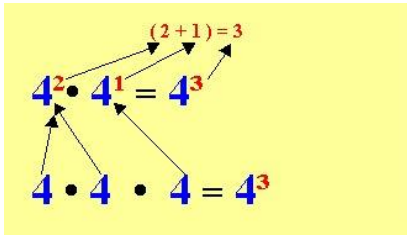


Kapittel 3. Potensregning



I potensregning skriver vi tall som potenser og forenkler uttrykk som inneholder potenser.

Dette kapitlet handler blant annet om:

- Betydningen av potenser som har negativ eksponent eller eksponent lik null.
- Hvordan vi raskt kan multiplisere og dividere potenser med samme grunntall.
- Hvordan vi beregner en potens med en annen potens som grunntall.

$2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$	$2^4 \cdot 2^{-3} = 2^1$	$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^0$
$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$	$16 \cdot \frac{1}{8} = 2$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
$2^{-2} \cdot 2^5 = 2^3$	$2^0 \cdot 2^3 = 2^3$	$2^5 \cdot 2^0 = 2^5$
$\frac{1}{4} \cdot 32 = 8$	$1 \cdot 8 = 8$	$32 \cdot 1 = 32$

1. Hva er en potens i matematikken?

Ofte har vi bruk for å multiplisere et tall med seg selv to eller flere ganger. Da bruker vi en kortere skrivemåte slik som eksemplene under viser.

Eksempel 1

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

$$x \cdot x = x^2$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

De tre høyresidene er eksempler på *potenser*.

I potensen 3^2 kalles 3 for *grunntallet* og 2 for *eksponenten*.

Eksponenten skal stå oppe til høyre for grunntallet og skal skrives med mindre skrift enn grunntallet. Det skal være lett å se forskjell på 3^2 og 32!

Advarsel: Du må ikke blande sammen 3^2 , som betyr $3 \cdot 3$ og er lik 9, med $3 \cdot 2$, som er lik 6!

Oppgave 1

Regn ut potensene uten kalkulator:

$$4^2, 2^3, 5^2, (-3)^2, 5^1$$

Oppgave 2

Finn ut hvilken tast du må bruke på kalkulatoren og regn ut:

$$2,5^2, 12^3$$

2. Multiplisere potenser med samme grunntall

Hvordan kan du regne ut et produkt av to potenser med samme grunntall, f.eks. $3^2 \cdot 3^4$?

Det er ikke meningen at du skal regne ut hvilket tall dette blir, men skrive svaret som en ny potens.

Dette er egentlig lett. Vi har et produkt med 2 tretall og et produkt med 4 tretall. Når disse to produktene multipliseres, må det bli $2 + 4 = 6$ tretall, slik:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

Vi multipliserer to potenser med samme grunntall ved å *legge sammen* eksponentene.

Eksempel 2

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$

$$5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$$

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

$$x^3 \cdot x^2 = x^5$$

Oppgave 3

Multipliser potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $6^2 \cdot 6^3$ b) $2^6 \cdot 2^4$ c) $10 \cdot 10^3$ d) $a^4 \cdot a^2$

3. Dividere potenser med samme grunntall

Divisjon av to potenser skriver vi nesten alltid med brøkstrek. Da kan vi bruke kunnskap om brøkforkorting for å utføre divisjonen.

Eksempel 3

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Vi forkortet altså bort 2 firetall slik at det ble igjen $5 - 2 = 3$ firetall.

Når vi dividerer to potenser med samme grunntall trekker vi eksponenten i nevner fra eksponenten i teller.

Eksempel 4

$$\frac{10^6}{10^3} = 10^{6-3} = 10^3$$

$$\frac{5^7}{5} = 5^{7-1} = 5^6$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Oppgave 4

Divider potensene og skriv svaret som en ny potens.

a) $\frac{8^5}{8^3}$ b) $\frac{6^5}{6}$ c) $\frac{5^4}{5^3}$ d) $\frac{z^8}{z^5}$

Vi må ofte bruke begge disse reglene i samme oppgave:

Eksempel 5

$$\frac{4^2 \cdot 4^6}{4^3} = \frac{4^8}{4^3} = 4^5$$

$$\frac{10^7}{10^2 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{10^6} = 10^1 = 10$$

Oppgave 5

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^3}{2^4}$ b) $\frac{3^6}{3^4 \cdot 3}$ c) $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^2}$

4. Regne ut potens hvor grunntallet er en potens

$(10^2)^3$ er et eksempel på en potens hvor grunntallet også er en potens. Hvis vi tenker over hva $(10^2)^3$ egentlig betyr, ser vi at

$$(10^2)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$$

Her må vi altså *multiplisere* de to eksponentene.

En potens av en potens regner vi ut ved å *multiplisere* eksponentene.

Du må ikke blande sammen $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ og $(10^2)^3 = 10^6$!

Oppgave 6

Gjør disse potensene enklere:

a) $(6^3)^4$ b) $(8^5)^2$ c) $(x^3)^2$ d) $(a^2)^4$

Nå forenkler vi to uttrykk hvor vi må bruke alle reglene for potensregning vi har lært hittil:

Eksempel 6

$$(3^4)^2 \cdot 3^3 = 3^8 \cdot 3^3 = 3^{11}$$

$$\frac{(2^3)^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{12} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{14}}{2^5} = 2^9$$

Oppgave 7

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulig.

a) $(4^2)^3 \cdot 4$ b) $\frac{(5^2)^3}{5^2}$ c) $\frac{(a^2)^3 \cdot a^2}{a^5}$

5. Potenser hvor eksponenten er null eller negativ

I brøken $\frac{5^4}{5^4}$ er telleren og nevneren like store slik at denne brøken må være lik 1. Men hva får vi ved å bruke regelen for divisjon av potenser? Jo:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

5 ganget med seg selv null ganger kan ikke ha noen direkte mening, men hvis vi er så smarte at vi lar 5^0 bety 1, kan vi bruke potensregelen også på denne brøken.

Viktig: Alle tall opphøyd i null er lik 1!

$$a^0 = 1 \text{ for alle tall } a.$$

Advarsel: Du må heretter aldri tro at 2^0 er lik 0!! $2^0 = 1!$ Derimot er $2 \cdot 0$ lik 0.

Oppgave 8

Hvor mye er a) 10^0 b) 6^0 c) $(-1)^0$?

Hva får vi hvis vi bruker divisjonsregelen på brøken $\frac{5^4}{5^6}$? Jo:

$$\frac{5^4}{5^6} = 5^{4-6} = 5^{-2} \quad (\text{du er vel klar over at } 4 - 6 = -2 \text{ og ikke } 2?)$$

Men dette svaret er heller ikke meningsløst. I brøken $\frac{5^4}{5^6}$ kan vi forkorte bort 4 femtall, og sitter da igjen med 2 femtall i nevner. Det betyr at

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

Da gjør vi det geniale og sier at 5^{-2} skal bety $\frac{1}{5^2}$. På samme måte har vi også:

Eksempel 7

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a^{-n} betyr $\frac{1}{a^n}$ for alle verdier av a (unntatt 0) og n .

Advarsel: Du må heretter aldri tro at $10^{-2} = -20$ eller at $2^{-3} = -6$ eller $-8!!$

Av og til kan det være nyttig å merke seg at en potens med *negativ* eksponent *under* en brøkstrek, er lik en potens med *positiv* eksponent *over* brøkstreken. Da blir noen uttrykk enklere å regne ut.



Eksempel 8

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$$

$$\frac{3^4}{5^{-1}} = 3^4 \cdot 5$$

$$\frac{2^5}{4 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)^2 = (2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

(I de to første eksemplene skriver vi ikke brøkstreken fordi vi får 1 i nevneren.)

Oppgave 9

Skriv om brøkene slik at det ikke blir noen potenser med negativ eksponent.



a) $\frac{1}{10^{-2}}$ b) $\frac{2^6}{5^{-3}}$ c) $\frac{5 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^{-4}}$ d) $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5$

Heldigvis virker alle potensreglene like bra også for eksponenter som er null og negative:

Eksempel 9

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^0 = 2^{4+3+0} = 2^7$$

$$4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^{6-2} = 4^4$$

$$\frac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^{3+2} = 6^5$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{-2 \cdot 3} = 10^{-6}$$

$$(x^3)^{-4} = x^{3 \cdot (-4)} = x^{-12}$$

Oppgave 10

Skriv disse uttrykkene som *en* potens.

a) $\frac{3^6}{3^0}$ b) $5^{-1} \cdot 5^4$ c) $\frac{10^{-4}}{10^3}$ d) $\frac{10^4}{10^{-3}}$ e) $(2^{-4})^3$



6. Potensuttrykk med flere grunntall

I noen eksamensoppgaver forekommer det potenser med to eller tre ulike grunntall. Da er det to muligheter:

1. Ingen av grunntallene kan skrives som en potens av et av de andre grunntallene

Da bruker vi potensreglene på hver av potensene som har ulike grunntall.

Eksempel 10

$$3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 = 2^{3+2} \cdot 3^{1+(-4)} = 2^5 \cdot 3^{-3}$$

$$\frac{4^2 \cdot 5^3}{4^{-1} \cdot 5^4} = 4^{2-(-1)} \cdot 5^{3-4} = 4^3 \cdot 5^{-1}$$

Oppgave 11

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $5 \cdot 4^6 \cdot 5^{-3} \cdot 4^2$ b) $\frac{6^3 \cdot 10^{-2}}{6^{-1} \cdot 10^3}$

2. Ett eller flere av grunntallene kan skrives som en potens av et annet grunntall

Eksempel 11

Det ser ved første øyekast ikke ut som om uttrykket $4 \cdot 2^3$ kan skrives som én potens.

Men fordi $4 = 2^2$ går det likevel:

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

Det kan være nyttig å se at $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $9 = 3^2$ og $27 = 3^3$.

Oppgave 12

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige.

a) $2^4 \cdot 4$ b) $8 \cdot 2^{-2}$ c) $\frac{4}{2^{-3}}$ d) $9 \cdot 3^2$ e) $4^2 \cdot 2^3$

Slike omskrivninger får du bruk for i noen av eksamensoppgavene i potensregning.

7. Potens hvor grunntallet er et produkt eller en brøk

Eksempel 12

I potensen $(2x)^3$ er grunntallet et produkt av faktorene 2 og x . Dette kan vi skrive uten parenteser slik:


$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 2^3 x^3$$

På lignende måte har vi at

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Oppgave 13

Skriv disse uttrykkene uten parenteser. Du behøver ikke ta med mellomregninger slik som det er gjort i eksemplene ovenfor.

a) $(3a)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $(a^2 b^{-1})^3$ d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Blandede oppgaver

B1

(Eksamen 2P høst 2008, Del 1)

Skriv uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $3 \cdot (31 - 29)^2 - (5 - 3^2)$

b) $(2^3)^3 \cdot (2^{-1})^3$

B2

(Eksamen 2P høst 2009, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig: $\frac{2^8 \cdot 2^{-4}}{2^5}$.

B3

(Eksamen 2P vår 2010, Del 1)

Regn ut $5 - 2^4 \cdot (4 - 3)^3 \cdot 2^{-3}$

B4

(Eksamen 2P vår 2011, Del 1)

Regn ut

a) $a^4 \cdot (a^2)^{-3} \cdot a^0$

b) 🤔 $\frac{2^{-3} \cdot 4^3}{8^2}$

B5

(Eksamen 2P høst 2011, Del 1)

Regn ut

a) $8 \cdot 2^{-2}$

b) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

B6

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{(a^3)^{-2} \cdot a^5}{a^{-3} \cdot a^0}$$

B7

(Eksamen 2P høst 2012, Del 1)

Regn ut og skriv svaret som et helt tall

a) $(2^3)^2 \cdot 2^0$

b) 🤔 $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^2$

B8

(Eksamen 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Hvilken av de to brøkene A og B nedenfor har størst verdi?

A: $\frac{15 \cdot 5^{-1}}{2^2}$

B: $\frac{1}{6^{-2} \cdot 3 \cdot 15}$

B9

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Gjør disse uttrykkene så enkle som mulige:

a) $\frac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 3}{2 \cdot 3^{-1}}$

b) $a^3 + \frac{a^2 \cdot a^{-1}}{a^{-2}}$

B10

(Osloprøve 2P vår 2013, Del 1) 🤔

Ordne disse brøkene i stigende rekkefølge (slik at den minste står først osv.).

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2, \frac{3^2}{2}, \frac{2}{3^{-2}}, \frac{2}{\sqrt{25}}$$

B11

(Eksamen 2P vår 2013, Del 2)



Petter vil sende en epost med en matematikkoppgave til to personer 1. januar. Anta at hver av personene sender e-posten videre til to nye personer dagen etter, at hver av de fire som da får den, også sender den videre til to nye personer dagen etter at de mottok den, og at eposten fortsetter å spres på samme måte i dagene framover.

- a) Hvor mange personer vil motta e-posten 6. januar?
- b) På hvilken dato vil antall mottatte eposter på én dag for første gang bli større enn en milliard?

Fasit

Fasit øvingsoppgaver	Fasit blandede oppgaver
Oppgave 1 16, 8, 25, 9, 5	B1 a) 16 b) $2^6 = 64$
Oppgave 2 6,25 1728	B2 $2^{-1} = \frac{1}{2}$
Oppgave 3 a) 6^5 b) 2^{10} c) 10^4 d) a^6	B3 3
Oppgave 4 a) 8^2 b) 6^4 c) 5 d) z^3	B4 $2^{-3} = \frac{1}{8}$
Oppgave 5 a) 2^7 b) 3 c) a^5	a) a^{-2} b) $2^{-3} = \frac{1}{8}$
Oppgave 6 a) 6^{12} b) 8^{10} c) x^6 d) a^8	B5 a) 2 b) 18
Oppgave 7 a) 4^7 b) 5^4 c) a^3	B6 a^2
Oppgave 8 a) 1 b) 1 c) 1	B7 a) 64 b) 81
Oppgave 9 a) 10^2 b) $2^6 \cdot 5^3$ c) $\frac{5 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{6}$ d) 4^{15}	B8 B ($A = \frac{3}{4}$ $B = \frac{4}{5}$)
Oppgave 10 a) 3^6 b) 5^3 c) 10^{-7} d) 10^7 e) 2^{-12}	B9 a) 1 b) $2a^3$
Oppgave 11 a) $4 \cdot 5^{-2}$ b) $6^4 \cdot 10^{-5}$	B10 $\frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ $\frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$ $\frac{2}{3^{-2}} = 18$
Oppgave 12 a) 2^6 b) 2 c) 2^5 d) 3^4 e) 2^7	B11 a) 64 b) 30. januar
Oppgave 13 a) $3^4 a^4$ b) $\frac{3^2}{2^2}$ c) $a^6 b^{-3}$ d) 16	