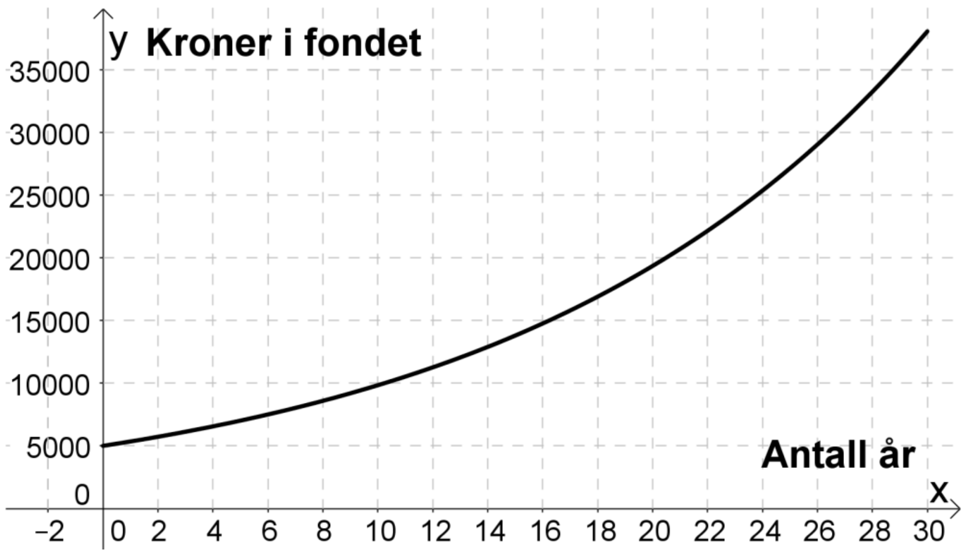
# Kapittel 5. Funksjoner

Funksjon er et av de viktigste begrepene i matematikken. Funksjoner handler om sammenhengen mellom to størrelser. I dette kapitlet skal vi se nærmere på to typer funksjoner, lineære og eksponentielle.

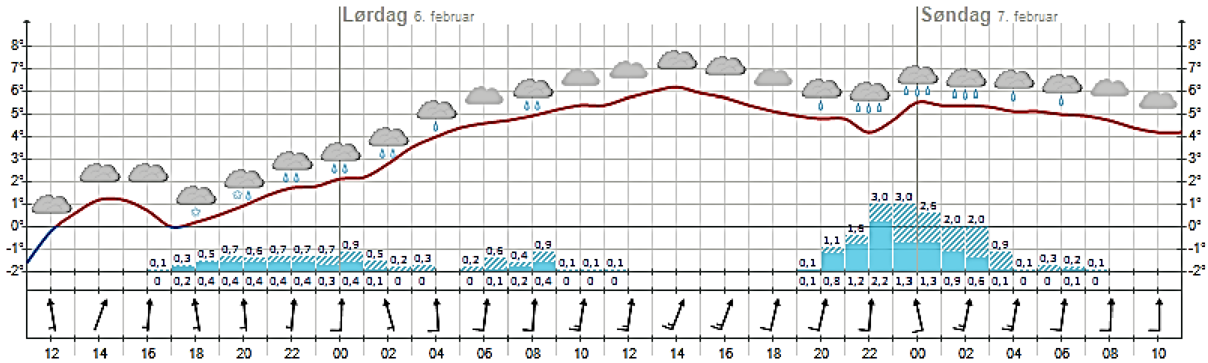
- Hvordan vi skal tolke grafer
- Hva som kjennetegner lineær vekst
- Hva som kjennetegner eksponentiell vekst
- Framstille funksjoner ved hjelp av tekst, formel, verditabell og graf.
- Finne gjennomsnittlig og momentan vekstfart
- Tolke svarene i praktiske situasjoner



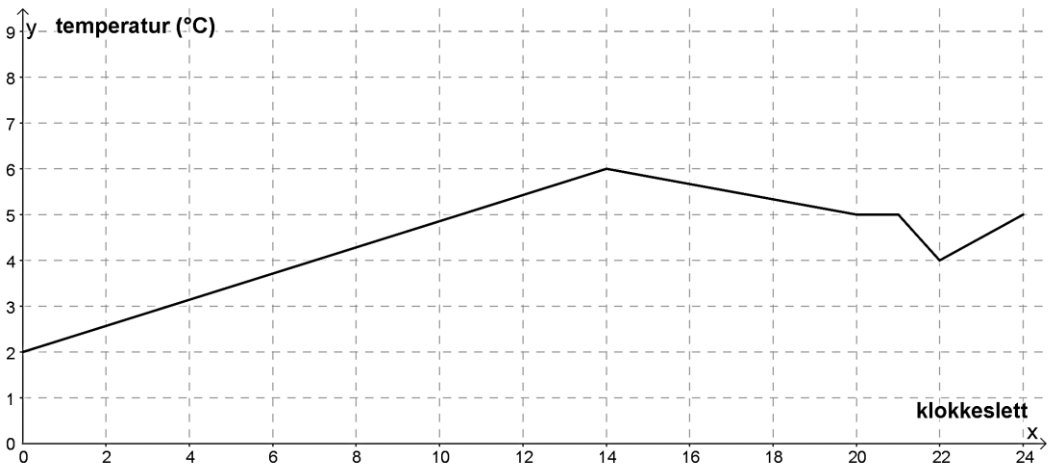
## 1. Graftolkning

En grafisk fremstilling gir oss informasjon om sammenhengen mellom flere størrelser.

Under ser du en grafisk fremstilling av været på Tveita noen dager i februar, hentet fra yr.no. Hvilken informasjon kan denne gi oss?




Vi tar et utsnitt av grafen og lager en **forenklet** fremstilling av temperaturutviklingen den 6. februar.




a) Når er temperaturen på sitt høyeste?________________

Hva er temperaturen da?______________________

b) Når er temperaturen på sitt laveste?__________________

Hva er temperaturen da?_____________________________

c) Hva er temperaturen kl. 20? _______________________

d) Når avtar (synker) temperaturen *raskest* per time? Hvordan ser vi det?

____________________________________________________________

## 2. Lineære funksjoner

I en lineær funksjon sier vi at **veksten** er lineær. Den kan både være positiv (økning) og negativ (nedgang).

Hva kjennetegner lineær vekst? Vi finner ut det ved hjelp av oppgavene under.

**Oppgave 1**

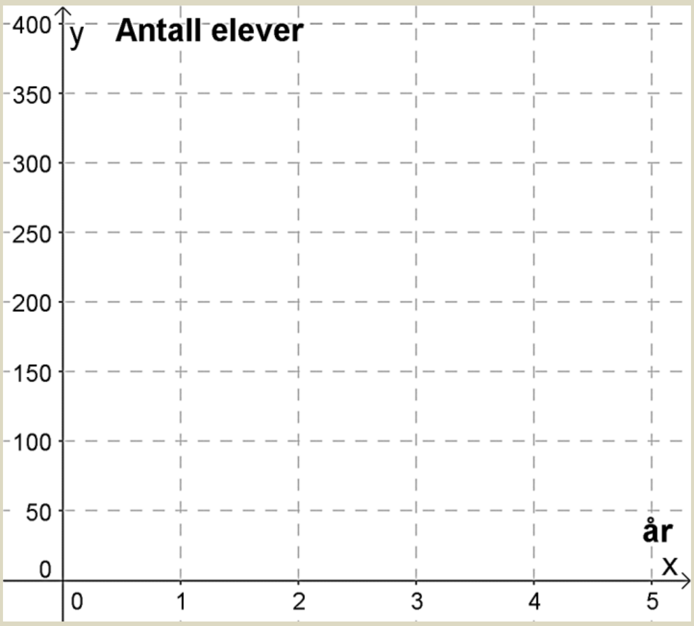
Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? ______________

b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? ______________

c) Hvor mange elever er det ved skolen om 4 år? ______________

d) Merk av elevtallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet under:




e) Legg merke til at de tre punktene ligger på en rett linje, og tegn linja som går gjennom punktene.

f) Når vil elevtallet ved skolen passere 300 dersom denne utviklingen fortsetter?

__________________________________

**Oppgave 2**

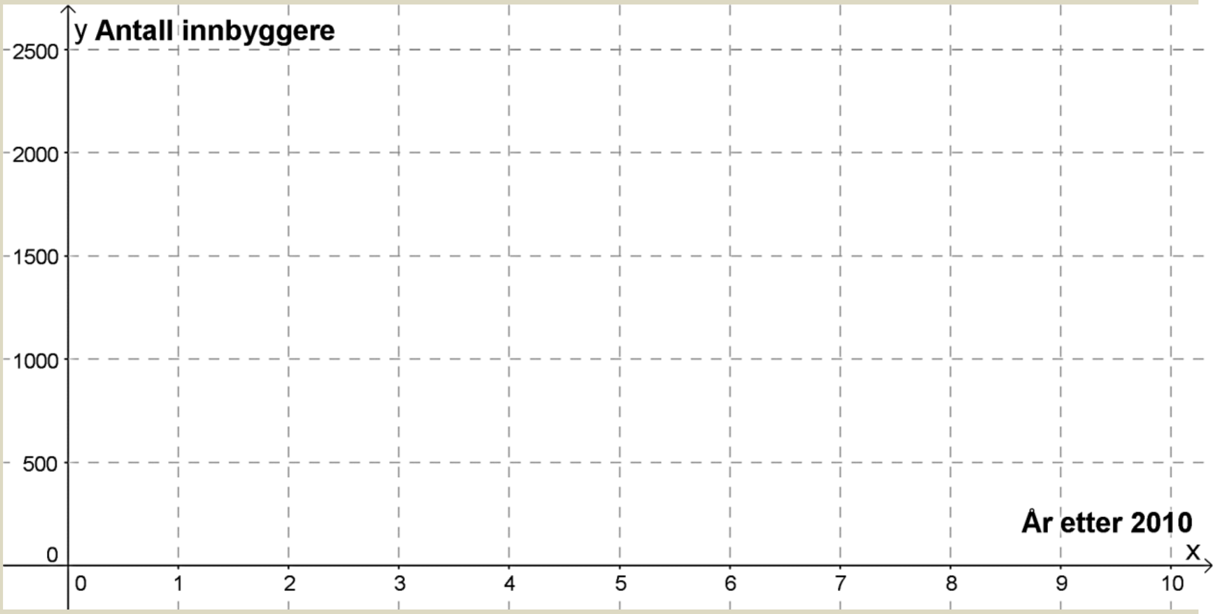
I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Årene etterpå har antall innbyggere avtatt (gått ned) med 250 per år.

a) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2012? ______________________________

b) Hvor mange innbyggere var det i bygda i 2015? ______________________________

c) Hvis vi regner med at utviklingen vil fortsette, hvor mange innbyggere vil det være i bygda i 2020? ______________________________

d) Merk av innbyggertallet de ulike årene som punkter i koordinatsystemet




e) Legg merke til at de tre punktene ligger langs en rett linje og tegn linja gjennom punktene.

Grafene i oppgave 1 og oppgave 2 viser begge lineær vekst.

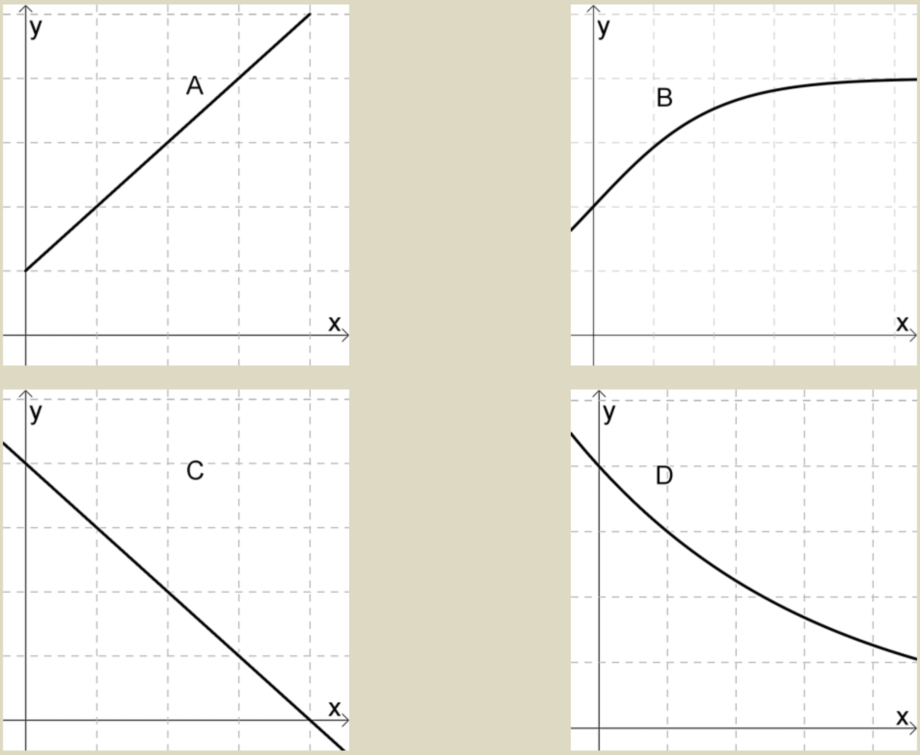
- Hva er likt?
- Hva er forskjellig?

Den grafiske tolkningen av lineær vekst er en **rett linje**.

Ved lineær vekst er **veksten lik** per enhet. Vi kan både ha positiv vekst (noe øker) og negativ vekst (noe avtar)

**Oppgave 3**

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser lineær vekst.




a) Forklar hvilke(n) graf(er) som viser lineær vekst, og begrunn svaret.

b) Beskriv en praktisk situasjon som passer til de(n) grafen(e) som viser lineær vekst.

**Oppgave 4**

Vi løper på tredemølle med jevn fart 12 km/t og vil finne ut hvor langt vi løper dersom vi holder denne farten

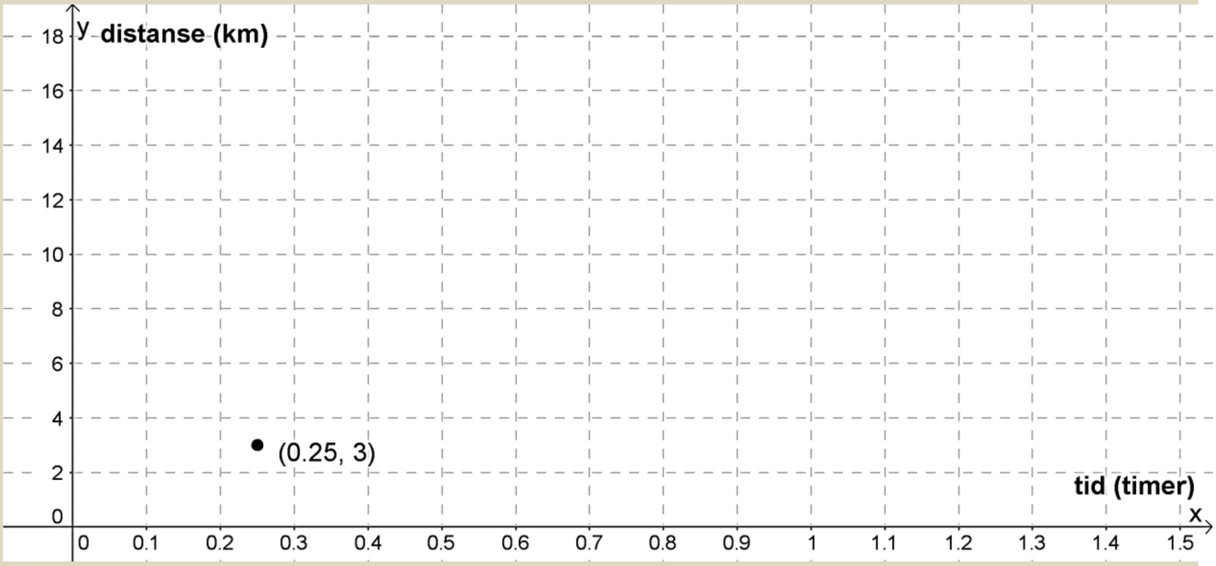
a) Fyll ut resten av tabellen under og merk av avstandene som punkter i koordinatsystemet.

| $x$ (tid (timer)) | $f(x)$ (distanse (km)) |
|---|---|
| **0,25** | **3** |
| 0,5 | |
| 1 | |
| 1,5 | |

b) Hvorfor viser denne situasjonen lineær vekst?

______________________________

c) Merk av punktene i koordinatsystemet og trekk en rett linje gjennom dem.




d) Bruk grafen til å finne ut omtrent hvor lenge du må løpe for å ha løpt 10 km

____________________________________________________________

e) Hvor langt løper du i løpet av en time?

____________________________________________________________

## 2.1 Praktisk tolkning av en lineær funksjon

Alle lineære funksjoner har

- **konstantledd** (der grafen skjærer y-aksen)
- **stigningstall** (hvor mye funksjonsverdien øker med når x-verdien øker med 1)

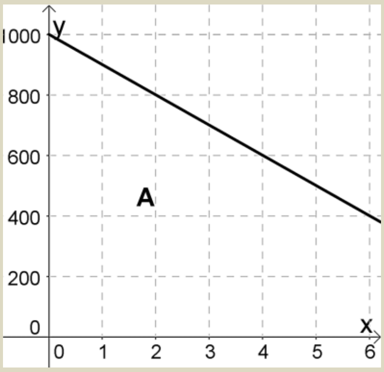
Som regel kaller man konstantleddet $b$ og stigningstallet $a$. ($a$ og $b$ står for tall).

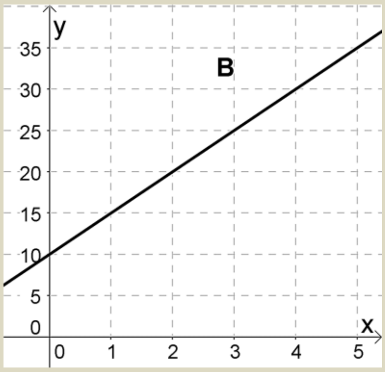
Uttrykket til en lineær funksjon kan da alltid skrives som $f(x) = a \cdot x + b$ eller $f(x) = b + a \cdot x$

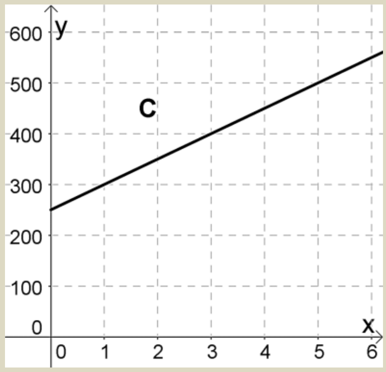
**Oppgave 5**

a) Hva er konstantleddet og stigningstallet til funksjonene i grafene under?

b) Hva er uttrykket til hver av funksjonene i grafene under?




**A:** $a =$_________________ **B:** $a =$_________________ **C:** $a =$_________________

$b =$_________________ $b =$_________________ $b =$_________________

$f(x) =$_______________ $f(x) =$_______________ $f(x) =$_______________

Det er interessant å vite uttrykket til en lineær funksjon fordi det gir oss informasjon om hva funksjonen beskriver. Vi skal nå finne uttrykkene til funksjonene i oppgave 1 og 2:

Eksempel 1

1) Elevtallet ved en skole er i dag 150. Antallet elever vokser med 25 elever hvert år.

Antall elever totalt vil være 150 + endringen.
Endringen er +25 hvert år, altså 25 · antall år.
Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden,
erstatter vi «antall år» med $x$

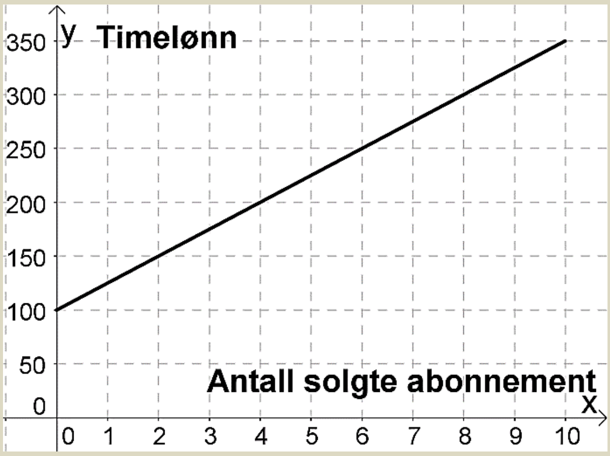
Antall elever etter $x$ år er gitt ved funksjonen $f(x) = 150 + 25 \cdot x$

1) I 2010 var antall innbyggere i en bygd 2500. Hvert år siden da har antall innbyggere avtatt (sunket) med 250.

Antall innbyggere totalt vil være 2500 + endringen
Endringen her er negativ (blir færre), − 250 hvert år, altså − 250 · antall år
Siden uttrykket skal gjelde for hvilket som helst år i fremtiden,
erstatter vi «antall år» med $x$

Antall innbyggere etter $x$ år er gitt ved funksjonen $f(x) = 2500 - 250 \cdot x$

**Oppgave 6**




Emma arbeider som telefonselger.

Timelønna hennes er delvis provisjonsbasert, dvs at hun får et fast beløp hver time, i tillegg til en bestemt sum per abonnement hun selger.

Bestem uttrykket til funksjonen.

________________________________

Hva sier uttrykket om lønna til Emma?

**Oppgave 7**

En fotobedrift selger album med bilder.

Prisen på albumet med $x$ antall bilder er gitt ved funksjonen $P(x) = 100 + 20x$.

Hva er prisen på albumet (uten bilder)? ___________________________

Hva er prisen for ett bilde? ______________________________

Hvor mye vil et album med 10 bilder koste? _________________________

## 3. Eksponentielle funksjoner

I praksis kan det være lett å blande eksponentiell og lineær vekst, et mål er derfor å kunne avgjøre når veksten er eksponentiell og når den er lineær.

**«Ja, Nei, Hvorfor?»**

Timelønna til Peter er 200 kr. Han får to ulike tilbud om lønnsøkning:

**Tilbud A: 10 % etter 6 måneder, deretter nye 10 % etter 12 måneder.**

**Tilbud B: 20 kr etter 6 måneder, deretter nye 20 kr etter 12 måneder**

Vil Peter ha den samme lønna etter 12 måneder uavhengig av hvilket tilbud han velger?

<u>Eksempel 2</u>

Da Dennis ble født satte foreldrene inn 10000 kr i et aksjefond. De regner med at avkastningen blir 5 % hvert år.

Hvor mye er det på konto etter 1 år? Etter 2 år? Hvorfor blir økningen forskjellig disse årene?

Etter 1 år vil si at 10000 kr har økt med 5 %. 1 % av 10000 kr er $\frac{10000}{100} = 100$ kr.
5 % er da $100 \cdot 5 = 500$. Etter 1 år er det 10000 + 500 = 10500 kroner i fondet.

Etter 2 år vil si at 10500 kr har økt med 5 %. 1 % av 10500 kr er $\frac{10500}{100} = 105$ kr
5 % er da $105 \cdot 5 = 525$. Etter 2 år er det 10500 + 525 = 11025 kroner i fondet.

Det første året øker fondet med 500 kr, det andre året øker fondet med 525 kr. Økningen er altså større det andre året, fordi tallet vi regner 5 % av er større.

**Oppgave 8**

Ved en skole er det 1000 elever. Antallet elever **vokser** med omtrent 10 % hvert år.

a) Hvor mange elever er det ved skolen om 1 år? ______________________

b) Hvor mange elever er det ved skolen om 2 år? ______________________

c) Hvorfor er endringen eksponentiell? ____________________________

**Oppgave 9**

a) En flatskjerm koster 10 000 kr. Vi antar at verdien **avtar** med 10 % hvert år.

b) Hva er verdien til flatskjermen etter 1 år? __________________________

c) Hva er verdien til flatskjermen etter 2 år? __________________________

d) Hvorfor er endringen eksponentiell? _____________________________

**Oppgave 10**

Tabellen under viser økningen i antall treningstimer til en svømmer fra hun er 15 til hun er 20 år.

a) Regn ut økningen i antall timer fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

b) Regn ut økningen i prosent fra et år til det neste, fyll inn i tabellen

c) Er økningen i antall treningstimer eksponentiell? Begrunn svaret.

| **Alder** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Timer** | **500** | **550** | **605** | **665** | **730** | **803** |
| **Økning i timer** | | | | | | |
| **Økning i prosent** | | | | | | |

Ved eksponentiell vekst er endringen **prosentvis lik** per enhet.

## 3.1 Uttrykket til eksponentielle funksjoner

Fra kapitlet om prosent og oppgavene over ser vi at verdien alltid endrer seg med samme prosent fra en periode til den neste når veksten er eksponentiell. Da kan vi skrive verdien etter $x$ år som ett regnestykke, vi uttrykket til eksempel 2:

Eksempel 3

Vekstfaktoren er $100\ \% + 5\ \% = 105\ \% = \frac{105}{100} = 1{,}05$

Startverdi: 10000

Uttrykk for verdi etter 1 år: $10000 \cdot 1{,}05$

Verdien etter 2 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^2$

Verdien etter 3 år: $10000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10000 \cdot 1{,}05^3$

Verdien etter $x$ år: $10000 \cdot \underbrace{1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot \ldots \cdot 1{,}05}_{x \text{ antall år}} = 10000 \cdot 1{,}05^x$

Utrykk for eksponentiell vekst: **Startverdi · Vekstfaktor$^{\text{antall perioder}}$**

**Oppgave 11**

Skriv opp uttrykket for antallet elever om $x$ år ved skolen i oppgave 8

___________________________________________

**Oppgave 12**

Skriv opp uttrykket for verdien til flatskjermen om $x$ år i oppgave 9

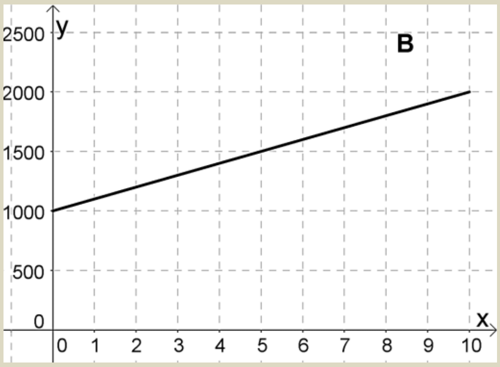
___________________________________________

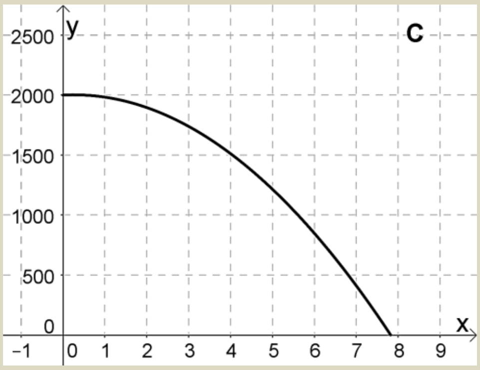
## 3.2 Grafen til eksponentielle funksjoner

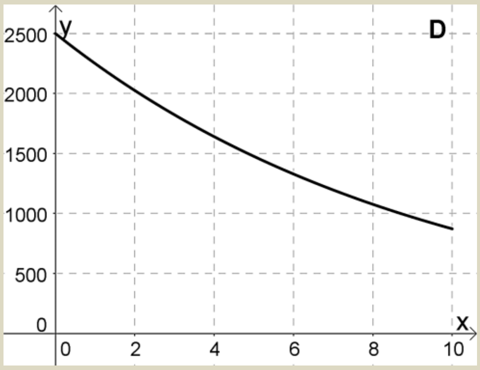
Hvordan ser grafen ut til noe som vokser eller avtar med samme prosent?

**Oppgave 13**

Nedenfor ser du 4 grafer. Minst en av grafene viser eksponentiell vekst.

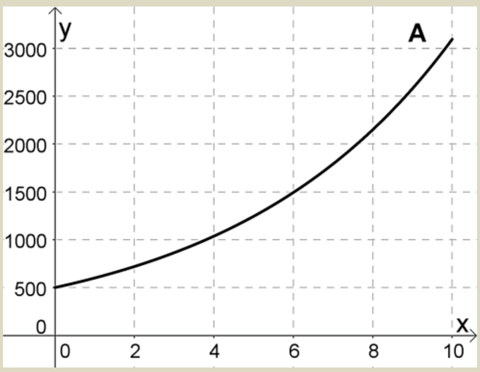



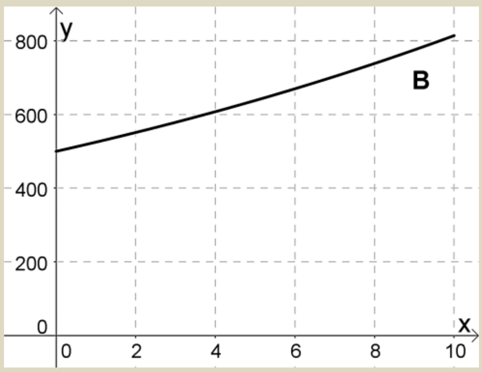




Forklar hvorfor grafen(e) viser eksponentiell vekst

**Oppgave 14**

Hvilken graf nedenfor er grafen til funksjonen $f(x) = 500 \cdot 1{,}20^x$? Begrunn svaret



# 4. Polynomfunksjoner

"Polynom" betyr "flere ledd". En polynomfunksjon består av en sum av potenser av *x*. Potensen med den største eksponenten bestemmer navnet på funksjonstypen.

Polynomfunksjonen $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kalles en *andregradsfunksjon*

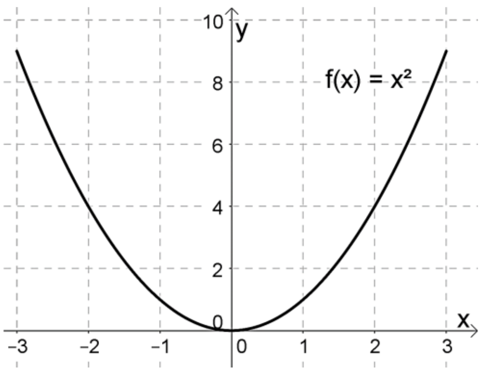
Polynomfunksjonen $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$ kalles en *tredjegradsfunksjon.*

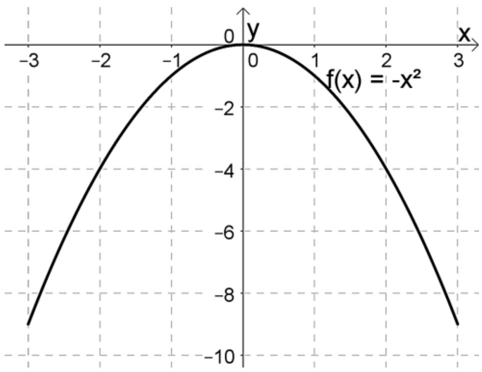
Begrepet stigningstall brukes ikke for polynomfunksjoner fordi grafen ikke er en rett linje. Men også polynomfunksjoner har et konstantledd som gir skjæringspunktet med andreaksen. Konstantleddene er 1 og -4 for funksjonene *f* og *g* ovenfor.

## 4.1 Grafen til en polynomfunksjon

En polynomfunksjon av grad 2 (=andregradsfunksjon) vil alltid ha et toppunkt eller et bunnpunkt, under ser du grafen til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = -x^2$.

Hva er likt og hva er forskjellig med disse grafene? Hvorfor er det slik?



**Oppgave 15**

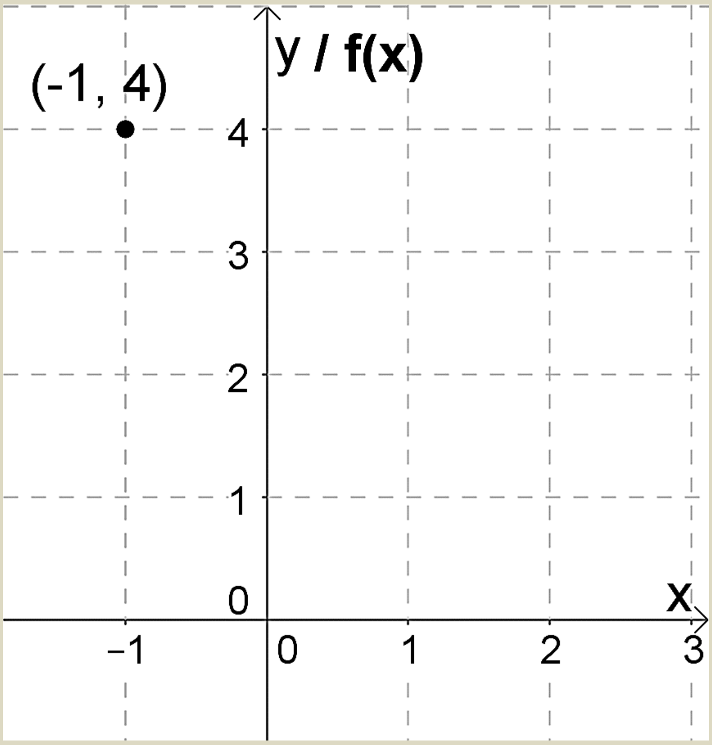
Funksjonen $f$ er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Hva kan vi si om hvordan grafen vil se ut før vi tegner den?

b) Gjør utregninger og fyll ut resten av tabellen:

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | | | | |

c) Marker resten tallene fra tabellen som punkter i koordinatsystemet og tegn grafen.



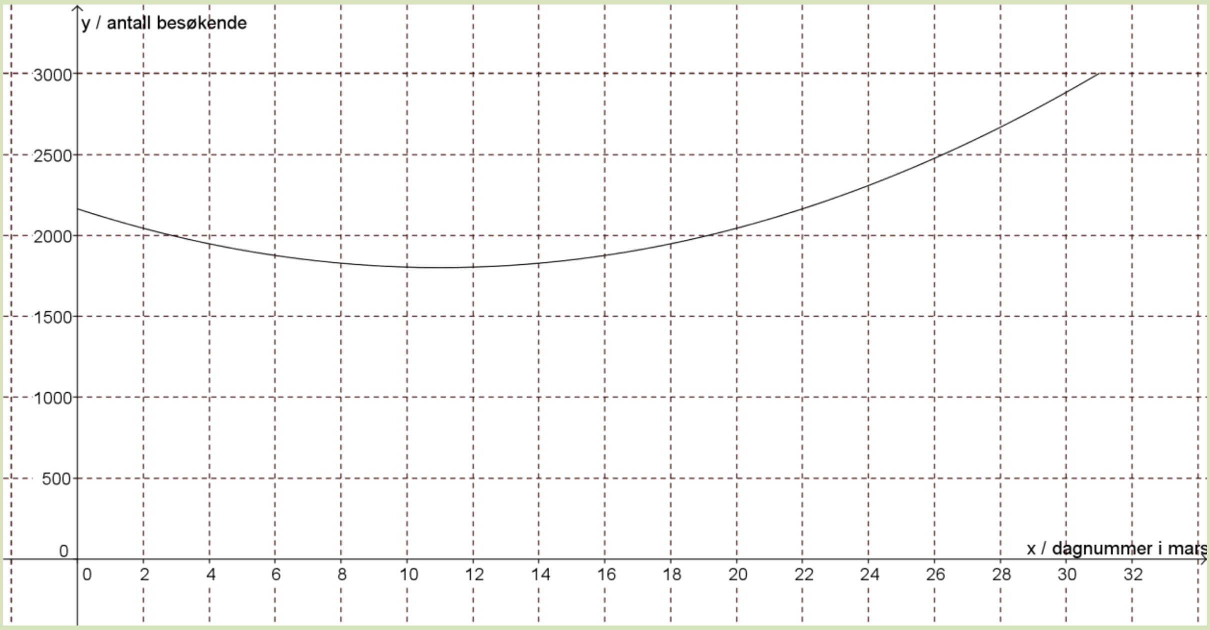
### 4.2 Ekstremalpunkt

I mange oppgaver med polynomfunksjoner blir du bedt om å tegne grafen og å finne største eller minste verdi som funksjonen kan ha. Disse punktene kalles for *ekstremalpunkt*. Litt enkelt kan vi si at den største verdien kalles for *toppunkt*, og den laveste verdien *bunnpunkt*.

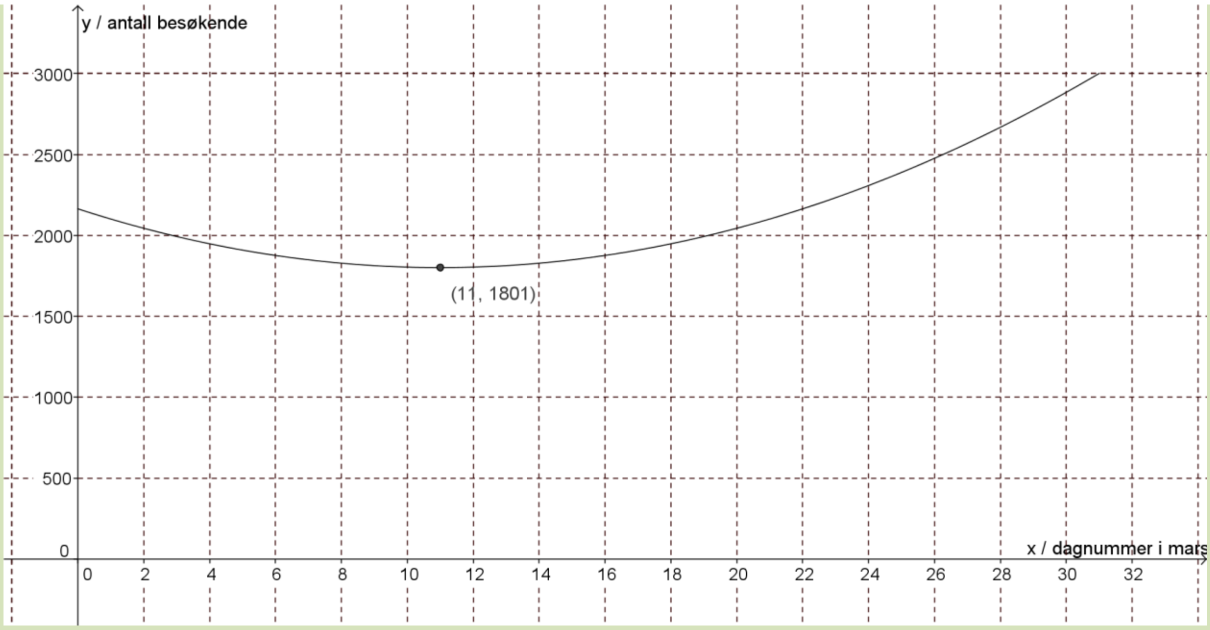
Eksempel 4

Funksjonen $B(x) = 3x^2 - 66x + 2164$ er en andregradsfunksjon. Det viser seg at denne beskriver ganske godt antall besøkende i et alpinanlegg som funksjon av dagnummeret $x$ i måneden mars. Vi sier at funksjonen er en god *modell* for antall besøkende.
Tegn grafen til funksjonen når $x$ ligger mellom 1 og 31.
På hvilken dag var det færrest besøkende i bakken? Hvor mange var der da?

Vi taster inn funksjonsuttrykket slik i Geogebra: **Funksjon[3x^2 – 66x + 2164,0,31].** Vi ber altså om at grafen skal tegnes fra $x$ = 0 til $x$ = 31. Så skriver vi en passende tekst på aksene. Etter å ha justert aksene skal grafen bli omtrent slik:




Geogebra har antagelig gitt funksjonen navnet $f(x)$. For å finne nøyaktig verdi for bunnpunktet, skriver vi kommandoen **Ekstremalpunkt[f].**



Vi ser at det var færrest besøkende for $x$ = 11, altså 11. mars. Da var det omtrent 1800 besøkende.

**Oppgave 16**

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -2x^2 + 200x - 2000$, der $x$ er prisen på en enhet av varen i kroner.

a) Tegn grafen. La $x$ ligge mellom 0 og 100.

b) For hvilken pris blir overskuddet størst, og hvor stort er overskuddet da?

**Oppgave 17**

Funksjonen $F(x) = 25x^3 - 375x^2 + 1150x + 12000$ beskriver ganske nøyaktig antallet innbyggere i en kommune $x$ år etter år 2000. $x$ = 0 er altså år 2000, $x$ = 1 er år 2001 osv.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra år 2000 til og med 2013.
*Her må du altså la x ligge mellom 0 og 13.*

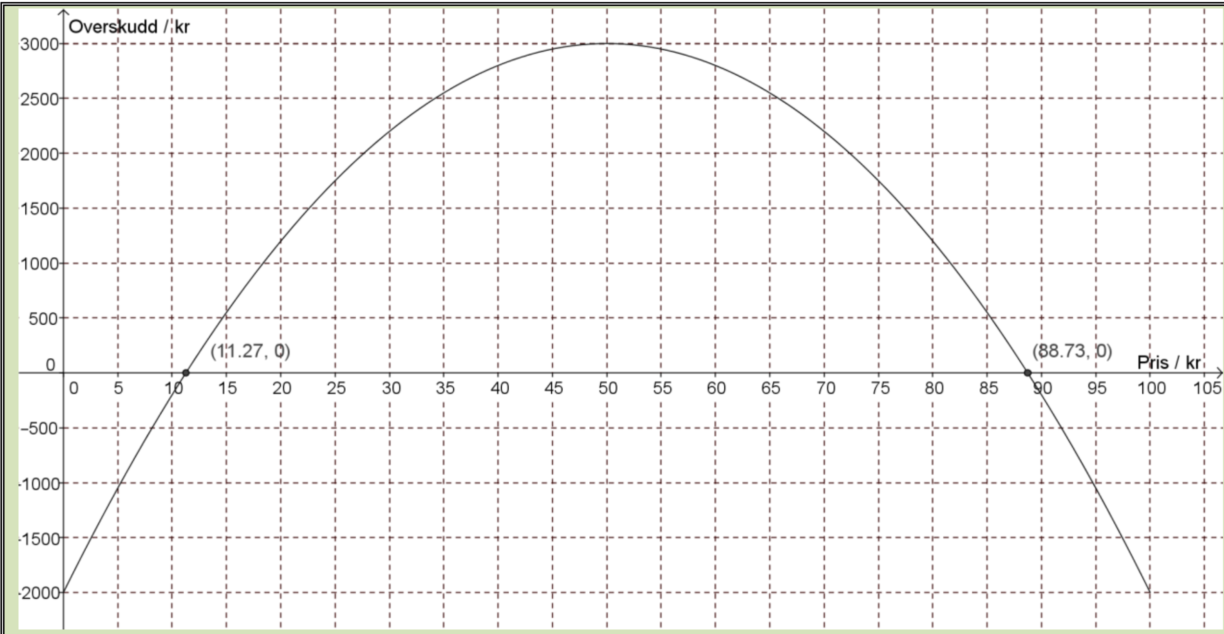
b) Hvilket år var det færrest innbyggere i kommunen? Hvor mange innbyggere var det da?

### 4.3 Nullpunkt

Et punkt der grafen til en funksjon treffer $x$-aksen kalles et *nullpunkt* til funksjonen. I et slikt punkt er funksjonsverdien lik null.
Vi ser først på hvordan vi finner nullpunkter i Geogebra.

Eksempel 5

Vi ønsker å finne nullpunktet til funksjonen i oppgave 1. Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-2x^2+200x-2000,0,100].** Geogebra kaller funksjonen for *f*. Så skriver vi kommandoen **Nullpunkt[f]**.




Det ene nullpunktet er $x = 11.27$, og har koordinatene (11.27 , 0). Alle nullpunkter vil ha $y$-koordinat 0. Det andre nullpunktet er $x = 88.73$, og har koordinatene (88.73 , 0).

Hva er den praktiske betydningen av dette?

Siden funksjonen viser et overskudd, vil den delen av grafen som ligger under $x$-aksen vise når bedriften går med underskudd. Der grafen treffer $x$-aksen er overskuddet lik null, det vil si at bedriften verken går med overskudd eller underskudd, den går i balanse.

Bedriften går i balanse når prisen på varen er 11,27 kr eller 88,73 kr.
Bedriften går med overskudd når prisen er høyere enn 11,27 kr og lavere enn 88,73 kr.
Bedriften går med underskudd når prisen er lavere enn 11,27 kr eller høyere enn 88,73 kr.

**Oppgave 18**

En bedrift har funnet ut at overskuddet på en vare per uke (i kroner) er gitt ved funksjonen $O(x) = -x^2 + 300x - 1500$, der $x$ er prisen på en enhet av varen.

a) Tegn grafen. La $x$ ligge mellom 0 og 300.
b) For hvilken pris går bedriften i balanse (overskudd lik null)?
c) Når går bedriften med overskudd?

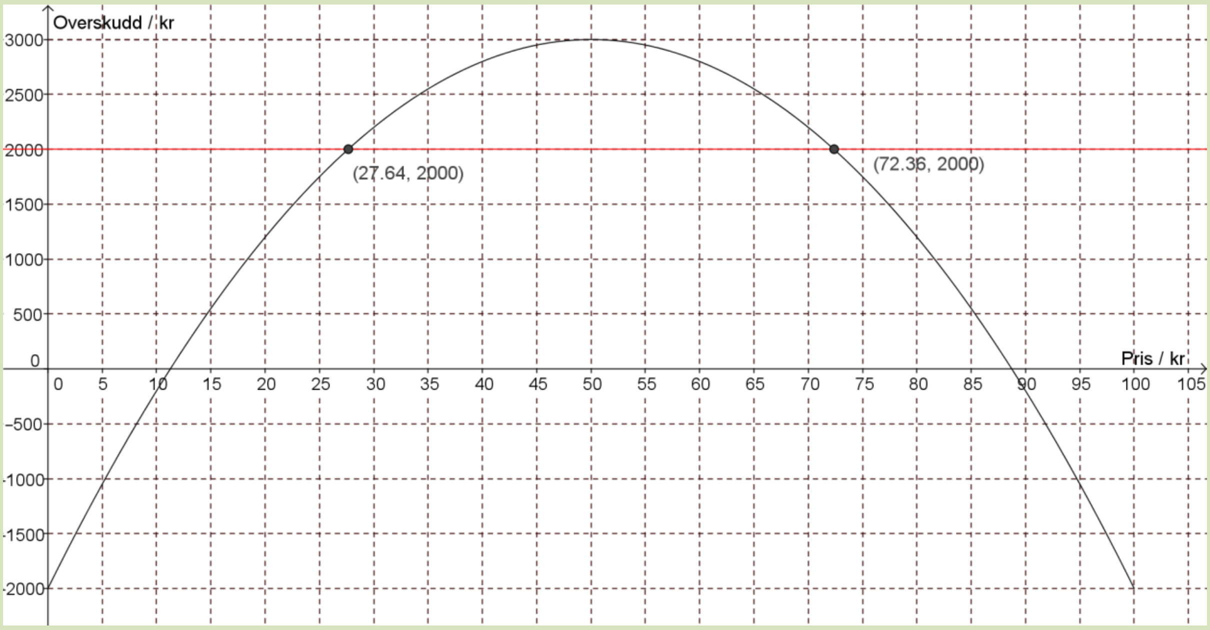
### 4.4. Skjæringspunkt

Et punkt der to grafer treffer hverandre, kalles *skjæringspunkt*. I et skjæringspunkt er funksjonsverdien til to funksjoner den samme.
Metoden vi bruker for å finne skjæringspunkter er kjent fra lineære funksjoner, men vi skal se på et eksempel der den praktiske betydningen er ny.

Eksempel 6
Vi ser fortsatt på funksjonen fra oppgave 1.

Vi vil finne hva prisen må være for at overskuddet skal bli større enn 2000 kr.

Vi tegner inn linja $y$ = 2000 og finner skjæringspunktene:




Vi ser at skjæringspunktene er (27.64 , 2000) og (72.36, 2000). Det betyr at når prisen er 27,64 kr eller 72,36 er overskuddet lik 2000

Vi ville finne ut når overskuddet er *større* enn 2000 kr. Siden grafen ligger over linja $y$ = 2000 mellom de to skjæringspunktene, er overskuddet større enn 2000 kr når prisen er mellom 27,64 kr og 72,36 kr.

**Oppgave 19**

En vårdag mellom kl. 12 og kl. 20 var temperaturen gitt ved $T(x) = -0{,}24x^2 + 1{,}2x + 16$, der $T(x)$ står for antall celsiusgrader, og $x$ for antall timer etter kl. 12.

a) Tegn grafen til denne funksjonen fra kl. 12 til og med kl. 20.

*Her må du altså la x ligge mellom 0 og 8.*

b) Når var temperaturen lik 16 °C?

c) Når var temperaturen høyere enn 16 °C?

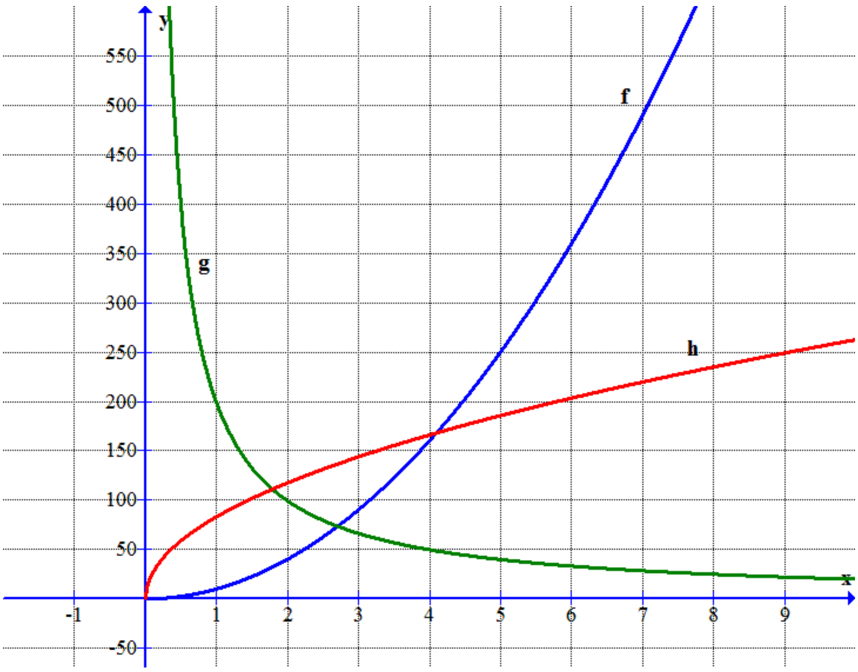
# 5. Potens - og rotfunksjoner

Alle potensfunksjoner ser slik ut: $f(x) = a \cdot x^b$. Her er *a* og *b* faste tall. Eksempler:

$$f(x) = 10 \cdot x^2$$
$$g(x) = 200 \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = 83 \cdot x^{0,5}$$

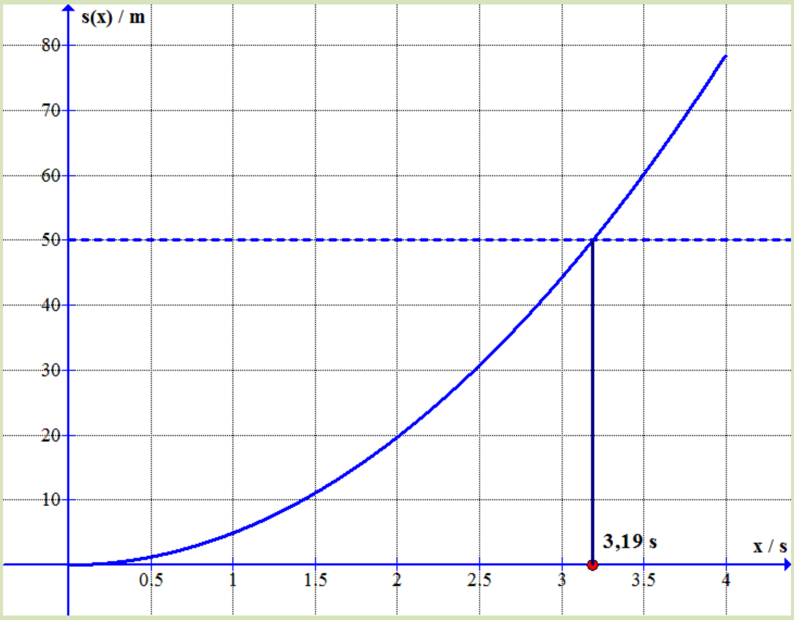
Det viser seg at $x^{0,5}$ faktisk er det samme som $\sqrt{x}$, slik at også en rotfunksjon kan skrives som en potensfunksjon.

Her er grafene til disse tre funksjonene:



Eksempel 7

Hvis vi slipper en gjenstand og lar den falle rett ned, vil den etter $x$ sekunder ha falt en strekning, målt i meter, som er gitt ved funksjonen $s(x) = 4,9x^2$. Forutsetningen er at luftmotstanden er liten. Grafen blir slik:




For å finne hvor langt gjenstanden kan falle på 2 s, kan vi regne ut $s(2) = 4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ på kalkulatoren. Vi kan også regne det ut i Geogebra..

For å finne hvor lang tid den bruker på å falle 50 m, legger vi inn linja y= 50 i Geogebra (den prikkede linjen) og finner skjæringspunktet. Da ser vi at gjenstanden bruker 3,19 s på å falle 50 m.

**Oppgave 20**

Tiden $t(x)$, målt i sekunder, som en gjenstand bruker på å falle $x$ meter uten luftmotstand, er gitt ved funksjonen $t(x) = 0,45\sqrt{x}$.

a) Tegn grafen til $t$ når $0 \le x \le 100$. $\sqrt{x}$ skriver du som sqrt(x) i Geogebra. (sqrt = square root.)

b) Hvor lang tid bruker gjenstanden på å falle 80 m?

c) Hvor langt faller gjenstanden på 3,6 s?

# 6. Vekstfart

## 6.1 Konstant vekstfart

Vekstfarten til en størrelse som forandrer seg med tiden viser hvor *raskt* størrelsen forandrer seg. Vi ser først på eksempler hvor en størrelse forandrer seg like mye i like lange tidsrom. Da sier vi at veksten er *jevn*, og vekstfarten er *konstant*. Slik vekst beskrives med en *lineær* funksjon.

Eksempel 8
Et tre vokser jevnt og med 0,6 m hvert år. Da er vekstfarten 0,6 m/år.

Eksempel 9
Det vi i dagligtale kaller fart, er egentlig vekstfarten til en strekning som en bil eller noe annet forflytter seg. Hvis farten til en bil er 80 km/h, betyr det at strekningen som bilen kjører øker 80 km på en time.

Eksempel 10
Et tre vokser jevnt, og høyden øker fra 2,1 til 4,5 m på 3 år. Høyden øker altså med 4,5 m – 2,1 m = 2,4 m på 3 år. Da er vekstfarten $\dfrac{2{,}4\text{ m}}{3\text{ år}} = 0{,}8\text{ m/år}$

**Oppgave 21**

Vekten av en melon øker jevnt fra 2,6 kg til 5,9 kg på 3 uker. Hva er vekstfarten til vekten av melonen? Husk målenhet på svaret.

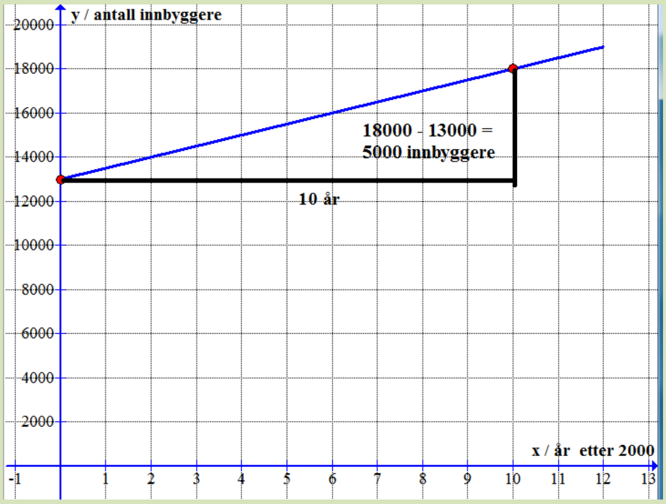
Eksempel 11
Antall bakterier i ei skål med næring er gitt ved funksjonen $b(x) = 300x + 1000$, hvor $x$ er antall timer som er gått etter at bakteriene ble plassert i skåla. Da er vekstfarten lik stignings-tallet til denne lineære funksjonen. Vekstfarten er konstant og lik 300 bakterier/time.

**Oppgave 22**

Den 1. juni var 50 m$^2$ av en sjø dekket med alger. $t$ uker senere var arealet som var dekket, beskrevet av funksjonen $A(t) = 50 + 20t$. Hva var vekstfarten til arealet av det algedekkede området? Husk målenhet.

Eksempel 12

Grafen viser antall innbyggere i en kommune fra år 2000 og utover. År 2000 svarer til $x$ = 0.



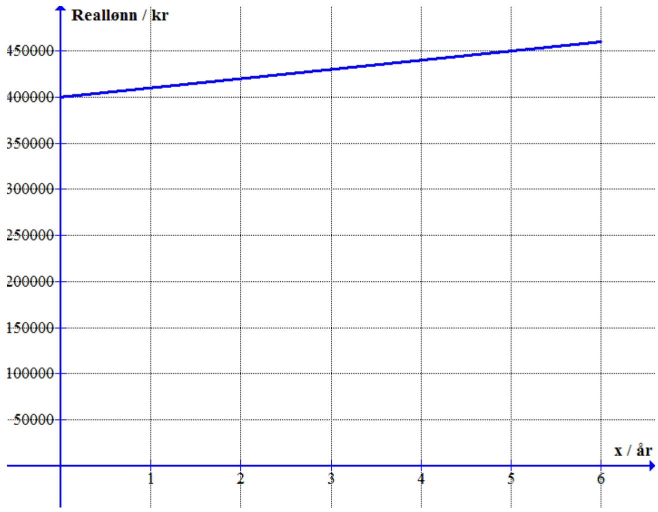

For å beregne vekstfarten finner vi to punkter på grafen som er lette å lese av. Ved å bruke de to punktene som er vist, får vi at vekstfarten er

$$\frac{5000 \text{ innbyggere}}{10 \text{ år}} = 500 \text{ innbyggere/år}$$

**Oppgave 23**

Grafen viser hvordan reallønna til Asgar har utviklet seg de siste 6 årene.

Finn vekstfarten til reallønna.




Eksempel 13

En sommerdag synker temperaturen jevnt noen timer. På 4 timer har temperaturen minket fra 25 grader til 19 grader, altså med 6 grader.

Hvis noe *minker* etter hvert som tiden går, er vekstfarten *negativ*.

Her blir vekstfarten $\frac{-6 \text{ grader}}{4 \text{ timer}} = -1,5 \text{ grader/time}$.

Funksjonen som beskriver temperaturutviklingen blir da $T(x) = -1,5x + 25$ når $x$ er tiden som har gått siden temperaturen var 25 grader.

**Oppgave 24**

Temperaturen i en kopp med varmt vann synker jevnt noen minutter. Temperaturen minker fra 100 grader til 90 grader på 4 minutter.

a) Finn vekstfarten til temperaturen.
b) Lag en funksjon som viser temperaturen i vannet som funksjon av tiden $x$.

**Oppgave 25**

I en kommune sank innbyggertallet jevnt gjennom flere år. I 2008 var det 20 000 innbyggere i kommunen og i 2012 var det 18 000 innbyggere.

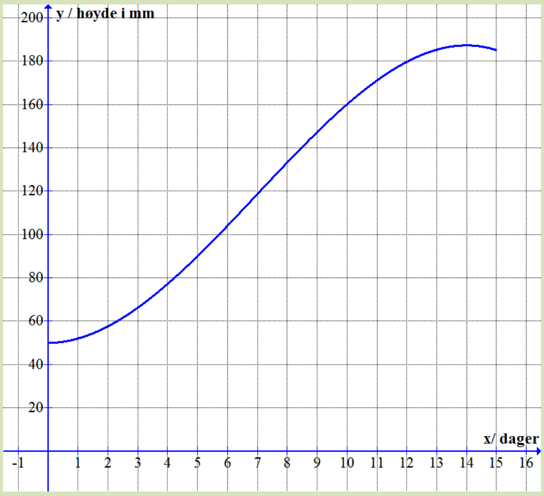
a) Finn vekstfarten til innbyggertallet.
b) Lag en funksjon som viser innbyggertallet $I(x)$, hvor $x$ er antall år som har gått siden 2008 (slik at $x = 0$ tilsvarer år 2008, $x = 1$ tilsvarer 2009 osv.)
c) Hva vil innbyggertallet være i 2015 hvis utviklingen fortsetter på samme måten?
d) Når vil innbyggertallet være lik 15 000?

### 6.2 Gjennomsnittlig vekstfart

Hvis veksten *ikke* er jevn, vil heller ikke vekstfarten være den samme hele tiden. Da bruker vi ofte *gjennomsnittlig* vekstfart.

Eksempel 14

Grafen til høyre viser høyden til en plante de første 15 dagene etter at den ble plantet.
Av grafen kan vi lese at høyden er 50 mm ved $x = 0$, 90 mm ved $x = 5$ og 160 mm ved $x = 10$.




Fordi grafen ikke er en rett linje, er vekstfarten ikke konstant. Vi kan imidlertid regne ut gjennomsnittlige vekstfarter.

To eksempler:

Gjennomsnittlig vekstfart de fem første dagene:

$$\frac{90 \text{ mm} - 50 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{40 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 8 \text{ mm/dag}$$

Gjennomsnittlig vekstfart fra dag 5 til dag 10:

$$\frac{160 \text{ mm} - 90 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = \frac{70 \text{ mm}}{5 \text{ dager}} = 14 \text{ mm/dag}$$

**Oppgave 26**

Finn gjennomsnittlig vekstfart de ti første dagene for planten i eksemplet foran.

Eksempel 15

Vi kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av en graftegner.

Funksjonen som beskriver høyden av planten i forrige eksempel er

$$h(x) = -0,1x^3 + 2,1x^2 + 50$$

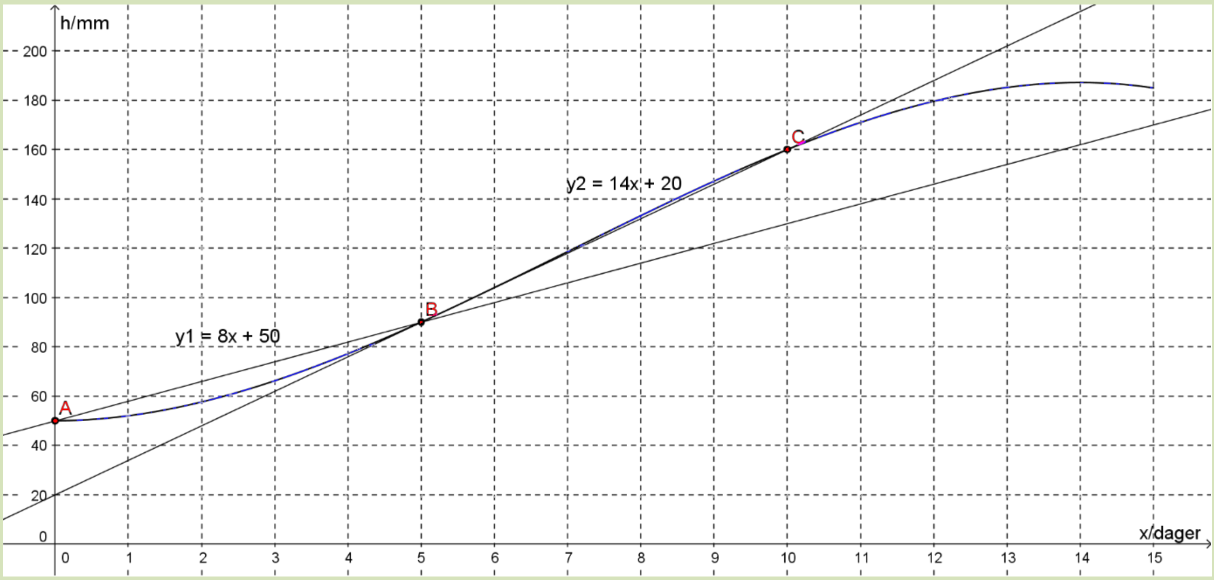
Først taster vi inn funksjonen: **Funksjon[-0.1x^3+2.1x^2+50,0,15].**

Vi setter inn punktene **A** = (0, 50), **B** = (5, 90) og **C** = (10, 140) på grafen.

Vi velger verktøyikonet linje mellom to punkter.

Høyreklikk på linjen og endre funksjonsuttrykket til **y = ax + b**. Stigningstallet **a** er lik gjennomsnittlige vekstfart.

Svaret blir **a = 8 mellom punkt A og B**, og **a = 14 mellom punk B og C** som stemmer med utregningene i eksempel 12, 8 mm/dag og 14 mm/dag.




### 6.3 Momentan vekstfart

*Momentan* vekstfart er vekstfarten på et bestemt tidspunkt, altså i et bestemt øyeblikk (sammenlign "moment" = øyeblikk på engelsk).

Den momentane vekstfarten er størst der grafen er brattest. Hvis vi igjen ser på grafen i forrige eksempel som viser høyden til planten, kan det se ut som grafen er brattest omtrent når $x = 7$ dager.

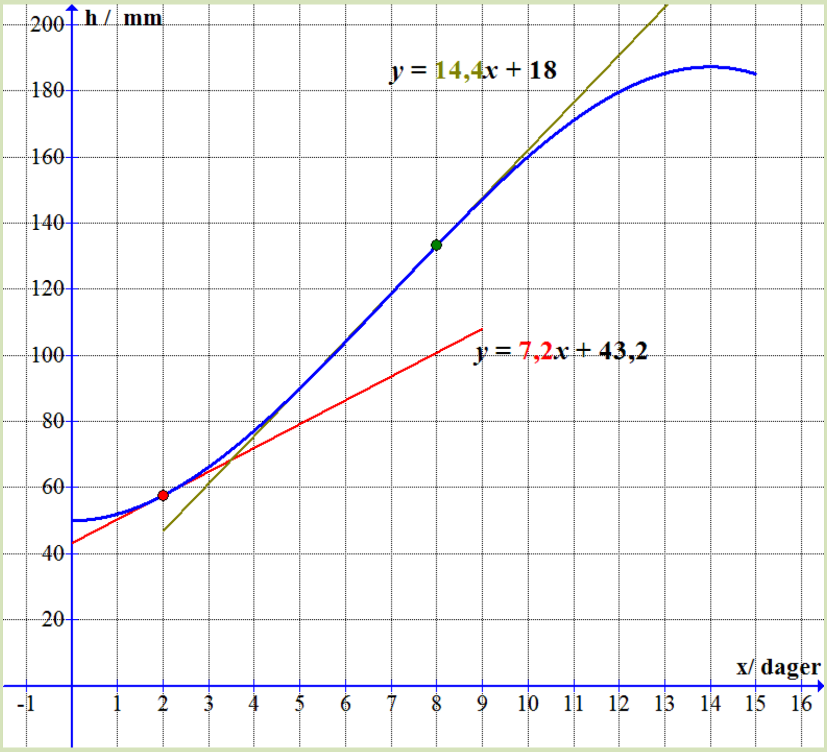
For å finne verdien til den momentane vekstfarten i et bestemt øyeblikk $x$, må vi tegne *tangenten* til grafen for denne verdien av $x$. *Da er den momentane vekstfarten stigningstallet til tangenten*. Dette kan vi gjøre i Geogebra.

Eksempel 16

Vi fortsetter å undersøke veksten til planten i eksemplene foran.

Under har vi tegnet grafen, og tangenter for $x$ = 2 og $x$ = 8. Vi tegner en tangent til funksjonen $f$ i $x$ = 2 i Geogebra med kommandoen **Tangent[2,f]** .

Geogebra gir oss også likningene for tangentene. De er skrevet inn på figuren under.




Fra likningene til tangentene på figuren ser vi at den momentane vekstfarten er 7,2 mm/dag etter 2 dager og 14,4 mm/dag etter 8 dager.

**Oppgave 27**

Vekten i kg av en voksende melon er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$V(x) = -0{,}0024x^3 + 0{,}02x^2 + 0{,}21x + 1{,}0$$

der $x$ er antall uker etter at vekten var 1,0 kg. Uttrykket gjelder bra de åtte første ukene.

a) Tegn grafen til $V$ når $x$ ligger mellom 0 og 8 uker.
b) Finn momentan vekstfart når $x$ = 2 og når $x$ = 6. Husk å skrive målenhet på svaret.
c) Hva er vekten av melonen etter 2 uker?
d) Regn ut gjennomsnittlig vekstfart mellom uke 2 og uke 8.

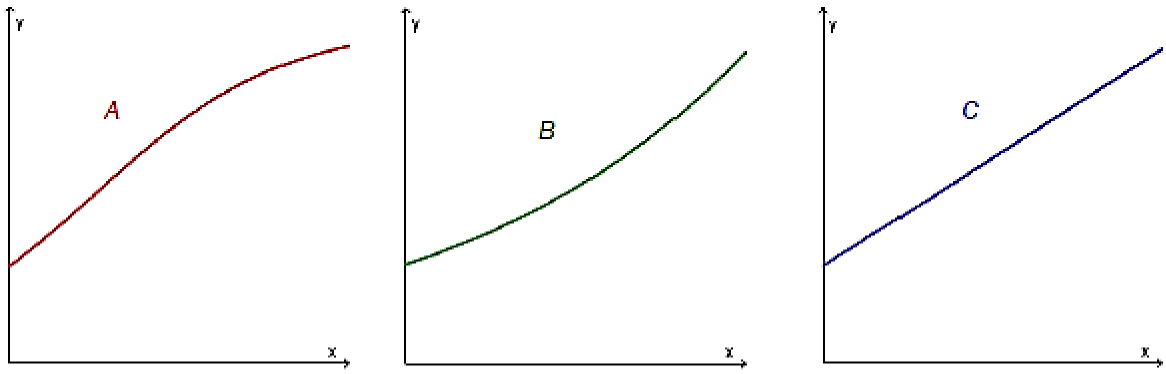
## Eksamensoppgaver

**E1**

(2P vår 2016, Del 1)

a) Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt

b) Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse viser eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt




**E2**

(2P vår 2016, Del 1)

Marte er telefonselger. Hun har en fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

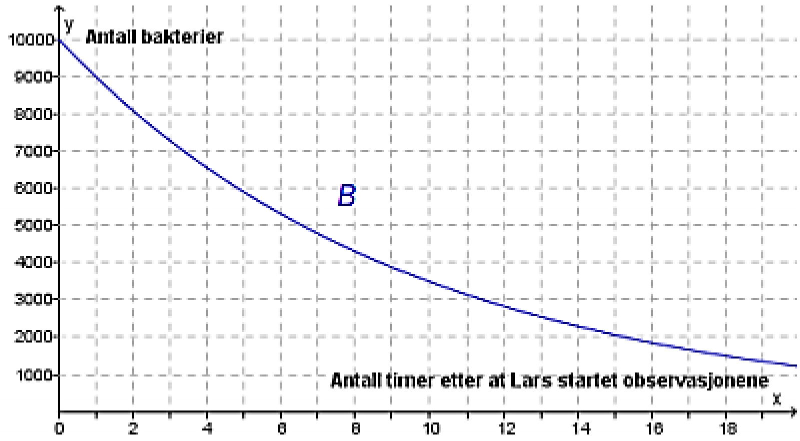
En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner. Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

a) Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.

b) Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.

c) Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

**E3**
(2P, høst 2015, del 1)




Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen B ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp utrykket for B(x)

**E4**
(2P, vår 2015, del 1)
Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

**E5**
(2P, vår 2015, del 1)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet $h(t)$ meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

a) Fyll ut tabellen nedenfor

| $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(t)$ | | 18,75 | | 18,75 | | 8,75 | |

b) Tegn grafen til $h$

c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h(0)$ og $h(3)$

**E6**

Funksjonene $G$ og $J$ gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \qquad 0 \leq x \leq 12$$

$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \qquad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.

b) Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?

c) Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?

d) Bestem $\frac{G(12)-G(0)}{12}$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2}$

Hva forteller disse svarene om vekta til Geir?

**E7**

(2P vår 2015, Del 2)

Funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \leq x \leq 300$$

Viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet $x$ dager etter 31. desember 2013

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til $f$

b) Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur

c) Bestem $f(100)$ og den momentane vekstfarten til $f$ når $x = 100$.
Hva forteller disse svarene?

**E8**
(1P vår 2013, Del 2)

Funksjonen *h* gitt ved $h(t) = 3,35t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990 – 2000.
Ifølge modellen var det $h(t)$ hjort i kommunen *t* år etter 1. januar 1990.

a) Tegn grafen til *h* for $0 \le t \le 10$.

b) Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?

c) Løs likningen $h(t) = 850$ grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.

d) Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i antall hjort per år i perioden 1. januar 1994 – 1. januar 1998?

**E9**
(2P-Y høst 2013, Del 2)

Funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -9x^3 + 270x^2 - 1400x + 3000$ viser hvor mange personer som var logget på en nettside *x* timer etter midnatt et gitt døgn.

a) Tegn grafen til *f* for $0 \le x \le 24$.

b) Hvor mye var klokka da det var flest personer logget på nettsiden?
Hvor mange personer var logget på nettsiden da?

c) Når var flere enn 1500 personer logget på nettsiden?

d) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til *f* for $6 \le x \le 16$.
Hva forteller dette svaret?

**E10**
(Eksamen 2P(-Y), vår 2016, del 2)
Funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader *B(x)* sola stod over horisonten x timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til B.

b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?

d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 12.00?

## Fasit øvingsoppgaver

Oppgave 1 a) 175, b) 200, c) 250, d) 6 år

Oppgave 2 a) 2250, b) 1250, c) 0

Oppgave 3

Oppgave 4 a) (0.5 , 6), (1 , 12), (1.5 , 18) b)Linja stiger like mye for hver gang x-verdien øker med én c) 0,83t (50min) d) 12 km

Oppgave 5 A: $f(x) = -100x + 1000$ B: $f(x) = 5x + 10$ C: $f(x) = 50x + 250$

Oppgave 6 $f(x) = 100 + 25x$. 25 kr per solgte abonnement. 100 i fast timelønn

Oppgave 7 $100, 20, 100 + 20 \cdot 10 = 100 + 200 = 300$

Oppgave 8 1100, 1210. Vokser med lik prosent

Oppgave 9 9000, 8100. Avtar med lik prosent

Oppgave 10

| Alder | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Timer | 500 | 550 | 605 | 665 | 730 | 803 |
| Økning i timer | | 50 | 55 | 60 | 65 | 73 |
| Økning i prosent | | 10 % | 10 % | ≈ 10 % | ≈ 10 % | 10 % |

Oppgave 11 $f(x) = 1000 \cdot 1{,}10^x$

Oppgave 12 $f(x) = 9000 \cdot 0{,}90^x$

Oppgave 13 A , D

Oppgave 14 A

Oppgave 15

Oppgave 16 b) x = 50, 3000 kr

Oppgave 17 b) 2008, ca. 10 000

Oppgave 18 b) ca. 5 kr og ca. 295 kr c) mellom 5 kr og 295 kr

Oppgave 19 b) kl. 12 og kl. 17 c) Mellom kl. 12 og kl. 17

Oppgave 20 b) 4,0 s c) 64 m

Oppgave 21 1,1 kg/uke

Oppgave 22 20 $m^2$/uke

Oppgave 23 10 000 kr/år

Oppgave 24 a) -2,5 grader/min b) $y = -2{,}5x + 100$

Oppgave 25 a) – 500 innbyggere/år b) $I(x) = -500x + 20000$ c) 16 500 d) 2018

Oppgave 26 11 mm/dag

Oppgave 27 b) 0,26 kg/uke, 0,19 kg/uke c) 1,48 kg d) 0,21 kg/uke

## Fasit eksamensoppgaver

E1 a) Lik prosentvis økning per periode b) B. Grafen blir brattere etter hvert som x øker
E2 a) b) 25 kr per produkt, grunnlønna er 120 kr c) 10 produkter
E3 a) 0,90 , 10000 · 0,90^x
E4 2,5 timer
E5 a) h(0)=15, h(1)=20, h(2)=15, h(3)=0 b) c) h(0): hvor høyt over bakken ballen kastes (15m) h(3): Hvor høyt ballen er over bakken etter 3 sek (0 m, altså på bakken)
E6 b) G:6,6 J:5,9 c) G: 4,4 mnd J: 5,6 mnd d) 0,55, gjennomsnittlig vektøkning per måned det første året for Geir. 1,01, gjennomsnittlig vektøkning per måned de to første månedene for Geir
E7 b) ca. 13,3 °C c) f(100) = 8,5 f'(100)=0,09. Betyr at temperaturen i vannet er 8,5 grader 100 dager etter 31.12, og den dagen øker temperaturen med 0,09 grader per dag.
E8 b) I februar 1992, ca. 870 hjort c) I mai 1991 og januar 1993
E9 b) kl. 17, 13000 c) mellom ca. kl. 5 og 24 d) ca. 1050 personer/time.
E10 b) 52,2° c) ca. kl.07.40 og ca. kl 19.40 d) ca. 0,9° per time