre seg) og derfor ha ulike verdier. De fleste størrelser kan være variabler. Hvis en størrelse ikke forandrer seg, sier vi at den er *konstant*. Dette er eksempler på *konstante* størrelser:

- Farten til lys er konstant og alltid lik 300 000 km/s.
- Hvis en kopp med varm kaffe står lenge på bordet, vil temperaturen i kaffen til slutt bli konstant og lik temperaturen i rommet.

1.3 Størrelser som er avhengig av hverandre

Eksempel 2

Dette er eksempler på sammenhenger mellom størrelser:

- Hvis vekten av en eplepose forandrer seg, forandrer prisen for posen seg også
- Hvis radien til en sirkel forandrer seg, forandrer arealet av sirkelen seg også
- Når alderen til et tre forandrer seg, forandrer høyden av treet seg også

1.4. Funksjoner

Hvis to størrelser er avhengige av hverandre, sier vi at den ene størrelsen er en *funksjon* av den andre størrelsen.

Eksempel 3

Dette er eksempler på *funksjoner*:

- prisen for en eplepose er en funksjon av vekten av posen
- arealet av en sirkel er en funksjon av radien i sirkelen
- høyden av et tre er en funksjon av alderen til treet

2. Hvordan kan vi vise fram sammenhengen mellom to størrelser?

Funksjonssammenhenger kan framstilles som

1) en *tabell*
2) en *graf*
3) et *funksjonsuttrykk* (en *formel*) for funksjonen.

Verdien til den størrelsen som vi lar variere, kaller vi ofte for *x*.
Verdien til den andre størrelsen kaller vi ofte for *y*.

2. 1 Tabell

Vi kjøper tre store poser epler til 20 kr per kilogram, de veier 1 kg, 2 kg og 3,5 kg

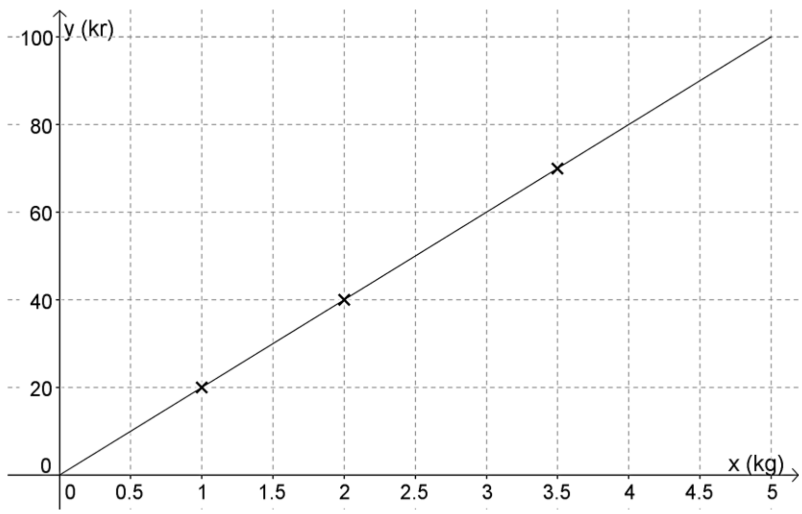
Pose 1: Veier 1 kg. Prisen er $20 \cdot 1 = 20$ kr
Pose 2: Veier 2 kg. Prisen er $20 \cdot 2 = 40$ kr
Pose 3: Veier 3,5 kg. Prisen er $20 \cdot 3{,}5 = 70$ kr

Da kan vi sette opp sammenhengen mellom vekten av en pose (*x*) og prisen av posen (*y*) i en *verditabell*. For eksempel slik:

x / kg	1	2	3,5
y / kr	20,00	40,00	70,00

Legg merke til at vi også tar med *målenhetene* i tabellen.

2. 2 Graf
De tre posene vi kjøper, kan vi se på som tre punkter i et koordinatsystem. Vi tegner dem inn og ser at de ligger på samme rette linje, som vi derfor trekker opp:



Ved hjelp av denne linjen, som vi kaller *grafen* til funksjonen, kan vi lese av hvor mye et bestemt antall kilo epler koster. Vi kan også lese av hvor mange kilo epler vi kan få for et bestemt antall kroner.

2.2.1 Å tegne en graf for hånd

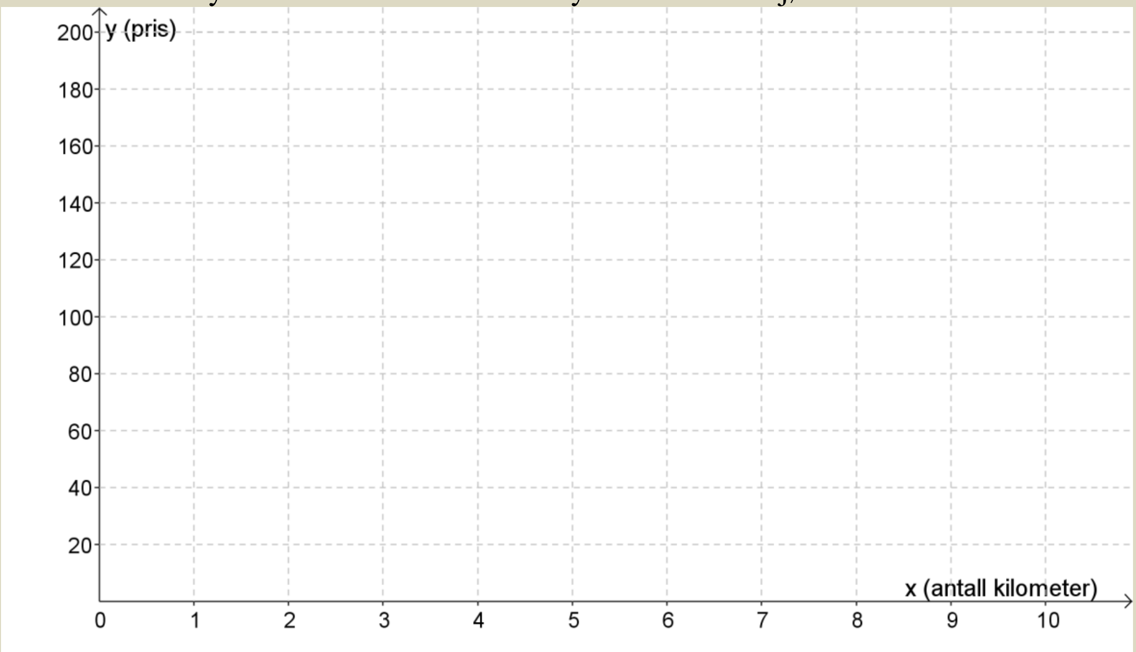
Oppgaven under kan du skrive rett inn i denne boka

Oppgave 1

Bergen taxi har en startpris på 60 kr. Det koster i tillegg 10 kr for hver kilometer. Da er prisen for noen utvalgte lengder gitt i tabellen:

x (antall km)	0	2	4	10
y (pris)	60	80	100	160

a) Tegn inn punktene i koordinatsystemet under, og trekk en rett linje mellom alle punktene med linjal.
b) Bruk koordinatsystemet til å finne ut hvor mye det koster å kjøre 6 km.



Trondheim Taxi tar 20kr i startpris, og 20 kr i tillegg for hver ekstra kilometer.

c) Hvor mye det vil koste å kjøre 0 km?______________________________
d) Hvor mye det vil koste å kjøre 1 km?______________________________
e) Hvor mye det vil koste å kjøre 2 km?______________________________
f) Hvor mye det vil koste å kjøre 8 km?______________________________
g) Fyll punktene inn i tabellen under.

x (antall km)	0	1	2	8
y (pris)				

h) Tegn punktene inn i koordinatsystemet over, og trekk en rett linje mellom punktene.
i) Hvor langt kan du kjøre for 100 kr med dette selskapet?_____________________
j) Hvor mange kilometer må du kjøre for at disse taxiselskapene skal være like dyre?________________________________

Oppgave 2

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

a) Hvor mye koster det å kjøre 0 km?
b) Hvor mye koster det å kjøre 1 km?
c) Hvor mye koster det å kjøre 5 km?
d) Fyll ut tabellen under

x (antall km)	0	5	10
y (pris)			

e) Tegn koordinatsystemet som viser sammenhengen mellom pris og antall kilometer for hånd. La x være mellom 0 og 10 km.

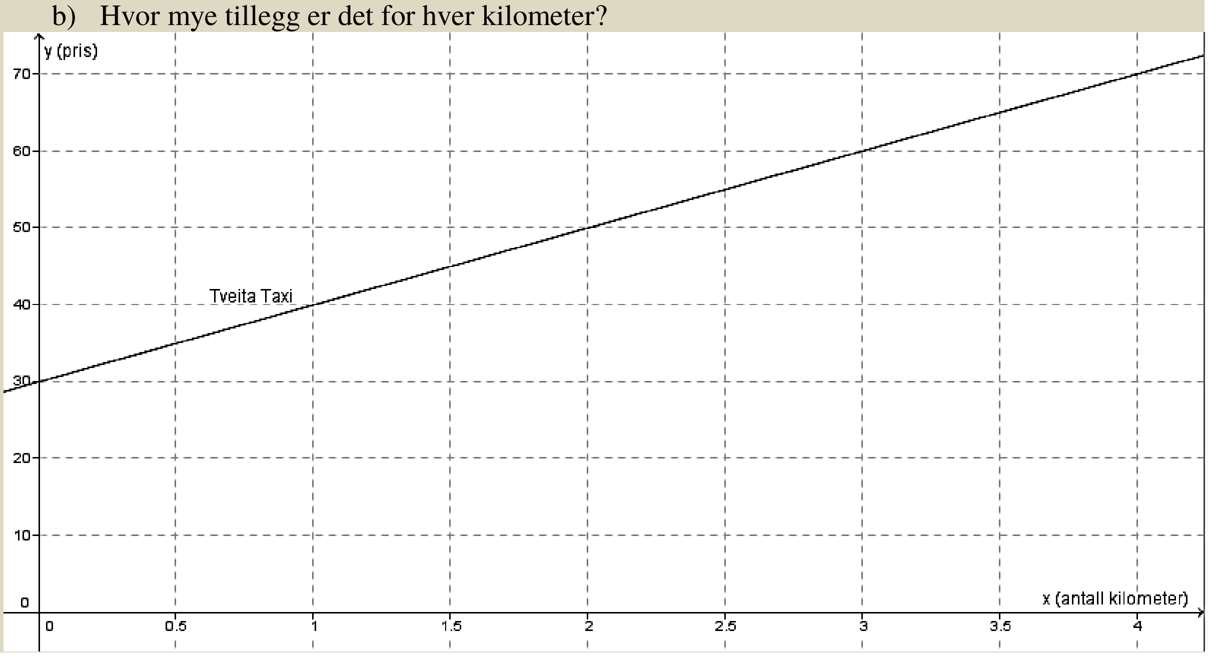
Huskeregler når du tegner koordinatsystem for hånd:

- Koordinatsystemet skal begynne fra null
- Det skal være like lang avstand mellom tallene på aksene
- Skriv navn på aksene
- Regn ut noen verdier for x og y, og plasser dette i koordinatsystemet.
- Trekk en rett linje mellom alle punktene, bruk linjal

Oppgave 3

Grafen under viser prisen for en tur med Tveita taxi.

a) Hva er startprisen hos Tveita taxi?
b) Hvor mye tillegg er det for hver kilometer?



2.3 Funksjonsuttrykk

For mange funksjoner kan vi lage en *formel* for å regne ut verdien til y når vi kjenner verdien til x. Denne formelen kaller vi *funksjonsuttrykket*.

I eksemplet med eplene ovenfor, ser vi at prisen for en kilo epler er 20 kr. Derfor kan regne ut prisen for en pose epler med denne oppskriften:

Prisen for en pose epler = 20 kr/kg · Antall kilo epler i posen

Dersom vi kjøper et visst antall kilo epler, som vi gjerne kaller x antall kilo epler, kan vi skrive det kortere slik:

$$y = 20 \cdot x$$

Ofte dropper vi gangetegnet mellom tallet og x, da blir uttrykket $20x$.

Oppgave 4

Lag en tabell som viser hvor mye det koster å kjøpe 1, 3 og 5 flasker brus hvis en flaske koster 15 kr.

a) Framstill disse tallene som tre punkter i et passende koordinatsystem og tegn grafen til funksjonen som viser sammenhengen mellom pris og antall flasker. Skriv passende enheter på aksene.
b) Les av på grafen hvor mye brus vi kan kjøpe for 60 kr.
c) Lag et funksjonsuttrykk for denne funksjonen.

Kommentar: Denne grafen og dette funksjonsuttrykket har egentlig bare mening når x er et helt positivt tall. Vi kan ikke kjøpe 1,4 flasker eller -2 flasker brus!

3. Skrivemåten $f(x)$

For å vise tydelig at y er en funksjon av x, skriver vi ofte $y = f(x)$. Vi leser det som "f av x".

Epleprisfunksjonen ovenfor kan vi da skrive $f(x) = 20x$.

Hvis vi skal regne ut hvor mye 1,8 kg epler koster, sier vi at vi regner ut funksjonsverdien for $x = 1{,}8$ og vi kan skrive dette slik:

$$f(1{,}8) = 20 \cdot 1{,}8 = 36$$

I praktiske oppgaver bruker vi av og til bokstaver som er litt mer selvforklarende. Eksempler:

- *Høyden* av et tre er en funksjon $h(t)$ av *tiden* som har gått etter planting.
- *Massen* til en aluminiumblokk er en funksjon $m(V)$ av *volumet*.

Vi kommer heretter til å bruke skrivemåtene "y =" og "$f(x)$ =" om hverandre.

Hvis funksjonsuttrykket viser en sammenheng mellom to størrelser fra "det praktiske liv", kaller vi det gjerne for en *matematisk modell* for denne sammenhengen. Hvis funksjonen er lineær, sier vi at det er en *lineær* modell.

4. Lineære funksjoner

De enkleste funksjonene er de hvor grafen er en *rett linje*. Slike funksjoner sier vi er *lineære*.

4.1 Grafen til en lineær funksjon

I del 1 til eksamen bør du kunne tegne grafen til en lineær funksjon som har "pene" verdier for stigningstall og konstantledd på papir og uten kalkulator.

Eksempel 4

En taxitur har en startpris på 50 kr. Det koster i tillegg 20 kr for hver kilometer.

a) 1) Hvor mye koster det å sette seg inn i taxien (kjøre 0 km)?
   2) Hvor mye koster det å kjøre 10 km?
   3) Hvor mye koster det å kjøre 20 km?

b) Sett inn hver av disse "turene" som punkter i et koordinatsystem der lengden på turen er langs x-aksen og prisen på turen langs y-aksen

c) Tegn grafen til denne funksjonen hvis vi ikke skal kjøre mer enn 20 km.

d) Les av på grafen hvor langt vi kan kjøre for 350 kr

e) Lag et funksjonsuttrykk for prisen y hvis vi kjører x km.

LØSNING

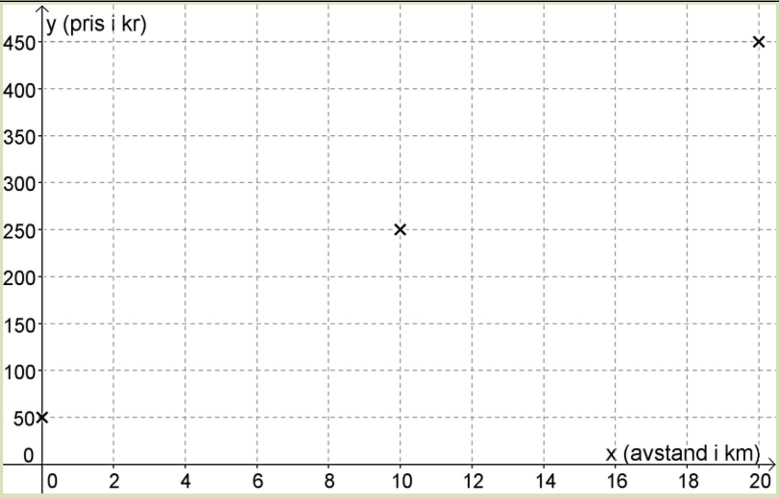
a) 1) Startprisen er 50 kr. Det koster 50 kr å sette seg inn i taxien.

2) $50 + 20 \cdot 10 = 50 + 200 = 250$ kr

3) $50 + 20 \cdot 20 = 50 + 400 = 450$ kr

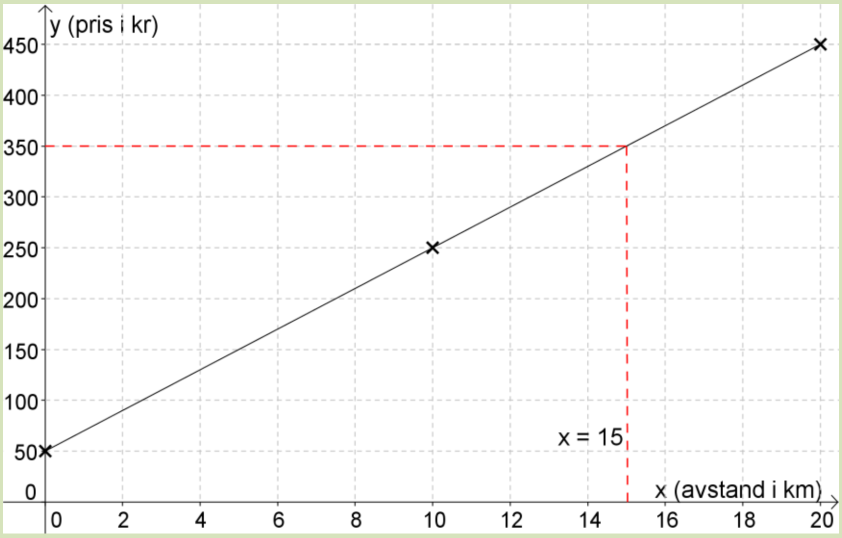
b) Vi lager nå et koordinatsystem hvor x-aksen går fra 0 til ca. 21 km, og y-aksen fra 0 til ca. 500 kr. Vi velger enhetene på aksene slik at grafen ikke blir svært liten, men likevel får plass på arket. Bruk blyant, ikke penn, til grafer!

Deretter merker vi av punktene. Hvis alt er gjort riktig, ligger de tre punktene på en rett linje



Denne linjen er grafen til taxiprisfunksjonen vår.

c) Vi trekker en vannrett linje gjennom $y = 350$ og finner skjæringspunktet:



Vi kan kjøre 15 km for 350 kr. Avlesninger skal merkes av slik vi har gjort over!

Oppgave 5

Jonas går på treningsstudio. Han betaler en fast månedsavgift på 150 kr. I tillegg betaler han 30 kr for hver treningstime. Han trener aldri mer enn 10 ganger på en måned.

a) Hvor mye betaler Jonas en måned han trener 5 ganger (medregnet den faste avgiften)?
b) Sett opp et funksjonsuttrykk som gir månedsprisen hvis han trener x ganger per måned.
c) Tegn grafen til denne funksjonen med papir og blyant, uten kalkulator.
d) Les av på grafen hvor mange ganger han kan trene for 330 kr. Merk av avlesningen og skriv et tekstsvar slik som i eksemplet ovenfor!

4.2 Stigningstall og konstantledd

Eksempel 5

Dette er eksempler på lineære funksjoner:

1) $y = 12x$
2) $f(x) = 12x + 20$
3) $f(x) = -16x + 90$
4) $y = 100 + 40x$
5) $f(x) = 200 - 25x$
6) $h(t) = 0,6t + 1,2$
7) $y = 60$

Alle disse eksemplene har formen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor a og b er konstanter (faste tall). Nedenfor finner du verdiene for a og b for sju funksjonene i eksempel 4. Sjekk at det stemmer og at du forstår:

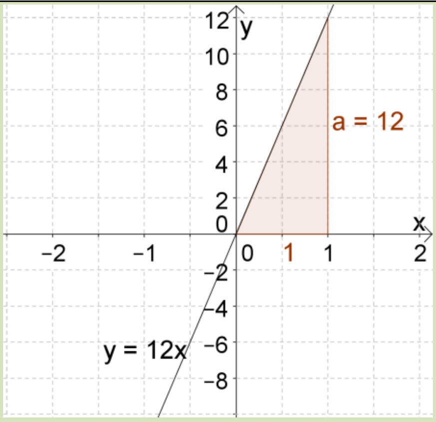
1) a = 12, b = 0 2) a = 12, b = 20 3) a = -16, b = 90 4) a = 40, b = 100
5) a = -25, b = 200 6) a = 0,6, b = 1,2 7) a = 0, b = 60

a kalles *stigningstallet* fordi verdien til *a* bestemmer hvor bratt grafen er.

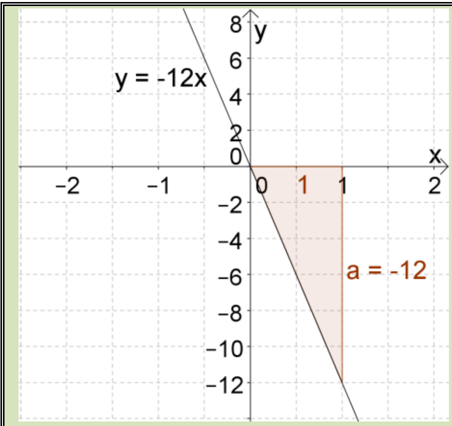
Hvordan bestemmer vi stigningstallet?
Stigningen (brattheten) er bestemt ved hvor mye linja stiger eller synker i y-retning (oppover), dersom vi øker med 1 i x-retning.

Eksempel 6

Linja $y = 12x$ har stigningstall 12.
Det betyr at linja stiger med 12 i y-retningen, hvis vi øker x-verdien med 1, se figuren under.



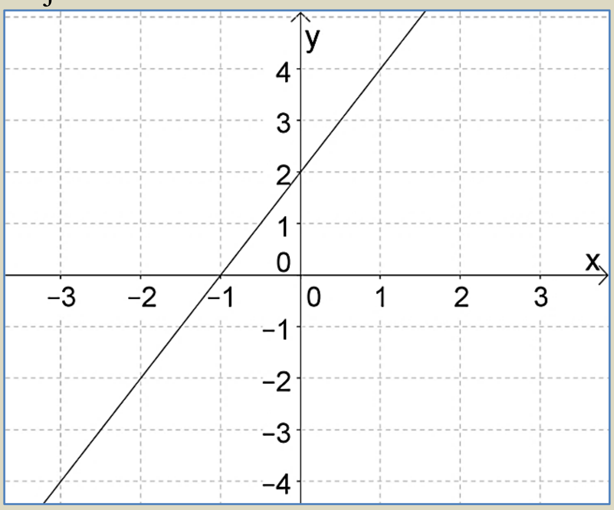
Linja $y = -12x$ har stigningstall -12.
Det betyr at linja synker med 12 i y-retningen, hvis vi øker x-verdien med 1, se figuren under.



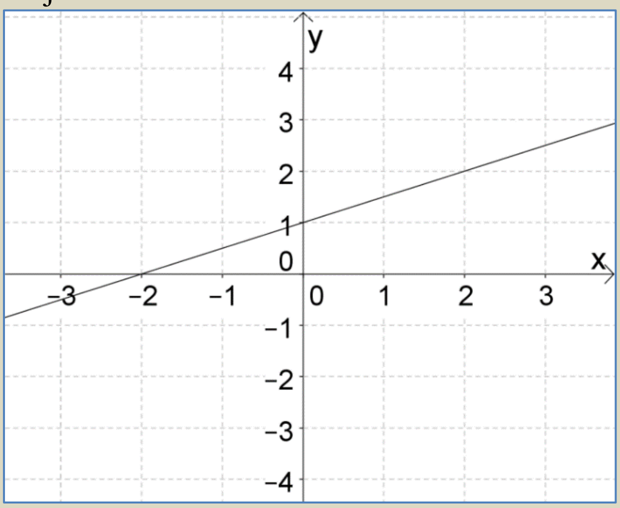
Oppgave 6

Nedenfor ser du to koordinatsystem med en linje i hver, linje A og linje B

Linje A:



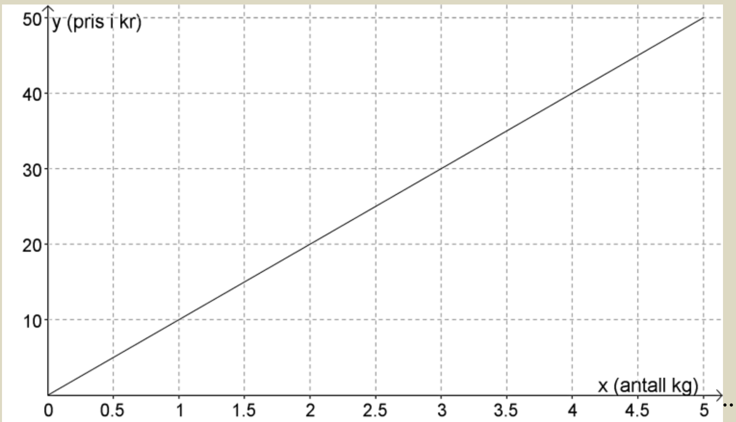
Linje B:



a) Hvilken linje er brattest?
b) Finn stigningstallet til linje A og stigningstallet til linje B

Oppgave 7

Grafen under viser sammenhengen mellom hvor mange kg epler vi kjøper og pris vi betaler



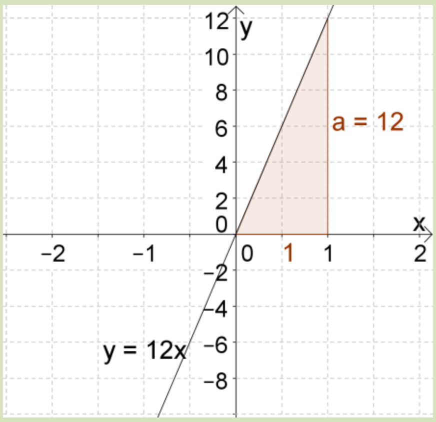
a) Hva er stigningstallet til denne grafen?
b) Hvor mye er prisen per kg epler?

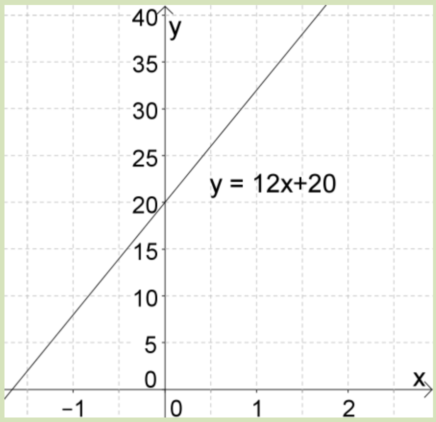
b kalles *konstantleddet* fordi dette leddet er et fast tall (en konstant) uansett hvilken verdi den variable størrelsen har.**Hvordan bestemmer vi konstantleddet?**

Konstantleddet er der grafen treffer y-aksen.

Eksempel 7:

Linja $y = 12x$ har konstantledd lik 0, det betyr at den går gjennom origo
Linja $12x + 20$ har konstantledd 20. Det betyr at den treffer y-aksen der $y = 20$





Oppgave 8

Finn konstantleddet til linje A og konstantleddet til linje B i oppgave 6

Oppgave 9

Finn konstantleddet til grafen i oppgave 7.

5. Bruk av Geogebra til å løse funksjonsoppgaver

5.1 Tegning av grafer i GeoGebra

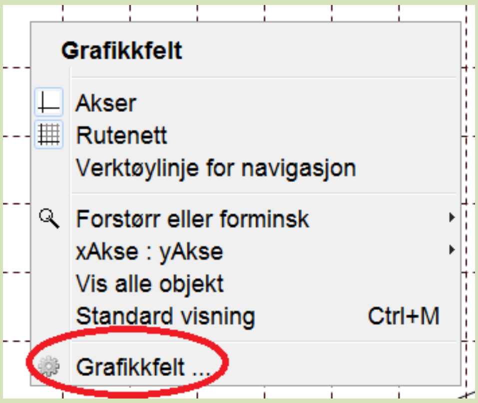
Geogebra kan lastes ned gratis fra internett. Skjembildene nedenfor er fra Windows-versjonen. Kommandoene i Mac-versjonen kan være litt annerledes.

Eksempel 8:
Vi skal skrive inn funksjonen for et taxiselskap som koster 50 kr som startavgift, og deretter 20 kr per km. Da blir uttrykket $f(x) = 20x + 50$, der x er avstanden i km. Vi tenker oss at taxiene kjører mellom 0 km og 20 km.

1. Begynn å skrive ordet Funksjon i inntastingsfeltet og velg kommandoen:
   Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]
   Skriv det inn slik i inntastingsfeltet:

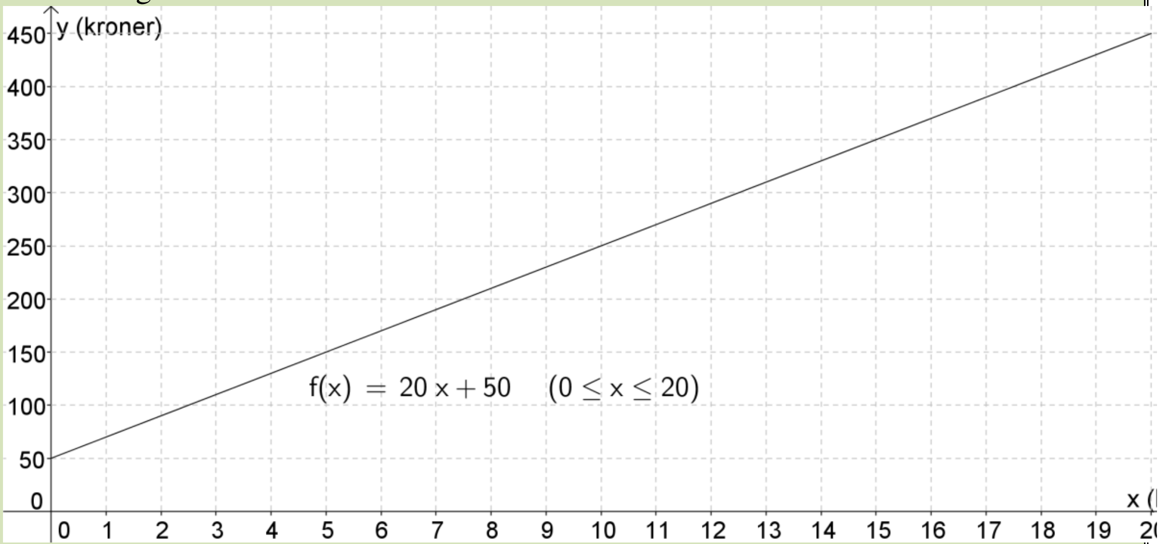
2. For å få grafen innenfor vinduet må vi justere på aksene, da velger vi dette pil-symbolet på verktøylinjen: 
   Da kan vi etter tur plassere markøren over x- og y-aksen slik at den blir en dobbeltpil. Da kan vi "dra" i aksene slik at vi ser hele grafen. Grafen skal dekke hele vinduet:

3. Alle grafer skal ha en passende tekst på aksene. Vi klikker på pilikonet øverst til venstre, og høyreklikker i grafikkfeltet. Da får vi opp denne menyen, hvor vi velger **Grafikkfelt** nederst:



Det kommer opp et vindu hvor vi bl.a. kan skrive inn tekst på aksene. I dette eksemplet skriver vi x (km) for x-aksen og y (kroner) på y-aksen.

4. Til slutt kan vi merke funksjonsuttrykket og "dra" det over i grafikkfeltet. Da får vi denne grafen:

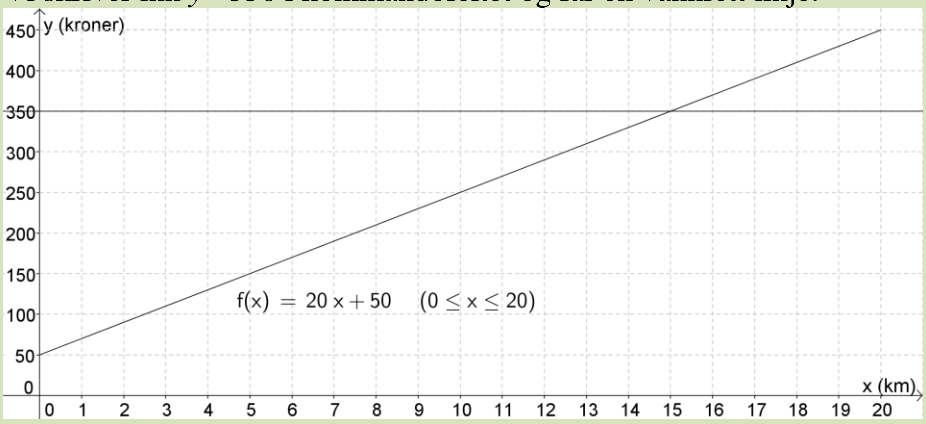


Kopier over i et Word-dokument og skriv ut.

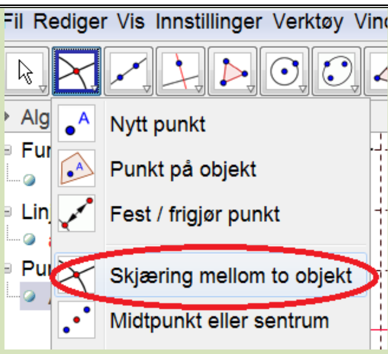
5.2 Grafisk løsning via GeoGebra.

Så skal vi bruke Geogebra til å finne ut hvor langt vi kan kjøre for 350 kr. Her er det lett å lese av direkte, men vi bruker likevel en metode som virker selv når det er umulig å se svaret nøyaktig rett fra grafen.

1. Vi skriver inn y= 350 i kommandofeltet og får en vannrett linje.



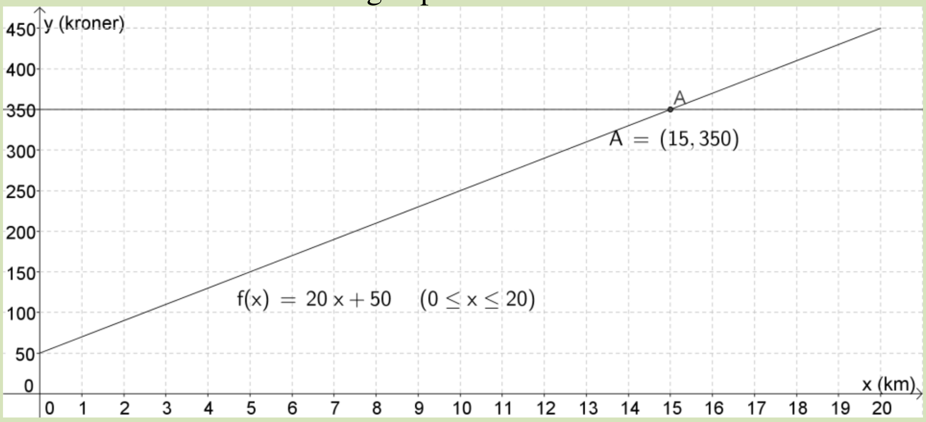
2. Vi finner skjæringspunktet mellom de to grafene ved å velge:



Når vi klikker i skjæringspunktet slik at begge linjene blir tykkere, får vi avmerket skjæringspunktet.

Vi vil vise koordinatene, og får fram disse ved å velge **Flytt**-knappen  , markere punktet og "dra" det over i koordinatsystemet

Da får vi et bilde som skal ligne på dette:



3. Vi avslutter med å skrive et tekstsvar *og* en forklaring på hva vi har gjort.
   Tekstsvar: Vi kan kjøre 15 km for 350 kr

Forklaring: Skrev inn y =350. Brukte "Skjæring mellom to objekt"
Kopier grafen til et word-dokument og skriv det ut derfra.

Oppgave 10

Tegn linjene nedenfor i GeoGebra. Ta ett skjermbilde per graf.

a) $y = 10x + 150$, la x være mellom 0 og 20 (Start = 0, Slutt = 20)
b) $y = 7.5x + 250$, la x være mellom 0 og 20
c) $y = 80 - 2x$, la x være mellom 0 og 12
d) $y = 600 - 15x$, la x være mellom 0 og 12

Oppgave 11

Jon er medlem på treningssenter. Han betaler 180 kr fast per måned og 30 kr per gang. Dersom antall ganger han trener kalles x, kan vi skrive uttrykket som $y = 30x + 180$

a) Tegn grafen til utrykket dersom han trener mellom 0 og 15 ganger i løpet av en måned.
b) Bruk grafen til å finne ut hvor mye han betaler når han trener 10 ganger
c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange ganger i løpet av en måned han kan trene for 600 kr.

Oppgave 12

Anna har et mobilabonnement der hun for samtaler betaler 0,25 kr i fast startavgift pluss 0,45 kr per minutt. Dersom vi snakker i x minutter kan vi skrive funksjonen som $y = 0{,}45x + 0{,}25$

a) Tegn grafen til uttrykket dersom samtalene varer mellom 0 og 60 minutter.
b) Hvor mye betaler hun for en samtale som varer i en halvtime?
c) Hvor lenge kan hun snakke for 10 kroner?

Oppgave 13

Mona leser en bok som har 300 sider. Hver dag leser hun 12 sider. Etter x dager kan antall sider hun har igjen å lese skrives som $y = 300 - 12x$

a) Hun bruker 25 dager på å lese boka. Tegn grafen til uttrykket for x fra 0 til 25.
b) Bruk grafen til å finne ut hvor mange sider har hun lest etter 20 dager
c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange dager det tar før hun har lest 100 sider.

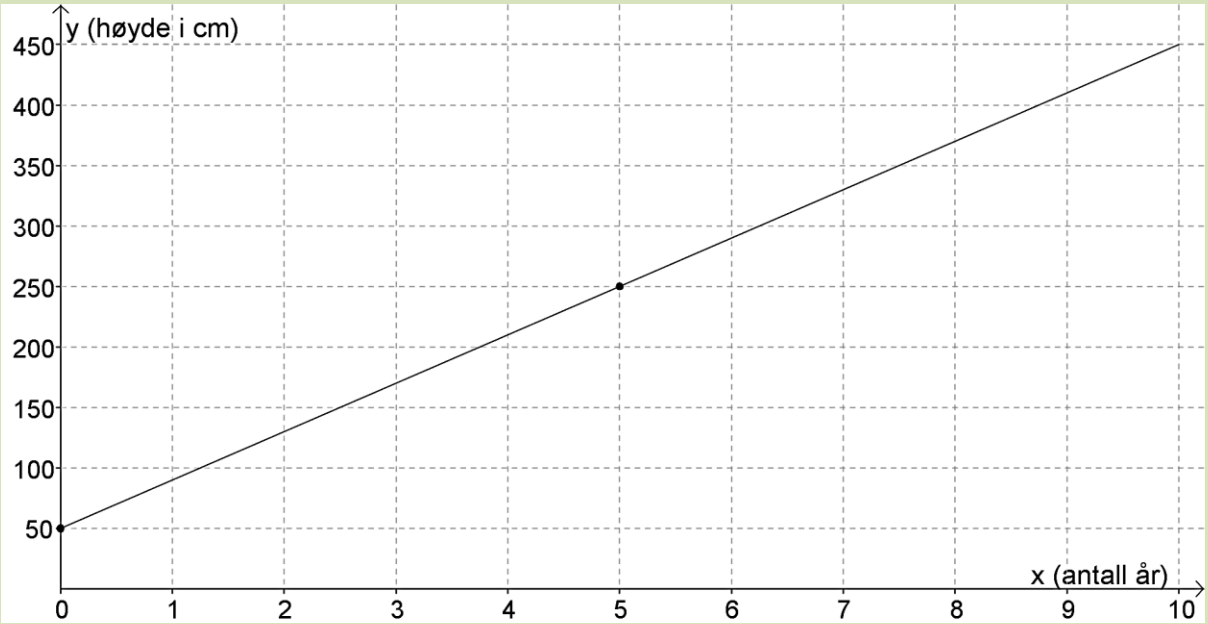
6.Finne funksjonsuttrykket når grafen er kjent

Nå skal vi bruke grafen til en lineær funksjon til å finne ut *hvilken* funksjon vi ser grafen til.

6.1 Positivt stigningstall

Eksempel 9

Grafen nedenfor viser høyden til et tre på forskjellige tider etter at det ble plantet.



a) Hvor høyt var treet da det ble plantet?
b) Hvor mye har treet vokst på ett år?
c) Skriv opp et funksjonsuttrykk som viser høyden y etter x år.

LØSNING:

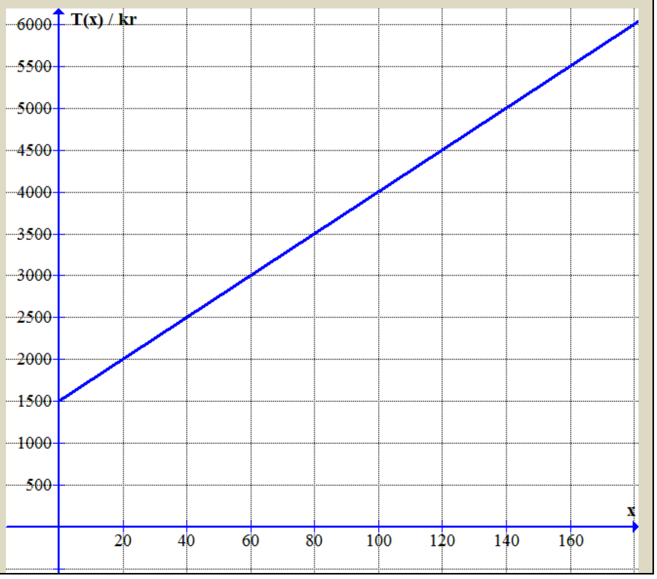
a) Da treet ble plantet, var $x = 0$. Da ser vi at $y = 50$. Treet var 50 cm.
b) I slike oppgaver er det ofte vanskelig å lese av nøyaktig hvor mye y har forandret seg på *ett* år. Da kan vi isteden lese av koordinatene til to punkter på grafen som det er enklere å finne nøyaktige verdier til. Her bruker vi de to avmerkede punktene. Da ser vi at treet har vokst fra 50 cm fra starten $(x = 0)$ til 250 cm etter 5 år.

   Det har altså vokst 250 cm – 50 cm = 200 cm på 5 år.
   Da blir veksten på ett år: $\frac{200}{5} = 40$ cm per år.
c) Her fant vi stigningstallet i oppgave b og konstantleddet i oppgave a.
   Funksjonsuttrykket blir derfor $y = 40x + 50$

Oppgave 14

Sana går ofte på treningsstudio. Hun betaler en årsavgift og i tillegg et fast beløp for hver time. Grafen til høyre viser utgiftene hennes $T(x)$ i treningsstudioet hvis hun trener x timer i året.

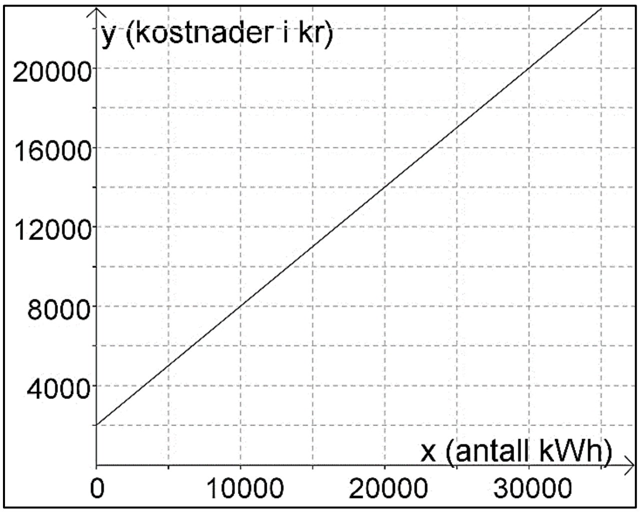
a) Hvor stor er årsavgiften?
b) Hvor mye betaler hun for *en* treningstime?
c) Sana vil ikke bruke mer enn 4000 kr i året på treningen. Hvor mange timer i året kan hun trene da?
Løs oppgaven ved å lese av på grafen.
d) Skriv opp funksjonsuttrykket for $T(x)$.



Oppgave 15

Figuren til høyre viser hvordan de årlige strømutgiftene K(x) i en bolig er avhengig av energi¬forbruket x målt i kilowattimer (kWh). Utgiftene består av et fast årlig beløp pluss en del som bestemmes av en pris for hver kWh og antall kWh som er brukt i løpet av året.

a) Hvor stort er det faste årlige beløpet?
b) Hva er prisen for hver kilowattime?
c) Hvor mye koster det å bruke 18 000 kWh på ett år?
d) Finn ved å bruke figuren hvor mye energi vi kan bruke hvis utgiftene ikke skal bli større enn 14 000 kr.
e) Bestem funksjonsuttrykket til K(x).



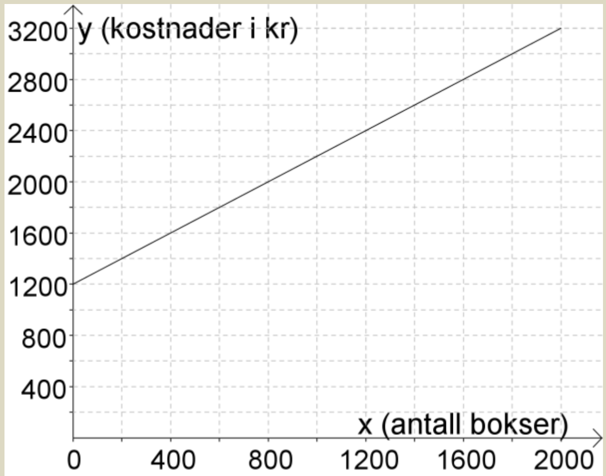
Oppgave 16

En maskin som lager metallbokser, kan produsere inntil 2000 bokser på en dag. Grafen til høyre viser kostnadene *K* i kroner per dag som funksjon av dagsproduksjonen av bokser.

a) Bruk grafen til å finne de faste kostnadene for maskinen per dag. (Med *faste kostnader* mener vi her hva det koster å betale ned på det som maskinen kostet i innkjøp, pluss utgiftene med å holde den i gang).

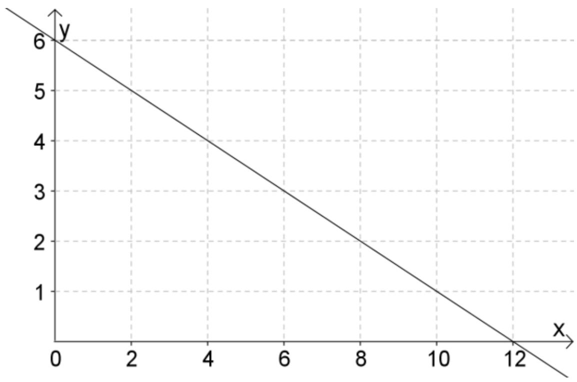
b) Hvor mye koster det å øke produksjonen med én boks?

c) Finn et funksjonsuttrykk for kostnaden $K(x)$ per dag når det blir produsert x bokser.



6.2 Negativt stigningstall

Hvis stigningstallet er *negativt*, vil *y minke* når *x* øker. Da synker linja mot høyre (se figur).



Hva er stigningstallet til linja til venstre?

Skriv svaret på linja under:

____

Hvorfor?

____

<u>Eksempel 10</u>

Abdi har 1500 kr. Hver dag bruker han 100 kr.

a) Lag en funksjon $f(x)$ som viser hvor mye penger han har igjen etter x dager.
b) Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for $f(x)$.
c) Tegn grafen til funksjonen for passende verdier av x.

a) For å gjøre det lettere å tenke, kan vi først regne ut hvor mye han har igjen etter én dag, etter to dager, etter tre dager osv.

Etter én dag: 1500 – 100 = 1400 kr

Etter to dager: $1500 - 100 \cdot 2 = 1500 - 200 = 1300$ kr

Etter tre dager: $1500 - 100 \cdot 3 = 1500 - 300 = 1200$ kr

Etter x dager: $1500 - 100 \cdot x$

Det han har igjen etter x dager kan vi da regne ut med funksjonen $f(x) = 1500 - 100x$.

b) Det er kanskje lettere å se stigningstallet og konstantleddet hvis vi skriver konstantleddet til slutt istedenfor først. Da blir funksjonen $f(x) = -100x + 1500$.

Stigningstallet er – 100 kr/dag, og konstantleddet er 1500 kr.

c) Hvis vi regner litt eller ser på grafen, finner vi ut at pengene hans er oppbrukt etter 15 dager. Det er derfor naturlig å tegne grafen for x mellom 0 og 15. Da blir den omtrent slik:

Oppgave 17

En kopimaskin koster 64 000 kr. Vi regner med at verdien av maskinen avtar (minker) med 8000 kr i året.

a) Finn funksjonsuttrykket $V(x)$ som viser verdien av maskinen etter x år.
b) Skriv opp stigningstallet og konstantleddet for $V(x)$.
c) Hvor lang tid tar det før kopimaskinen har verdi null?
d) Tegn grafen til funksjonen.
e) Hvor lang tid går det før verdien er halvert?

Oppgave 18

Tony har fått et rentefritt lån på 4000 kr hos foreldrene sine. Han betaler tilbake 250 kr hver måned.

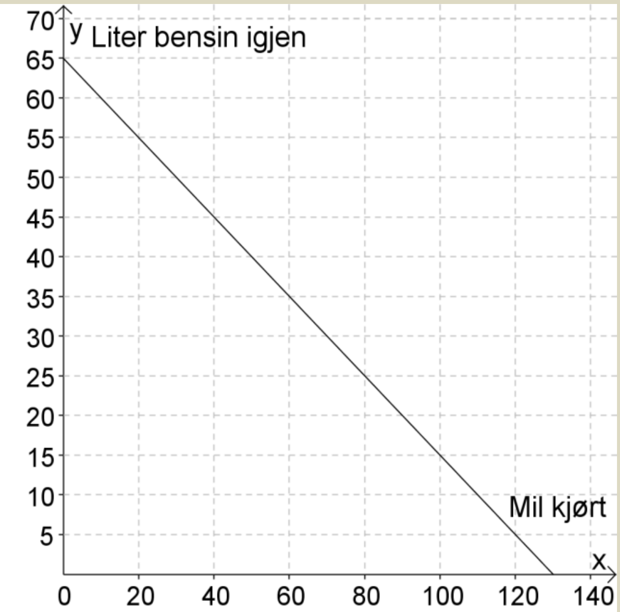
a) Lag en funksjon $S(x)$ som viser hvor mye han skylder foreldrene etter x måneder.
b) Tegn grafen til funksjonen.
c) Hvor mye er det igjen av lånet etter ett år?

d) Hvor lang tid tar det før lånet er nedbetalt, det vil si at han ikke lenger skylder penger?

Oppgave 19

En bilfører fyller bensintanken helt full før han drar ut på langtur. Veien, farten og kjørestilen er slik at han bruker omtrent like mye bensin per mil på hele turen. Grafen til høyre viser hvor mye bensin $b(x)$ det er på tanken etter at han har kjørt x mil etter at tanken ble fylt.

a) Hvor mange liter går det på tanken?
b) Hvor mye bensin bruker han per mil?
c) Skriv opp funksjonsuttrykket for $b(x)$.
d) Etter omtrent hvor mange mil er tanken halvfull?
e) Han fyller bensin på nytt når det er igjen 10 % av full tank. Etter omtrent hvor mange mil fyller han?



Av og til kan stigningstallet være positivt og konstantleddet *negativt*.

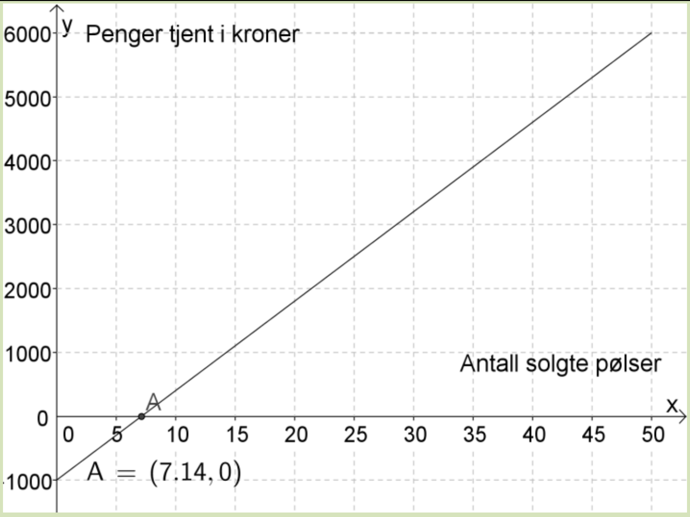
Eksempel 11

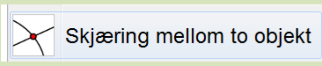
En pølseprodusent selger spekepølser på en varemesse. For å få lov til å stå på en stand på messen, må han betale en avgift på 1000 kr til arrangøren. Pølsene blir solgt for 140 kr per pølse.

a) Hvor mye tjener han hvis han selger
1) 5 pølser? **Avgiften skal regnes med**
2)10 pølser? **Avgiften skal regnes med**.
b) Lag en funksjon som viser hvor mye han tjener hvis han selger x pølser.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn grafen til funksjonen hvis han regner med å selge maksimalt 50 pølser på messen.
e) Hvor mange pølser må han selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen

LØSNING:

a) 1) Med et salg på 5 pølser blir fortjenesten $140 \cdot 5 - 1000 = 700 - 1000 = -300$.
Den negative fortjenesten betyr at han taper 300 kr hvis han bare selger 5 pølser.
2) Med et salg på 10 pølser blir fortjenesten $140 \cdot 10 - 1000 = 1400 - 1000 = 400$.
Han tjener 400 kr hvis han selger 10 pølser.
b) $f(x) = 140x - 1000$
c) Stigningstallet er 140 kr/pølse og konstantleddet er -1000 kr.
d) Her er grafen:



e) Når linja ligger under x-aksen går han med underskudd. Vi må altså finne punktet der grafen treffer x-aksen, det gjør vi ved å bruke knappen for skjæring mellom to objekt 

og så klikke ved skjæringspunktet. Da finner vi at fortjenesten blir positiv når x er større enn 7,1. (Se grafen, punkt A). Han må altså selge 8 pølser for å gå med overskudd.

Oppgave 20

Lotte selger jordbær på torget. Hun må betale en avgift på 100 kr dagen for få stå der. Hun tjener 8 kr på hver jordbærkurv hun selger.

a) Hvor mye tjener hun hvis hun selger
   1) 10 kurver?
   2) 30 kurver?
b) Lag en funksjon som viser hvor mye hun tjener hvis hun selger x kurver.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn grafen til funksjonen hvis hun regner med å selge maksimalt 100 kurver på en dag.
e) Hvor mange kurver må hun selge for å gå med overskudd? Finn svaret fra grafen.

Oppgave 21

Temperaturen i en fryseboks er – 18 grader. Strømmen går og temperaturen øker med 2 grader/time inntil strømmen kommer tilbake etter 15 timer.

a) Hva er temperaturen i fryseboksen
   1) Etter 3 timer?
   2) Etter 12 timer?
b) Lag en funksjon $T(t)$ som viser temperaturen i boksen etter t timer.
c) Hvilken verdi har stigningstallet og konstantleddet her?
d) Tegn en graf som viser temperaturen i boksen som funksjon av tiden.
e) Finn ved avlesning på grafen og ved å løse en likning når temperaturen har steget til 0 grader.

Oppgave 22

Ali arbeider i en salatbar. Han tjener 120 kr per time, men blir trukket 50 kr per dag for mat. Ali arbeider inntil åtte timer om dagen.

a) Lag en funksjon $L(x)$ som viser lønna hans for en dag, fratrukket beløpet for maten, dersom han jobber x timer denne dagen.
b) Tegn grafen til denne funksjonen.
c) Hvor mye tjener Ali hvis han arbeider fire timer?
d) Hvor mange timer arbeidet han en dag hvor han tjente 670 kr?

7. Skjæring mellom to grafer

Noen oppgaver handler om *to* funksjoner. Typiske spørsmål handler om å finne for hvilken verdi av x disse funksjonene har *samme* verdi, eller for hvilke verdier av x den ene funksjonen har *større* verdi enn den andre. Dette kan vi løse ved å finne skjæringspunktet mellom grafene eller ved å løse en likning.

Eksempel 12

I bilutleiefirma A må man betale 500 kr i fast avgift og 3 kr per kjørt km. I firma B er det 800 kr i fast avgift og 2 kr/km.

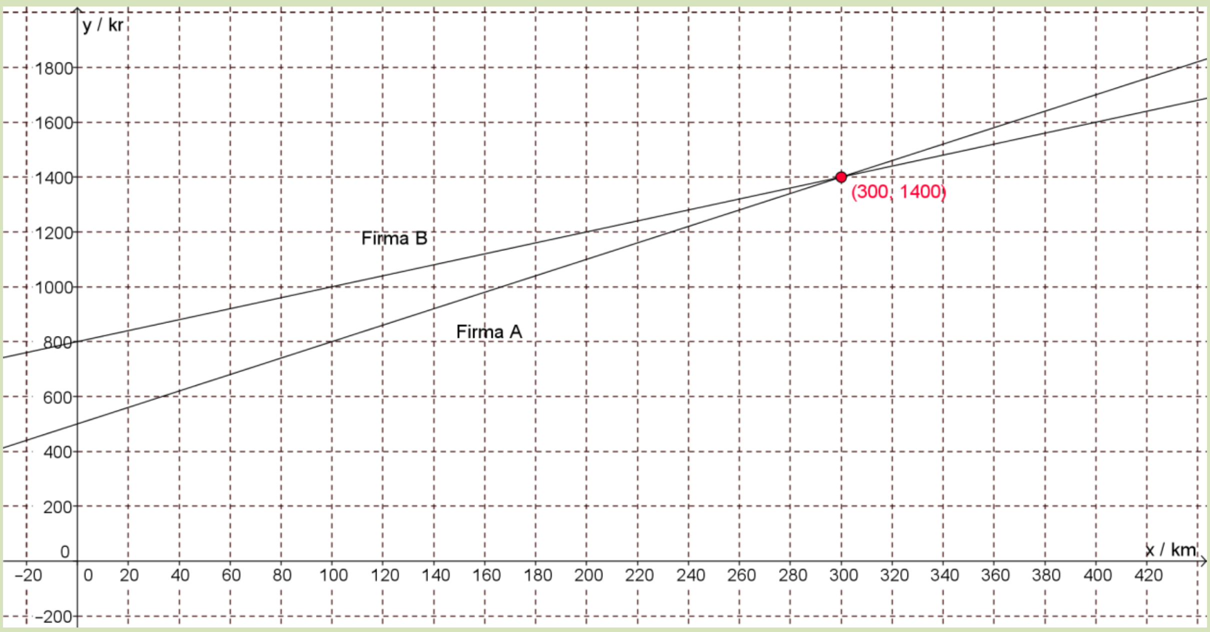
Hvor langt må man kjøre for at det skal lønne seg å bruke firma B?

De to funksjonene som beskriver hvor mye det koster å kjøre x km er

$$A(x) = 3x + 500, \qquad B(x) = 2x + 800 .$$

Her vet vi ikke noen passende største verdi for x så vi skriver inn funksjonene i Geogebra akkurat slik de står ovenfor. Vi drar i aksene til vi tydelig ser skjæringspunktet. Vi finner skjæringspunktet nøyaktig med kommandoen **Skjæring mellom to objekt** slik vi har gjort før.

Her har vi også lagt til tekst i bildet ved hjelp av tekstverktøyet i Geogebra.



Vi ser at firma B er billigst hvis vi kjører mer enn 300 km.

Vi kan også finne når firmaene koster like mye ved å løse en likning:

$$3x + 500 = 2x + 800$$
$$3x - 2x = 800 - 500$$
$$x = 300$$

Oppgave 23

Reisekostnadene ved å bruke to ulike taxiselskaper, A og B, er gitt ved funksjonene

$$A(x) = 12x + 30, \quad B(x) = 9,50x + 65$$

der x er antall kilometer vi reiser. Reisen overstiger ikke 35 km.

a) Tegn grafen til A(x) og B(x) i samme koordinatsystem.
b) Finn grafisk hvor langt vi må kjøre for at selskap B skal være billigst.

Oppgave 24

Frida og Guri blir enige om å spare penger til en ferietur. Frida har 2200 kr og sparer 120 kr i uka. Guri har ingen penger, men sparer 250 kr i uka.

a) Hvor mye har
   1) Frida etter ti uker?
   2) Guri etter ti uker?
b) Hvor mye har
   1) Frida etter tjue uker?
   2) Guri etter tjue uker?
c) Vi kaller de beløpene etter x uker for $F(x)$ og $G(x)$. Skriv opp disse funksjonsuttrykkene.
d) Tegn grafene til F og G for 26 uker (et halvt år).
e) Hvor mange uker går det før de to har like mye?
f) Hvor mange kroner har de da?

Oppgave 25

Magnus er medlem av en bowlingklubb. Medlemsavgiften er 700 kr, og han betaler 18 kr for hver runde. Jørgen bowler sammen med Magnus, men er ikke medlem. Han betaler derfor 30 kr for hver runde. Jørgen regner med at han kommer til å spille maksimalt 100 runder i året.

a) Bestem de to kostnadsfunksjonene $M(x)$ og $J(x)$ som beskriver utgiftene til Magnus og Jørgen.
b) Tegn grafene til de to funksjonene i samme koordinatsystem og finn hvor mange runder Jørgen må spille i året for at det skal lønne seg for ham å tegne medlemskap.

8. Polynomfunksjoner

"Polynom" betyr "flere ledd". En polynomfunksjon består av en sum av potenser av *x*. Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon.*

Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene *f* og *g* ovenfor.

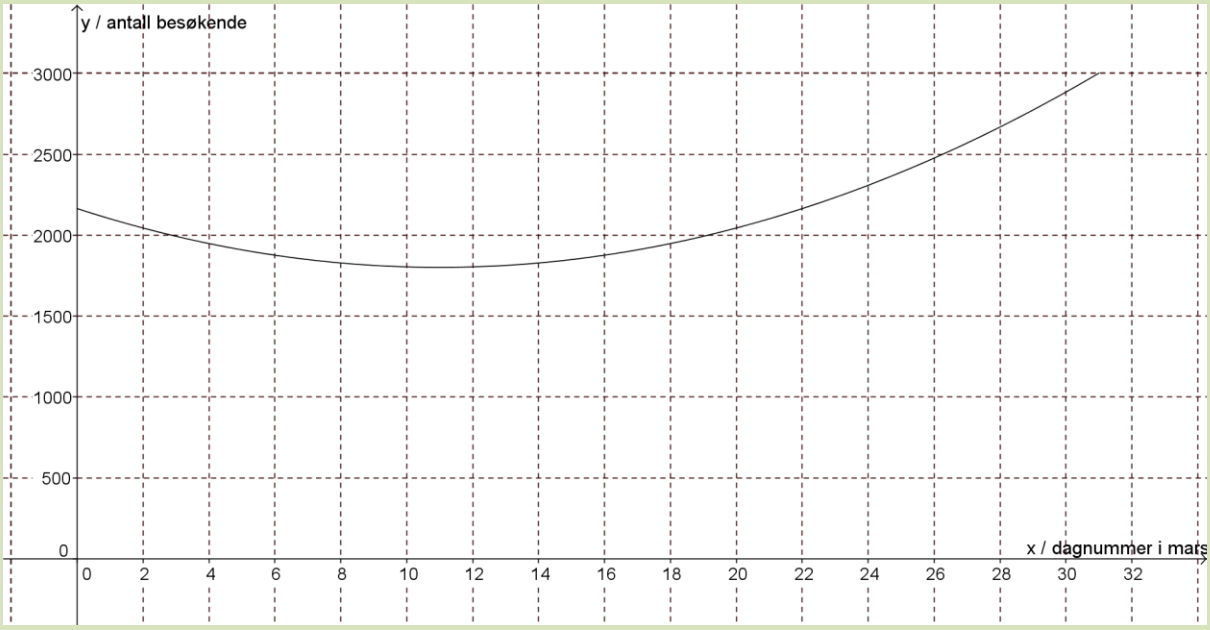
Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

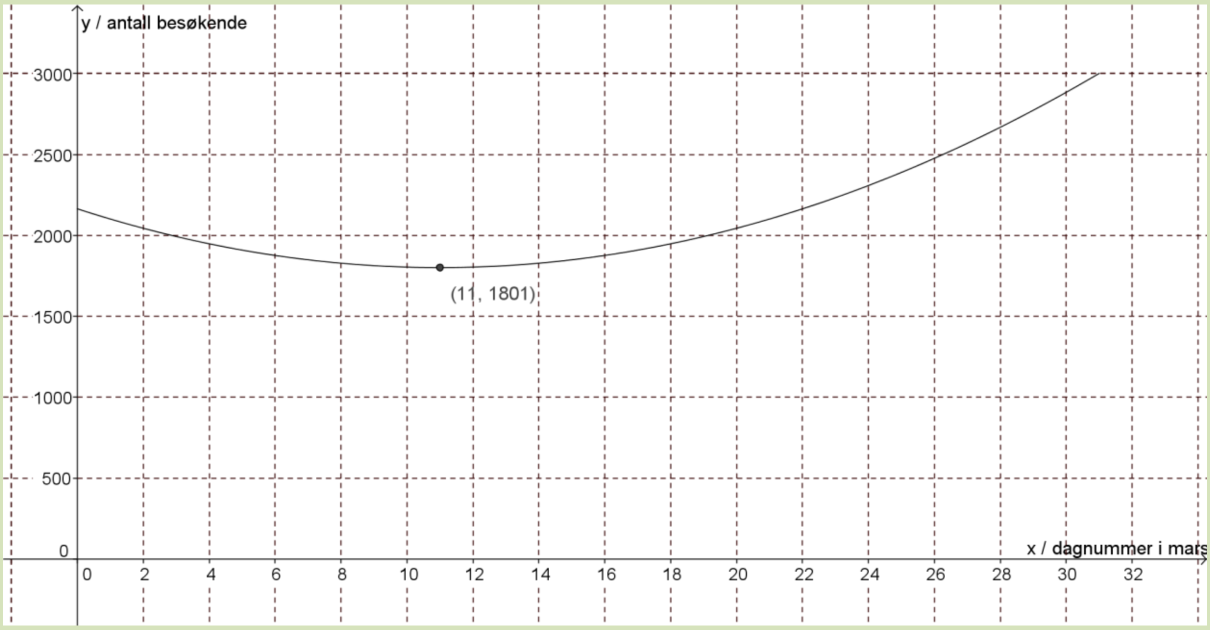
<u>Eksempel 13</u>

Funksjonen $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$ er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret *x* i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.
Tegn grafen til funksjonen når *x* ligger mellom 1 og 31.
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon[3x^2 – 66x + 2164,0,31].** Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra *x* = 0 til *x* = 31. Så skriver vi en passende tekst på aksene. Etter å ha justert aksene, skal grafen bli omtrent slik:



Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet $f(x)$. For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt[f].**



Vi ser at det var færrest besøkende for x = 11, altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

Oppgave 26

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$, der x er prisen på en enhet av varen i kroner.

a) Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 100.

b) For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

Oppgave 27

Funksjonen $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$ beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune x år etter år 2000. x = 0 er altså år 2000, x = 1 er år 2001 osv.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.

Her må du altså la x ligge mellom 0 og 13.

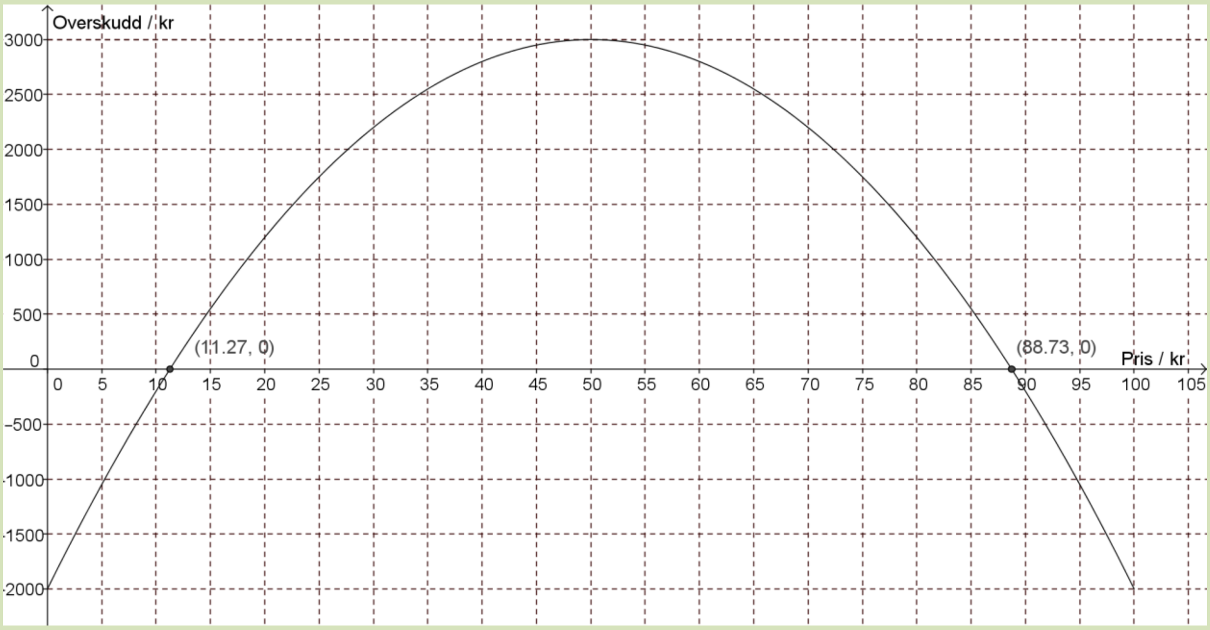
b) Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

9. Nullpunkt

Et punkt der en funksjon treffer x-aksen kalles *nullpunkt*. Da er funksjonsverdien lik null. Vi ser først på et eksempel på hvordan vi finner nullpunkter i Geogebra.

Eksempel 14

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 26. Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-2x^2+200x-2000,0,100].** Geogebra kaller funksjonen for f. Vi bruker "Skjæring mellom to objekt" og klikker der grafen treffer x-aksen.



Det ene nullpunktet er x = 11.27, og har koordinatene (11.27 , 0). Alle nullpunkt vil ha y-koordinat 0. Det andre nullpunktet er x = 88.73, og har koordinatene (88.73 , 0).

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under x-aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer x-aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.
Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.
Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

Oppgave 28

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$, der x er prisen på en enhet av varen.

a) Tegn grafen. La x ligge mellom 0 og 300.
b) For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
c) Når går bedriften med overskudd?

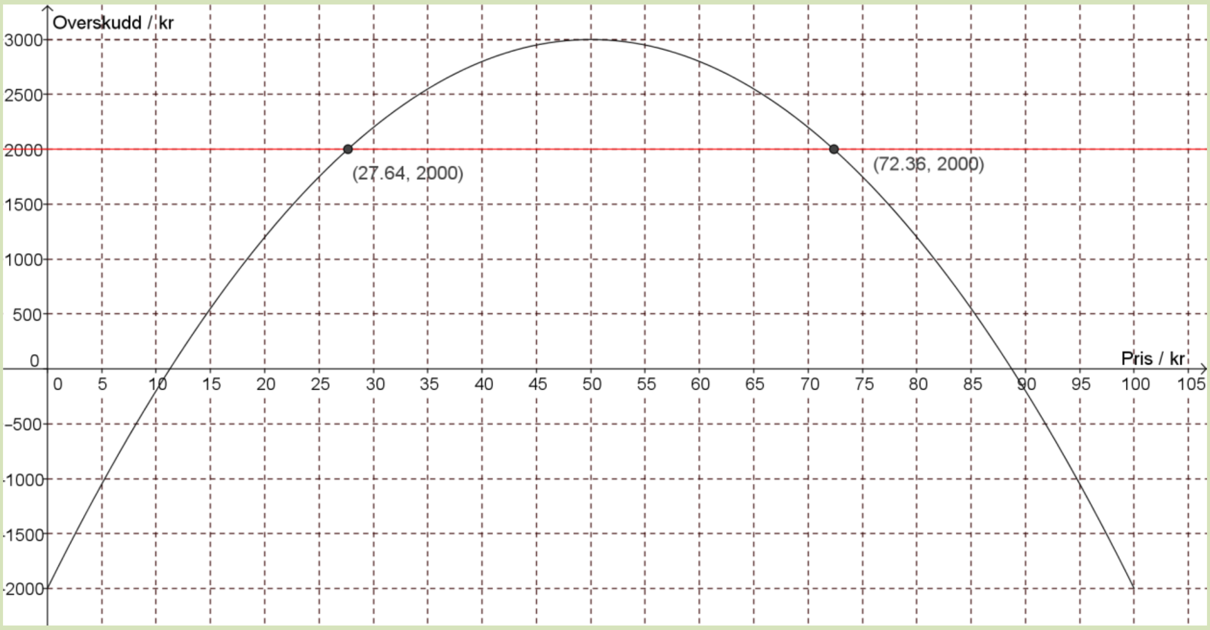
10. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

Eksempel 15
Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 26.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja *y* = 2000 og finner skjæringspunktene:



Vi ser at skjæringspunktene er (27.64 , 2000) og (72.36, 2000). Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja *y* = 2000 mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

Oppgave 29

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved $T(x) = -0{,}24x^2 + 1{,}2x + 16$, der $T(x)$ står for antall celsiusgrader, og x for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.
Her må du altså la x ligge mellom 0 og 8.
b) Når var temperaturen lik 17 °C?
c) Når var temperaturen lavere enn 17 °C?

11.Eksponentialfunksjoner

Hvis en størrelse alltid øker eller minker like mye når x øker med 1, kan den beskrives med en *lineær* funksjon.

Hvis en størrelse alltid øker eller minker *like mange prosent* når x øker med 1, kan den beskrives med en *eksponentialfunksjon.*

Eksempel 16

Vi setter 1000 kr i banken til 4 % rente i året. Vekstfaktoren er da 104 % = 1,04, og etter 1 år har vi $1000 \text{ kr} \cdot 1{,}04 = 1040$ kr i banken. Etter nok ett år legger vi igjen til 4 % rente, men nå er det 4 % av 1040 kr, ikke av 1000 kr. Slik kan vi fortsette å regne ut hva vi kommer til å ha i banken:

Antall år	Regnestykke	Beløp i banken
0		1000
1	$1000 \cdot 1{,}04$	1040
2	$1000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 1000 \cdot 1{,}04^2$	1081,60
3	$1000 \cdot 1{,}04^3$	1124,86
x	$1000 \cdot 1{,}04^x$	$1000 \cdot 1{,}04^x$

Funksjonen som beskriver hvor stort beløpet er etter x år er *eksponentialfunksjonen*

$$f(x) = 1000 \cdot 1{,}04^x$$

Vi skriver inn funksjonen slik i Geogebra: **Funksjon[1000*1.04^x,0,20]** hvis vi vil tegne grafen i området fra x = 0 til x = 20. Grafen ser slik ut:

Vi kan se at beløpet øker mer og mer for hvert år som går slik at dette ikke er en lineær funksjon. Årsaken til det er altså at renten beregnes av et stadig større tall.

Ved hjelp av den prikkede røde linjen kan vi finne når beløpet passerer 2000 kr. Geogebra gir oss nøyaktig verdi ved å bruke **Skjæring mellom to objekt**. Da finner vi at beløpet passerer 2000 kr etter ca. 18 år.

Hvis Geogebra kalte funksjonen vi skrev inn for *f*, kan vi finne beløpet etter 10 år ved å skrive **f(10)** på kommandolinjen. Da får vi 1480,24 kr.

Oppgave 30

Taksten på en leilighet var 2,0 millioner i 2008. Den har vokst 9 % i året siden 2005.

a) Hva var taksten i 2009? I 2010?
b) Lag en funksjon som beskriver taksten x år etter 2008.
c) Tegn grafen til denne funksjonen fra x = -3 (år 2005) til x = 10.
d) Hva var taksten i 2006?
e) Når vil taksten bli 4 millioner hvis utviklingen fortsetter på samme måten?

Oppgave 31

En tre år gammel bruktbil har i dag verdien 252 000 kr. Vi regner med at verdien har sunket 15 % per år, og vil fortsette å synke på samme måte noen år til.

a) Hva vil verdien være om 2 år? Om 5 år?
b) Hva var verdien da den var ny?
c) Lag en funksjon som beskriver verdien fra den var ny og til den er 15 år
d) Tegn grafen til denne funksjonen i det aktuelle området for x.
e) Når vil verdien bli mindre enn 75 000 kr?

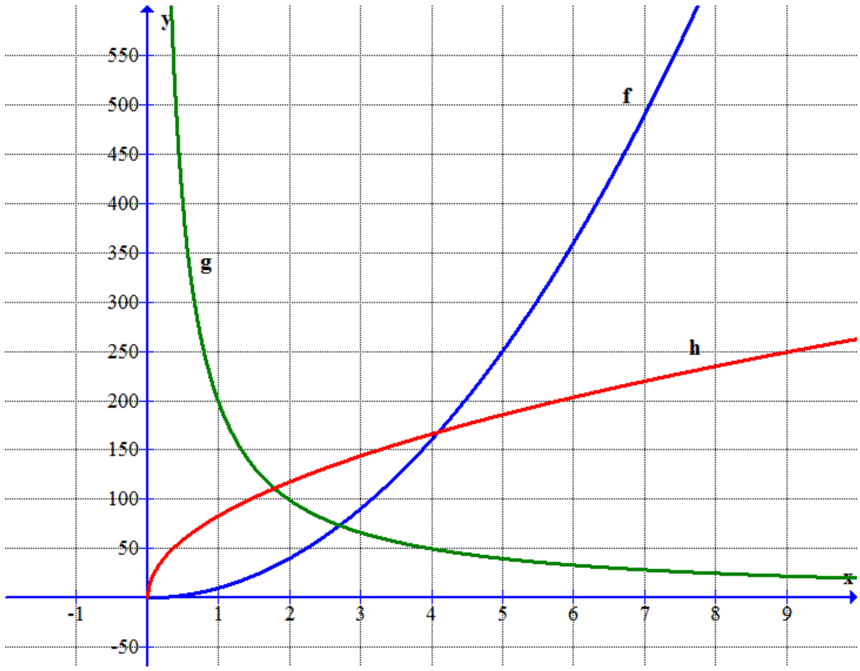
12. Potens- og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er a og b faste tall. Eksempler:

$$f(x) = 10 \cdot x^2$$
$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

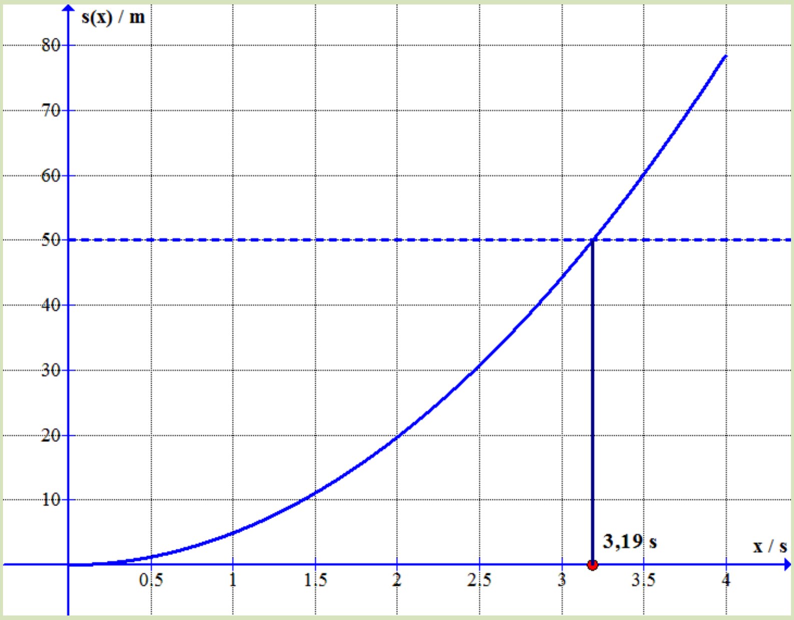
Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 17

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter x sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x)=4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:



For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2)=4,9\cdot 2^2=19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..

For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja y= 50 i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

Oppgave 32

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle x meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x)=0,45\sqrt{x}$.

a) Tegn grafen til t når $0\leq x\leq 100$. $\sqrt{x}$ skriver du som sqrt(x) i Geogebra. (sqrt = square root.)

b) Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?

c) Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

13. Vekstfart

13.1 Konstant vekstfart

Vekstfarten til en størrelse som forandrer seg med tiden viser hvor *raskt* størrelsen forandrer seg. Vi ser først på eksempler hvor en størrelse forandrer seg like mye i like lange tidsrom. Da sier vi at veksten er *jevn*, og vekstfarten er *konstant*. Slik vekst beskrives med en *lineær* funksjon.

Eksempel 18
Et tre vokser jevnt og med 0,6 m hvert år. Da er vekstfarten 0,6 m/år.

Eksempel 19
Det vi i dagligtale kaller fart, er egentlig vekstfarten til en strekning som en bil eller noe annet forflytter seg. Hvis farten til en bil er 80 km/h, betyr det at strekningen som bilen kjører øker 80 km på en time.

Eksempel 20
Et tre vokser jevnt, og høyden øker fra 2,1 til 4,5 m på 3 år. Høyden øker altså med 4,5 m – 2,1 m = 2,4 m på 3 år. Da er vekstfarten $\frac{2{,}4 \text{ m}}{3 \text{ år}} = 0{,}8$ m/år

Oppgave 33

Vekten av en melon øker jevnt fra 2,6 kg til 5,9 kg på 3 uker. Hva er vekstfarten til vekten av melonen? Husk målenhet på svaret.

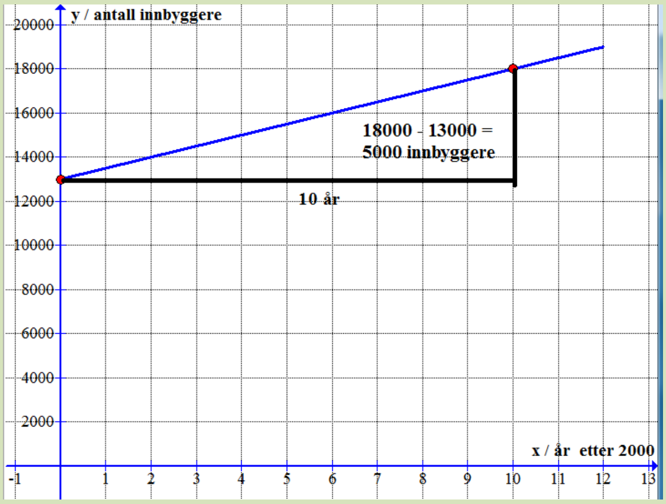
Eksempel 21
Antall bakterier i ei skål med næring er gitt ved funksjonen $b(x) = 300x + 1000$, hvor x er antall timer som er gått etter at bakteriene ble plassert i skåla. Da er vekstfarten lik stigningstallet til denne lineære funksjonen. Vekstfarten er konstant og lik 300 bakterier/time.

Oppgave 34

Den 1. juni var 50 m^2 av en sjø dekket med alger. t uker senere var arealet som var dekket, beskrevet av funksjonen $A(t) = 50 + 20t$. Hva var vekstfarten til arealet av det algedekkede området? Husk målenhet.

Eksempel 22

Grafen viser antall innbyggere i en kommune fra år 2000 og utover. År 2000 svarer til $x = 0$.



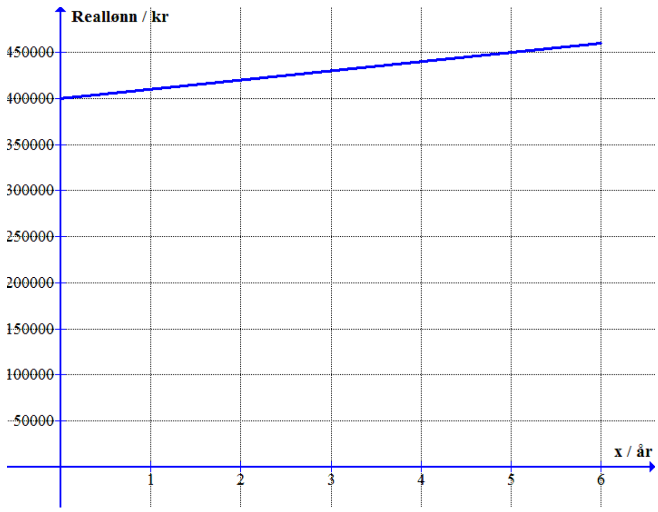
For å beregne vekstfarten finner vi to punkter på grafen som er lette å lese av. Ved å bruke de to punktene som er vist, får vi at vekstfarten er

$$\frac{5000 \text{ innbyggere}}{10 \text{ år}} = 500 \text{ innbyggere/år}$$

Oppgave 35

Grafen viser hvordan reallønna til Asgar har utviklet seg de siste 6 årene.

Finn vekstfarten til reallønna.



Eksempel 23

En sommerdag synker temperaturen jevnt noen timer. På 4 timer har temperaturen minket fra 25 grader til 19 grader, altså med 6 grader.

Hvis noe *minker* etter hvert som tiden går, er vekstfarten *negativ*.

Her blir vekstfarten $\dfrac{-6 \text{ grader}}{4 \text{ timer}} = -1{,}5 \text{ grader/time}$.

Funksjonen som beskriver temperaturutviklingen blir da $T(x) = -1{,}5x + 25$ når x er tiden som har gått siden temperaturen var 25 grader.

Oppgave 36

Temperaturen i en kopp med varmt vann synker jevnt noen minutter. Temperaturen minker fra 100 grader til 90 grader på 4 minutter.

a) Finn vekstfarten til temperaturen.
b) Lag en funksjon som viser temperaturen i vannet som funksjon av tiden *x*.

Oppgave 37

I en kommune sank innbyggertallet jevnt gjennom flere år. I 2008 var det 20 000 innbyggere i kommunen og i 2012 var det 18 000 innbyggere.

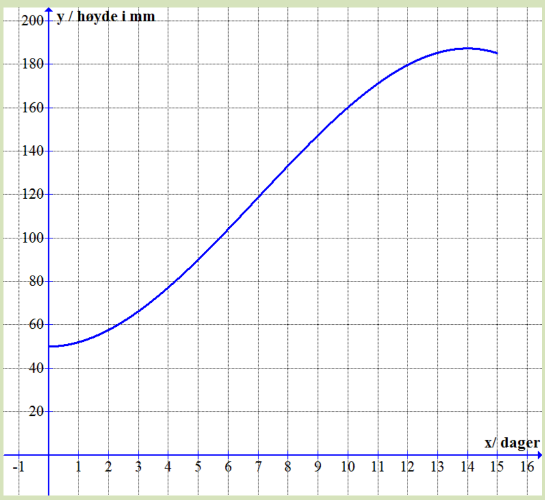
a) Finn vekstfarten til innbyggertallet.
b) Lag en funksjon som viser innbyggertallet $I(x)$, hvor x er antall år som har gått siden 2008 (slik at $x = 0$ tilsvarer år 2008, $x = 1$ tilsvarer 2009 osv.)
c) Hva vil innbyggertallet være i 2015 hvis utviklingen fortsetter på samme måten?
d) Når vil innbyggertallet være lik 15 000?

13.2 Gjennomsnittlig vekstfart

Hvis veksten *ikke* er jevn, vil heller ikke vekstfarten være den samme hele tiden. Da bruker vi ofte *gjennomsnittlig* vekstfart.

Eksempel 24

Grafen til høyre viser høyden til en plante de første 15 dagene etter at den ble plantet.
Av grafen kan vi lese at høyden er 50 mm ved $x = 0$, 90 mm ved $x = 5$ og 160 mm ved $x = 10$.



Fordi grafen ikke er en rett linje, er vekstfarten ikke konstant. Vi kan imidlertid regne ut gjennomsnittlige vekstfarter.

To eksempler:

Gjennomsnittlig vekstfart de fem første dagene:

$$\frac{90 \text{ mm} - 50 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{40 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 8 \text{ mm/dag}$$

Gjennomsnittlig vekstfart fra dag 5 til dag 10:

$$\frac{160 \text{ mm} - 90 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{70 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 14 \text{ mm/dag}$$

Oppgave 38

Finn gjennomsnittlig vekstfart de ti første dagene for planten i eksemplet foran.

Eksempel 25

Vi kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av en graftegner (GeoGebra).

Funksjonen som beskriver høyden av planten i forrige eksempel er

$$h(x) = -0{,}1x^3 + 2{,}1x^2 + 50$$

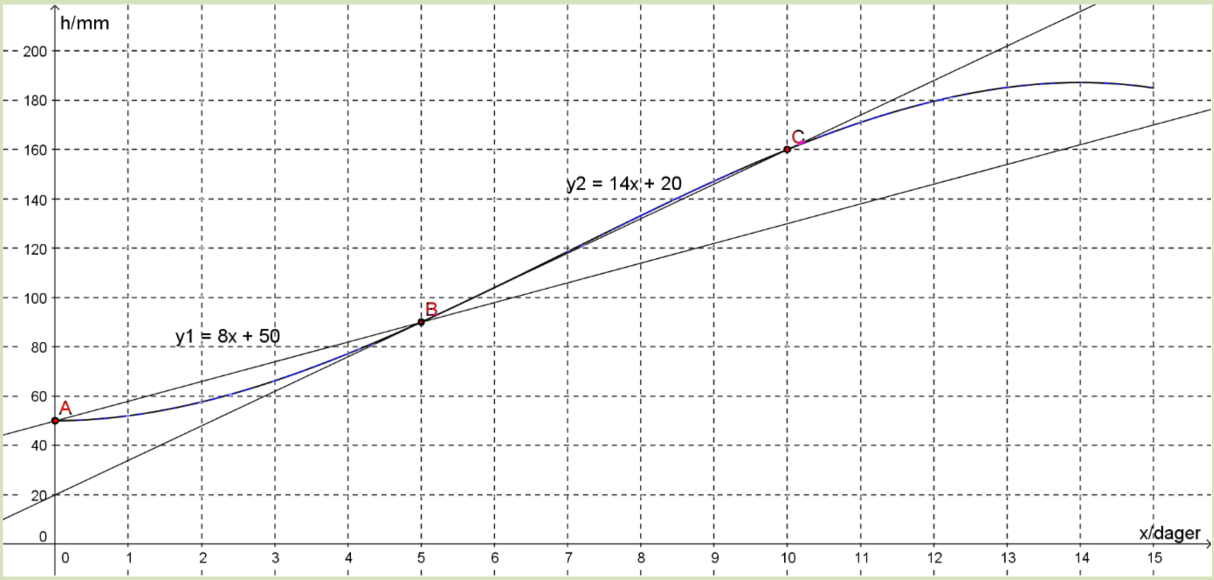
Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-0.1x^3+2.1x^2+50,0,15].**

Vi setter inn punktene **A** = (0, 50), **B** = (5, 90) og **C** = (10, 140) på grafen.

Vi velger verktøyikonet linje mellom to punkter.

Høyreklikk på linjen og endre funksjonsuttrykket til **y = ax + b**. Stigningstallet **a** er lik gjennomsnittlige vekstfart.

Svaret blir **a = 8 mellom punkt A og B**, og **a = 14 mellom punk B og C** som stemmer med utregningene i eksempel 12, 8 mm/dag og 14 mm/dag.



13.3 Momentan vekstfart

Momentan vekstfart er vekstfarten på et bestemt tidspunkt, altså i et bestemt øyeblikk (sammenlign “moment” = øyeblikk på engelsk).

Den momentane vekstfarten er størst der grafen er brattest. Hvis vi igjen ser på grafen i forrige eksempel som viser høyden til planten, kan det se ut som grafen er brattest omtrent når $x = 7$ dager.

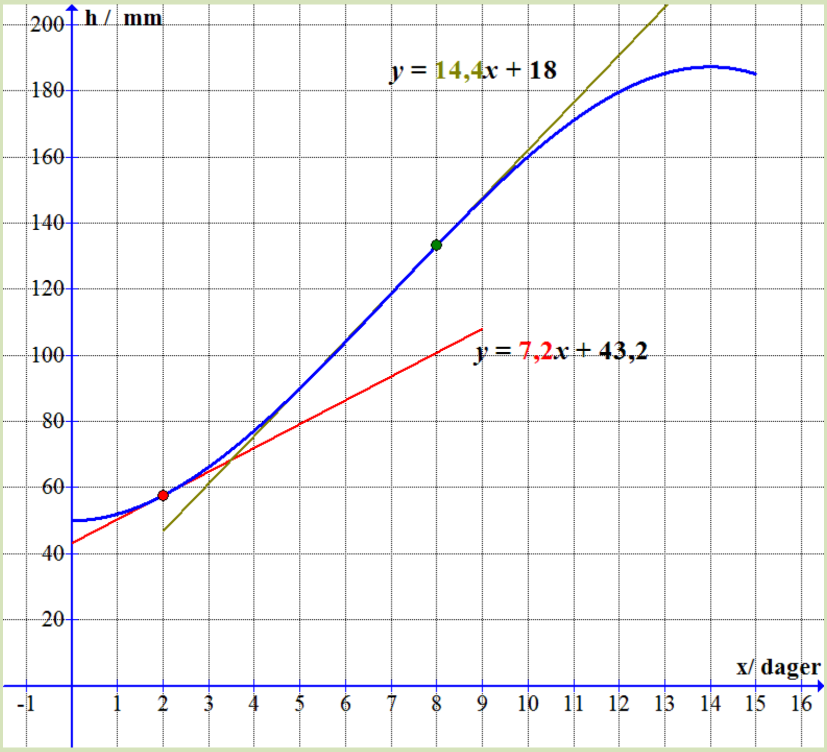
For å finne verdien til den momentane vekstfarten i et bestemt øyeblikk x, må vi tegne *tangenten* til grafen for denne verdien av x. *Da er den momentane vekstfarten stigningstallet til tangenten*. Dette kan vi gjøre i Geogebra.

Eksempel 26

Vi fortsetter å undersøke veksten til planten i eksemplene foran

Under har vi tegnet grafen, og tangenter for $x = 2$ og $x = 8$. Vi tegner en tangent til funksjonen f i $x = 2$ i Geogebra med kommandoen **Tangent[2,f]** .

Geogebra gir oss også likningene for tangentene. De er skrevet inn på figuren under.



Fra likningene til tangentene på figuren ser vi at den momentane vekstfarten er 7,2 mm/dag etter 2 dager og 14,4 mm/dag etter 8 dager.

Oppgave 39

Vekten i kg av en voksende melon er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$V(x) = -0{,}0024x^3 + 0{,}02x^2 + 0{,}21x + 1{,}0$$

der x er antall uker etter at vekten var 1,0 kg. Uttrykket gjelder bra de åtte første ukene.

a) Tegn grafen til V når x ligger mellom 0 og 8 uker.
b) Finn momentan vekstfart når $x = 2$ og når $x = 6$. Husk å skrive målenhet på svaret.
c) Hva er vekten av melonen etter 2 uker?
d) Regn ut gjennomsnittlig vekstfart mellom uke 2 og uke 8.

Eksamensoppgaver

Oppgavene fra del 1løses uten hjelpemidler!

E1

(Eksamen 1P høsten 2010, Del 1)

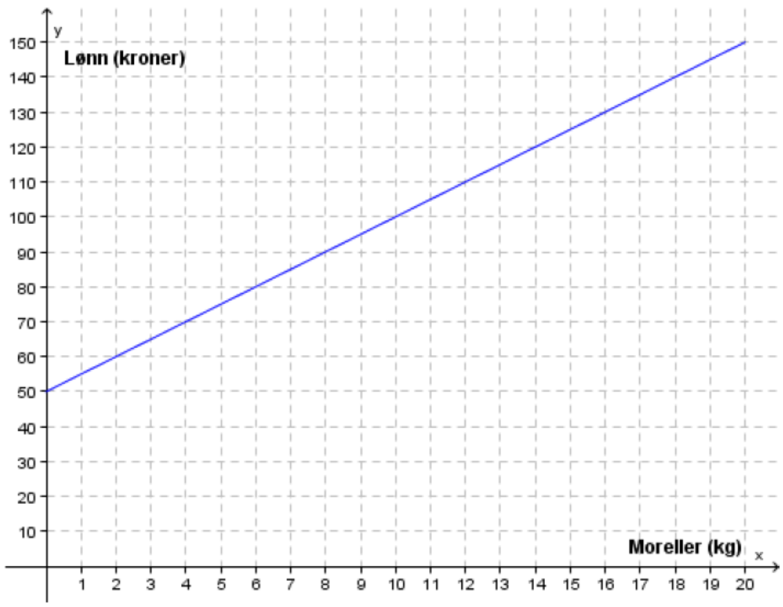
De tre funksjonene f, g og h er gitt ved

$$f(x) = 5x^2 + 100 \qquad g(x) = 100 \cdot 5^x \qquad h(x) = 5x + 100$$

Hvilken av de tre funksjonene beskriver lineær vekst? Lag et eksempel der du bruker denne lineære funksjonen til å beskrive en praktisk situasjon.

E2

(Eksamen 1P høsten 2011, Del 1)



Ivar plukker moreller. Den grafiske framstillingen ovenfor viser hvor mye han tjener i løpet av en time når han plukker x kg.

Forklar hvordan lønnen til Ivar blir beregnet.

E3

(Eksamen 1P våren 2010, Del 1)

Tre elever kommer med hvert sitt utsagn. Se boblene ovenfor.

a) Skisser grafer som illustrerer de tre utsagnene. Lag én graf for hvert utsagn.
b) Hvilket utsagn beskriver størrelser som er proporsjonale, og hvilket utsagn beskriver størrelser som er omvendt proporsjonale? Begrunn svarene dine.

E4

(Eksamen 1P våren 2013, Del 1)

I en tank er det 60 L vann. Hver dag tapper vi 5,0 L vann fra tanken.

a) Hvor mye vann er det igjen i tanken etter åtte dager?
   Hvor mange dager går det før tanken er tom?
b) Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$ til en funksjon f som viser hvor mange liter vann det er igjen i tanken etter x dager.
c) Tegn grafen til f.
   Vis hvordan du kan bruke grafen til å finne svar på spørsmålene i oppgave 7 a).

E5

(Eksamen 1P høsten 2012, Del 1) 

Antall hektogram smågodt	3	5	10
Pris for påskeegg med smågodt (kroner)	48	60	90

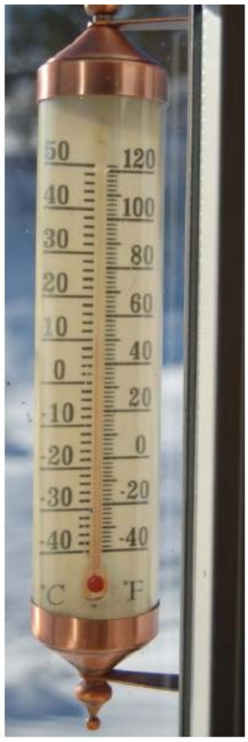
Stian vil kjøpe et påskeegg. Han vil fylle påskeegget med smågodt.
Tabellen ovenfor viser sammenhengen mellom hvor mye smågodt han fyller i påskeegget, og hvor mye han må betale.

a) Tegn et koordinatsystem med hektogram langs x – aksen og kroner langs y – aksen. Marker verdiene fra tabellen ovenfor som punkter i koordinatsystemet, og tegn en rett linje som går gjennom punktene.
b) Bruk linjen i a) til å bestemme prisen for det tomme påskeegget og prisen per hektogram smågodt.
c) Hvor mye smågodt er det i et påskeegg som koster 81 kroner?

E6

(Eksamen 1P våren 2011, Del 1)

Stig har fått en kakeoppskrift fra tante Mathilde i Amerika. I oppskriften står det at kaken skal stekes på 350 °F. Han lurer på hvor mange grader celsius dette tilsvarer. Stig har en gradestokk utenfor kjøkkenvinduet som viser både celsiusgrader og fahrenheitgrader. Se bildet til høyre.



a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk gradestokken til høyre og fyll ut tabellen.

°F	0		100
°C		10	

b) Tegn et koordinatsystem med grader fahrenheit langs x – aksen og grader celsius langs y – aksen. Marker verdiene fra tabellen i a) som punkter i koordinatsystemet.

c) Tegn en rett linje som går gjennom punktene. Bruk linjen til å finne ut hvor mange grader celsius Stig skal steke kaken på.

E7

(Eksamen 1P våren 2014, Del 1)

På et treningssenter har de to ulike prisavtaler.

Avtale 1: Du betaler 160 kr per måned. I tillegg betaler du 20 kroner hver gang du trener

Avtale 2: Du betaler 400 kr per måned. Da kan du trene så mye du vil.

Kari trener på treningssenteret, Hun har valgt avtale 1.

a) I januar trente hun 8 ganger. I februar trente hun 14 ganger.
Hvor mye måtte hun betale for treningen hver av disse to månedene?
b) Tegn en graf som viser sammenhengen mellom antall ganger Kari trener en måned og prisen hun må betale denne måneden.
c) Bruk grafen i oppgave b) til å bestemme hvor mye hun må trene for at det skal lønne seg med avtale 2.

La A være antall ganger du trener en måned. La P være prisen per trening.

d) For hver av avtalene 1 og 2 skal du avgjøre om A og P er

- proporsjonale størrelser

- omvendt proporsjonale størrelser

E8

(Eksamen 1P våren 2012, Del 2) 

Leon vil bestille sand for å gjøre badestranden utenfor hytta finere. Han ønsker å få sanden tilkjørt med lastebil. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom prisen for et billass med sand og antall tonn sand på lasset.

Antall tonn sand	10	16
Pris for billasset	2300	3200

Denne sammenhengen kan beskrives ved hjelp av likningen $y = ax + b$, der x tonn er mengden sand og y kroner er prisen for billasset.

a) Bestem tallene a og b.
b) Gi en praktisk tolkning av tallene a og b i denne oppgaven.

E9
1P vår 2010, Del 2)

Hvis en bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag, er overskuddet $O(x)$ per dag i kroner gitt ved $O(x) = -10x^2 + 1100x - 10000$.

a) Tegn grafen til O. Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for at overskuddet skal bli størst mulig?
b) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge hver dag for å ikke gå med underskudd?

E10
(1P vår 2012, Del 2)

Funksjonen gitt ved $f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}60x + 0{,}50$ viser sammenhengen mellom alder og vekt for en type griser. Her er $f(x)$ vekten til en gris målt i kilogram når grisen er x måneder gammel.

d) Tegn grafen til f for $0 \leq x \leq 25$.
Hvor mye veier en gris ved fødselen?
e) Hva er alderen til en gris når vekten passerer 20 kg?
Hvor mye øker vekten i gjennomsnitt per måned fram til da?

E11
(1P høst 2012, Del 2)

Frank deltar i et friidrettsmesterskap. Han kaster et spyd.
Grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}85x + 2{,}20$ beskriver banen spydet følger gjennom luften.

Her er x meter målt langs bakken fra stedet hvor Frank står, og $f(x)$ meter er høyden spydet har over bakken.

a) Tegn grafen til f for $x \geq 0$.
b) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og aksene.
   Bestem toppunktet på grafen til f.
c) Hva forteller svarene i b) om spydkastet?

E12
(1P vår 2011, Del 2)

Antall gram CO_2 en bil slipper ut per kilometer er gitt ved

$$f(x) = 0{,}046x^2 - 6{,}6x + 386$$

der x er farten til bilen målt i km/h.

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem for x-verdier fra 20 km/h til 100 km/h.
b) Hvor mange gram CO_2 slipper bilen ut per kilometer, dersom den holder en fart på 60 km/h?
c) Hvilken fart gir minst CO_2-utslipp per kilometer? Hvor stort er CO_2-utslippet per kilometer da?

Bilen kjører i 80 km/h i en halv time.

d) Hvor mye CO_2 slipper bilen ut i løpet av denne halvtimen?

E13
(1P høst 2010, Del 2)

Aud arbeider ved et laboratorium. En dag samler hun fluer i en kasse. Hun mater fluene og holder dem isolert i to måneder. Hun finner ut at en god tilnærming for antall fluer i kassen etter t dager er gitt ved

$$f(t) = -0{,}007t^3 + 0{,}5t^2 - 3t + 20$$

a) Bruk opplysningene i teksten ovenfor til å avgjøre hvilke t – verdier du bør bruke når du tegner grafen til f. Tegn grafen for disse verdiene av t.
b) Finn grafisk og ved regning hvor mange fluer det var i kassen ved starten og ved slutten av eksperimentet.
c) I hvilket tidsrom økte antall fluer i kassen?

E14
(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen *h* gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.
Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen *t* år etter 1. januar 1990.

a) Tegn grafen til *h* for $0 \le t \le 10$.
b) Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?
c) Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.
d) Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 til 1. januar 1998?

E15
(1P høst 2013, Del 2)

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$ viser hvor mange tonn fisk $f(x)$ det var i en fiskebestand *x* år etter år 2000.

a) Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 10$.
b) Når var fiskebestanden minst?
Hvor mange tonn var det i fiskebestanden da?
c) Bestem skjæringspunktet mellom grafen til *f* og linjen med likning $y = 200$.
Hva forteller koordinatene til dette punktet om fiskebestanden?

E16
(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside *x* timer etter midnatt et gitt døgn.

a) Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 24$.
b) Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?
c) Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

E17
(1P vår 2014, Del 2)

Vi bruker funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}002x^3 + 0{,}06x^2 - 0{,}2x + 2, \qquad 0 \le x \le 24$$

Som en modell for vindstyrken $f(x)$ m/s ved en målestasjon x timer etter midnatt 18. mai 2014.

a) Tegn grafen til f

b) Hva var vindstyrken kl. 09.45 i følge modellen?
c) Når var vindstyrken minst, og når var den størst, i følge modellen?

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom vindstyrke og betegnelse.

d) I hvilke tidsrom i løpet av dette døgnet var det lett bris i følge modellen?

Vindstyrke (m/s)	Betegnelse	Kjennetegn
0,0 – 0,2	Stille	Røyken stiger rett opp
0,3 – 1,5	Flau vind	En kan se vindretningen av måten røyken driver på
1,6 – 3,3	Svak vind	En kan føle vinden. Bladene på trærne rører seg, vinden kan løfte små vimpler
3,4 – 5,4	Lett bris	Løv og småkvister rører seg. Vinden strekker større flagg og vimpler
5,5 – 7,9	Laber bris	Vinden løfter støv og løse papirer, rører på kvister og smågreiner og strekker større flagg og vimpler.
8,0 – 10,7	Frisk bris	Småtrær med løv begynner å svaie. På vann begynner småbølgene å toppe seg

E18
(1P våren 2015, Del 2)

En bedrift bruker i en periode vann fra et basseng i produksjonen av et nytt produkt.

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 0{,}0013x^3 - 0{,}59x^2 + 61x + 2000 \qquad 0 \leq x \leq 300$$

Viser vannstanden $f(x)$ millimeter i bassenget x dager etter at fabrikken startet produksjonen av produktet.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i bassenget i denne perioden.

c) Bruk graftegner til å løse likningen $f(x) = 3000$
Hva forteller løsningene om vannstanden i bassenget?

d) Bestem stigningstallet for den rette linjen som går gjennom punktene $(90, f(90))$ og $(210, f(210))$. Hva forteller dette stigningstallet om vannstanden i bassenget?

E19
(2P-Y våren 2015, Del 2)

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f

b) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur

c) Bestem $f(100)$ og den momentane vekstfarten til f når $x = 100$.
Hva forteller disse svarene?

E20
(2P-Y høsten 2014, Del 2)

En tankbil med gift har vært innblandet i en ulykke. Noe av giften har havnet i en innsjø. Innsjøen brukes som drikkevannskilde.

Giftkonsentrasjonen $f(x)$ mg/L i drikkevannet x døgn etter ulykken er gitt ved

$$f(x) = 1{,}42 \cdot 0{,}87^x$$

a) Bestem giftkonsentrasjonen i drikkevannet rett etter ulykken.
Hvor mange prosent avtar giftkonsentrasjonen i drikkevannet per døgn?

b) Hvor mye avtok giftkonsentrasjonen i drikkevannet i gjennomsnitt per døgn den første uken etter ulykken?

Når giftkonsentrasjonen kommer under 0,40 mg/L, er det ikke lenger farlig å drikke vannet.

c) Hvor mange døgn tar det før vannet igjen kan drikkes?

E21
(2P, vår 2015, del 1)

Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

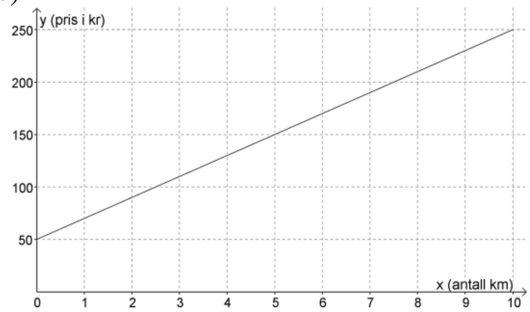
Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 2
a) 50 kr
b) 70 kr
c) 150 kr
d)

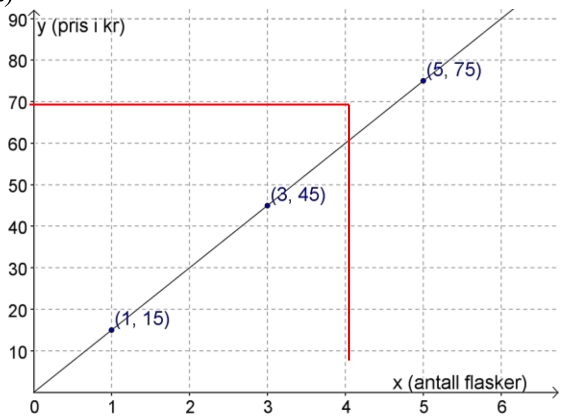
x (antall km)	0	5	10
y (pris)	50	150	250

e)



Oppgave 3a) 30 kr b) 10 kr

Oppgave 4.
a)



b) 4 flasker (markert ved de rød linjene)
c) $y = 15 \cdot x$

Oppgave 5 a) 300 kr b) 30x + 150 d) 6

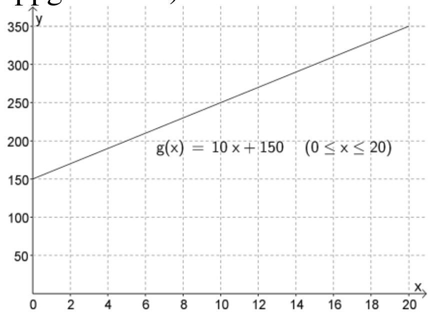
Oppgave 6 a) Linje A. b) linje A: 2. Linje B: 0,5

Oppgave 7 a) 10 b) 10 kr per kg

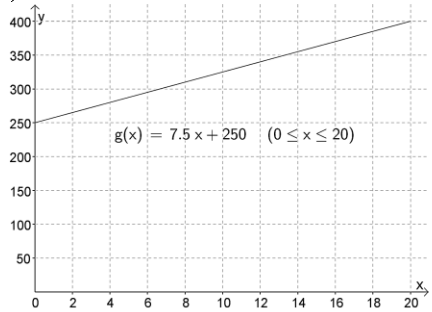
Oppgave 8 Linje A: 2, Linje B: 1

Oppgave 9 0. (Fordi det ikke koster noe hvis du ikke kjøper noe)

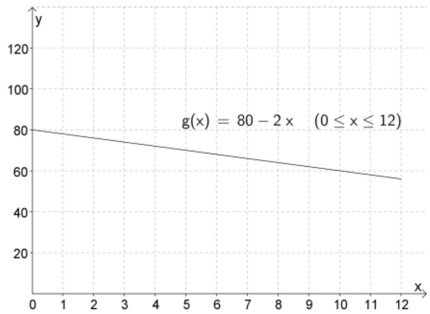
Oppgave 10 a)



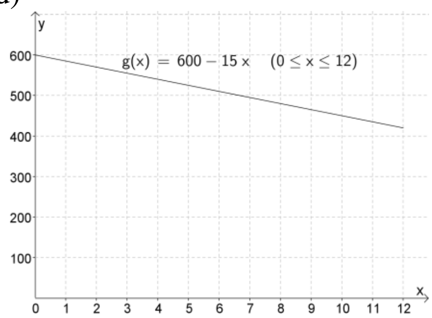
b)



c)



d)



Oppgave 11b) 480 c) 14 ganger	
Oppgave 12 b) 13,75 kr. c) 21,67 min (21 min og 40 sek)	
Oppgave 13 b) $300 - 60 = 240$sider igjen å lese c) $8{,}33 \approx 9$ dager	
Oppgave 14 a) 1500 kr b) 25 kr c) 100 timer d) $T(x) = 25x + 1500$	
Oppgave 15 a) 2000 kr b) 0,60 kr c) 12800 kr d) 20000 kWh e) $K(x) = 0{,}60x + 2000$	
Oppgave 16 a) 1200 kr b) 1 kr c) $K(x) = x + 1200$	
Oppgave 17a) $V(x) = 64000 - 8000x$ b) -8000, 64000 c) 8 år e) 4 år	
Oppgave 18 a) $S(x) = 4000 - 250x$ c) 1000 kr d) 16 mnd = 1 år 4 mnd	
Oppgave 19 a) 65 L b) 0,5 L/mil c) $b(x) = 65 - 0{,}5x$ d) 65 mil e) ca. 120 mil	
Oppgave 20 a)1) -20 kr, 2) 140 kr b) $f(x) = 8x - 100$ c) 8, -100 e) 13 kurver	
Oppgave 21 a) 1) -12 grader, 2) 6 grader b) $T(t) = 2t - 18$ c) 2, -18 e) 9 timer	
Oppgave 22 a) $L(x) = 120x - 50$ c) 430 kr d) 6 timer	
Oppgave 23 14 km	
Oppgave 24 a)1) 3400 kr, 2) 2500 kr b) 1) 4600 kr, 2) 5000 kr c) $F(x) = 120x + 2200, G(x) = 250x$ e) 17 uker (x=16,9) f) 4240 og 4250 kr	
Oppgave 25. a) $M(x) = 18x + 700,\ J(x) = 30x$ b) 59	
Oppgave 26 b) x = 50, 3000 kr	
Oppgave 27 b) 2008, ca. 10 000	
Oppgave 28 b) 5,08 kr (x=5.08) og 294,91 kr (x = 294.91) c) Mellom 5,08 kr og 294,91 kr.	
Oppgave 29 b) ca. kl. 13 (x = 1.06) og ca. kl 16 (x = 3.94) c) Mellom kl. 13 og kl. 16.	
Oppgave 30 a) 2,18 mill., 2,38 mill. D) 1,68 mill. E) 2016	
Oppgave 31 a) ca. 182 000 kr, ca. 112 000 kr b) ca. 410 000 kr e) ca. 7,5 år	
Oppgave 32 b) 4,0 s c) 64 m	
Oppgave 33 1,1 kg/uke	
Oppgave 34 20 m^2/uke	
Oppgave 35 10 000 kr/år	
Oppgave 36 a) -2,5 grader/min b) $y =$ -2,5x +100	
Oppgave 37 a) – 500 innbyggere/år b) $I(x) = -500x + 20000$ c) 16 500 d) 2018	
Oppgave 38 11 mm/dag	
Oppgave 39 b) 0,26 kg/uke, 0,19 kg/uke c) 1,48 kg d) 0,21 kg/uke	

Fasit eksamensoppgaver

E1. $h(x)$
E2. 50 kr fast timelønn pluss 5 kr per kurv
E3 Proporsjonale: Kari. Omvendt proporsjonale: Grete
E4. a) 20 L , 12 d b) $f(x) = 60 - 5x$
E5 b) 30 kr, 6 kr/hg c) 8,5 hg
E6. c) ca. 180 grader celsius
E7. a) januar: 320 kr. februar: 440 kr b) Uttrykk: $y = 160 + 20 \cdot x$ c) Mer enn 12 ganger. d) Avtale 1: A og P er ikke prodorsjonale (eller omvendt proporsjonale) størrelser. Avtale 2: A og P er omvendt proporsjonale størrelser
E8. a) a = 150 kr, b = 800 kr b) a = prisen per tonn, b = fast avgift for kjøringen
E9 a) 55 b) mellom 10 og 100
E10. a) 0,50 kg b) ca. 9 måneder, 0,975 kg/måned
E11. b) (0, 2.20), (87.5, 0), (42.5, 20.3). c) Spydet er 2,20 m over bakken i det det forlater hånda til spydkasteren. Sydkastet er på sitt høyeste 42,5 m fra kaststedet, da er det 20,3 m over bakken. Lengden på spydkastet er 87,5 m
E12 b) 156 g/km c) 72 km/h, 149 g/km d) 6100 g = 6,1 kg
E13. b) 20, ca. 130 c) fra 3 til 44 dager
E14. b) I februar 1992, ca. 870 hjort c) I mai 1991 og januar 1993
E15. b) 51 tonn midt i 2008 c) x = 5,91, 200 tonn fisk i slutten av 2005
E16. b) kl. 17, 13000 c) mellom ca. kl. 5 og 24
E17. b) 3,9 m/s c) Minst ca. kl. 02 (x=1,84), størst ca. kl. 18 (x=18,16) d) Mellom ca. kl. 08.30 og 13.45 (x=8,48 og x = 13.77) og etter ca. kl 22 (x=21.88)
E18. b) Ca. 3200 mm (3206,8). C) x=122,84 og x=20,14. Vannstanden er 3000 mm (3,0 m) etter ca. 20 dager og etter ca. 123 dager d) $a = -24{,}89$. I denne perioden synker vannstanden med ca. 25 mm per dag.
E19. b) 13,3 grader. c) $f(100) = 8{,}5$ og momentan vekstfart til f når $x = 100$ er 0,09. Dvs at temperaturen 100 dager etter nyttår var 8,5 grader, og den steg med 0,09 grader per dag
E20. a) 1,42 mg/L. Avtar med 13 % per døgn. b) 0,126 mg/døgn. c) Ca. 9 døgn (x = 9,1)
E21 2,5h