Utdanningsdirektoratet

Eksempel på løsning

2011

REA3022 Matematikk R1

Sentralt gitt skriftlig eksamen Høsten 2010

Bokmål

REA3022 Matematikk R1, Høst 2010

Del 1 – Uten hjelpemidler

Kun vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Løsningen av Del 1 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene kan ikke bruke PC på Del 1, og må skrive besvarelsen for hånd.

Oppgave 1

a) 1) $f(x) = 2x \cdot e^x$

$f'(x) = 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = \underline{\underline{2e^x\left(1+x\right)}}$

2) $g\left(x\right) = 3\sqrt{x^2 - 1}$

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}}}$$

b) $x = 1$ er en løsning av likningen $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0$ fordi

$2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 2 - 6 - 2 + 6 = \underline{\underline{0}}$

Siden $x = 1$ er en løsning, er polynomet delelig med $\left(x-1\right)$.

Polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right) : \left(x-1\right) = \underline{2x^2 - 4x - 6} \\
\underline{-\left(2x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad -4x^2 - 2x + 6 \\
\quad \underline{-\left(-4x^2 + 4x\right)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-\left(-6x + 6\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dette viser at $2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = \underline{(x-1)(2x^2 - 4x - 6)}$.

Jeg finner de andre nullpunktene ved å løse andregradslikningen $2x^2 - 4x - 6 = 0$:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$x = \underline{\underline{-1}} \quad \vee \quad x = \underline{\underline{3}}$$

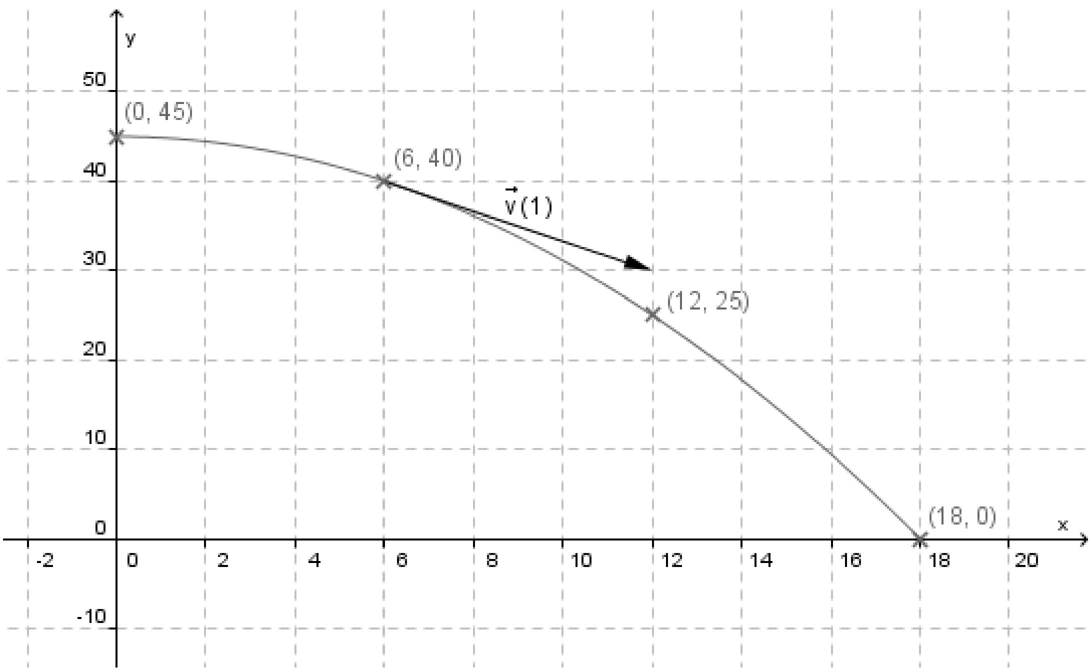
c) 1) $\vec{r}(t) = \left[6t, -5t^2 + 45\right]$

$\vec{r}(0) = \underline{[0, 45]}$

$\vec{r}(1) = \underline{[6, 40]}$

$\vec{r}(2) = \underline{[12, 25]}$

$\vec{r}(3) = \underline{[18, 0]}$



2) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \underline{[6, -10t]}$

$\vec{v}(1) = \underline{\underline{[6, -10]}}$

Fartsvektoren er tegnet inn på grafen. Se a).

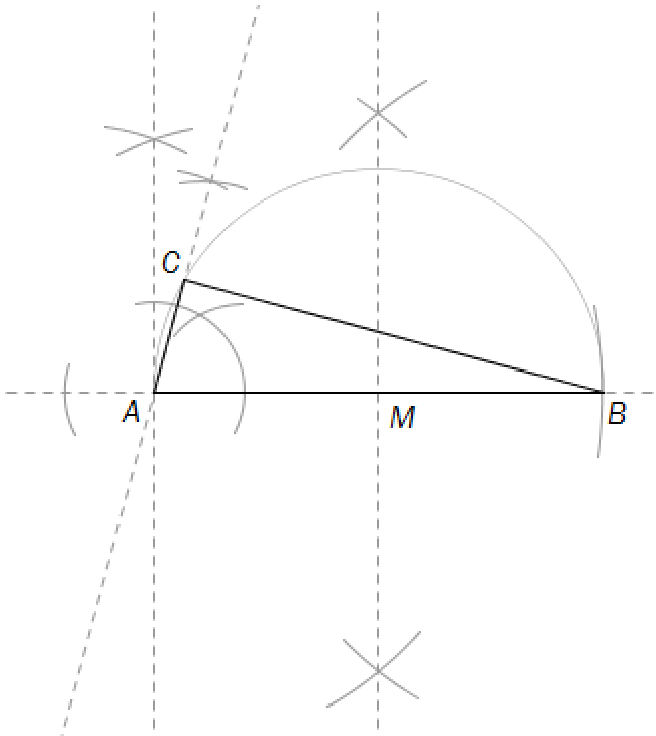
3) $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underline{\underline{[0, -10]}}$

Akselerasjonen er hele tiden de samme (10 i negativ y - retning).

d) Hvis vi skal trekke én gutt og én jente, må vi trekke én av seks og én av fire, til sammen to av ti.

$$P(\text{Én gutt og én jente}) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{6}{1} \cdot \frac{4}{1}}{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}} = \frac{24}{45} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}$$

e)



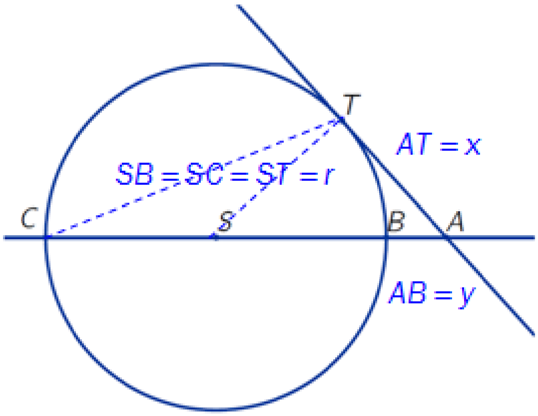
Konstruksjonsforklaring:

- Jeg bruker passeren og avsetter linjestykket $AB = 10,0$ cm.
- Jeg konstruerer en vinkel på $60°$ med toppunkt i A.
- Jeg oppretter en normal i A.
- Jeg halverer vinkelen på $30°$ mellom normalen og vinkelen på $60°$.
  Jeg har da at $\angle A = 60° + 15° = \underline{75°}$.
- Siden $\angle C = 90°$, må punktet C i følge Thales setning ligge på sirkelen med sentrum i midtpunktet på AB. Jeg oppretter midtnormalen på AB og tegner en halvsirkel med sentrum i midtpunktet M og radius MA. Punktet C er skjæringspunktet mellom sirkelbuen og halveringslinjen etter halveringen av vinkelen på $30°$.

f) 1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+4}{x-2}$ eksisterer ikke siden $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+2) = 6$ mens $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 2+2 = \underline{\underline{4}}$

Oppgave 2



a) En tangent til en sirkel står normalt på radius i sirkelen i tangeringspunktet. $\angle STA$ er derfor 90°, og jeg kan bruke Pytagoras' setning på ΔSAT:

$$SA^2 = AT^2 + ST^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(r+y)^2 = x^2 + r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$r^2 + 2yr + y^2 = x^2 + r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 = \underline{y(y+2r)}$$

b) Når en periferivinkel og en sentralvinkel i en sirkel spenner over samme sirkelbue, er periferivinkelen halvparten så stor som sentralvinkelen.
Dersom $\angle SCT = 30^\circ$, er $\angle BST = 60^\circ$.

Det vil si at vinklene i ΔSAT er 30°, 60° og 90°.
Hypotenusen SA er da dobbelt så lang som den korteste kateten ST.

$SA = r + y = 2ST = 2r$

$r + y = 2r$

$\underline{y = r}$

$AB = y = \underline{\underline{r}}$

Del 2 – Alle hjelpemidler

Her et Del 2 løst med grafisk kalkulator som eneste digitale verktøy.

Løsningen av Del 2 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Med kun en grafisk kalkulator tilgjengelig, må elevene skrive besvarelsen for hånd.

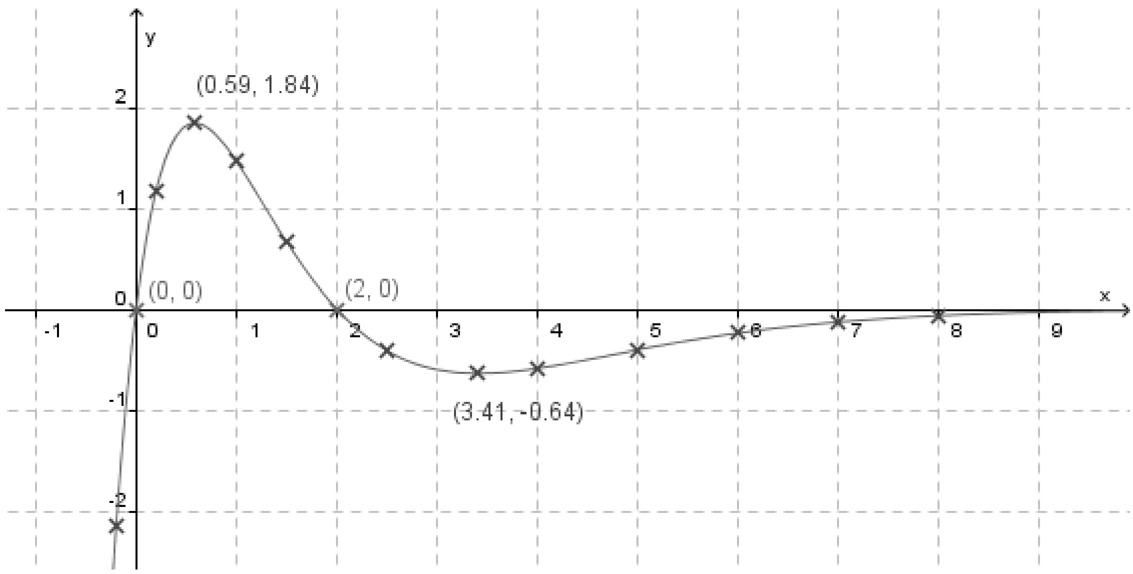
Oppgave 3

a) $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$

$$f'(x) = \left(4x^2\right)' \cdot e^{-x} + 4x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)'$$
$$= \underline{\underline{8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x}}}$$

Jeg tegnet først grafen til f' på kalkulatoren for å se hvordan den så ut (GRAPH, la inn funksjonsuttrykket, DRAW), så brukte jeg TABLE for å finne koordinatene til ulike punkter på grafen, slik at jeg kunne lage en nøyaktig tegning på papir.

For å finne toppunktet, brukte jeg G-SOLV og MAX.
For å finne bunnpunktet brukte jeg G-SOLV og MIN.
For å finne nullpunktene brukte jeg G-SOLV og ROOT.



b) Jeg ser av grafen i a) at den deriverte er negativ for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, positiv for $x \in \langle 0, 2 \rangle$ og negativ for $x \in \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Det betyr at grafen til f avtar for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, har et bunnpunkt for $x = 0$, vokser for $x \in \langle 0, 2 \rangle$, har et toppunkt for $x = 2$ og avtar igjen for $x \in \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Jeg legger inn funksjonsutrykket til f på kalkulatoren, bruker TABLE og finner at $f(0) = \underline{0}$ og $f(2) \approx \underline{2{,}17}$.

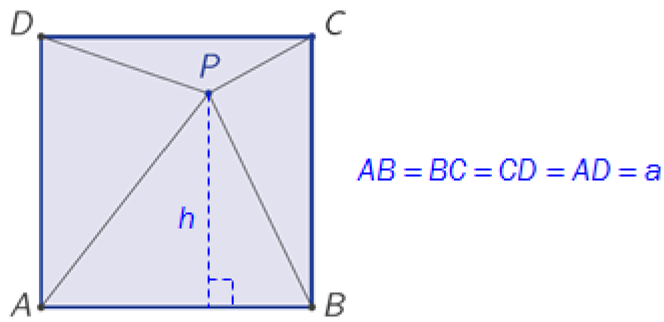
$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har da et bunnpunkt i } (0{,}0) \text{ og et toppunkt i } (2,\ 2{,}17).}}$

Grafen til f' har et toppunkt for $x \approx 0{,}59$ og et bunnpunkt for $x \approx 3{,}41$. Grafen til f vokser da raskest og har et vendepunkt for $x \approx 0{,}59$ og avtar raskest og har et vendepunkt for $x \approx 3{,}41$.

Jeg bruker TABLE og finner at $f(0{,}59) \approx \underline{0{,}77}$ og $f(3{,}41) \approx \underline{1{,}54}$.

$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har da vendepunkter i } (0{,}59,\ 0{,}77) \text{ og } (3{,}41,\ 1{,}54).}}$

Oppgave 4



a) Arealet av $\Delta ABP = \underline{\underline{\frac{1}{2}ah}}$.

Høyden i ΔPCD er $a - h$. Jeg får derfor at arealet av $\Delta PCD = \underline{\underline{\frac{1}{2}a(a-h)}}$.

b) $\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a(a-h) = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ah = \underline{\underline{\frac{1}{2}a^2}}$

$\underline{\underline{\text{Arealet av de to trekantene er halvparten av arealet av kvadratet } ABCD.}}$

Oppgave 5

a) $\overrightarrow{AB} = \left[-(-1)+7, -0+(-2)\right] = \underline{\underline{[8,-2]}}$

$\overrightarrow{AC} = \left[-(-1)+3, -0+6\right] = \underline{\underline{[4,6]}}$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$$

$$= \frac{[8,-2]\cdot[4,6]}{\sqrt{8^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{4^2+6^2}}$$

$$= \frac{32-12}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{52}} \approx \underline{0,3363}$$

$$\angle A \approx \cos^{-1}(0,3363) \approx \underline{\underline{70,3^\circ}}$$

b)

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}[-8,2] + \frac{3}{4}[4,6]$$

$$= \underline{\frac{3}{4}[-4,8]}$$

$\overrightarrow{BC} = \left[-7+3, -(-2)+6\right] = \underline{[-4,8]}$

Dette viser at $\overrightarrow{DE} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

<u>De to vektorene er da parallelle.</u>

c) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}\left[-7+t, -(-2)+0\right] + \frac{3}{4}\left[-t+3, -0+6\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[-4, 8\right]$$

$$= \underline{\left[-3, 6\right]}$$

Parameteren t "faller bort".

$\overrightarrow{DE}$ har samme lengde for alle verdier av t.

d) $\angle A = 90°$ når $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} = \left[-t+7, -0+(-2)\right] = \underline{\left[-t+7, -2\right]}$$

$$\overrightarrow{AC} = \left[-t+3, -0+6\right] = \underline{\left[-t+3, 6\right]}$$

Jeg finner skalarproduktet mellom vektorene:

$$\begin{aligned}[-t+7, -2]\cdot[-t+3, 6] &= (-t+7)\cdot(-t+3) - 12 \\ &= t^2 - 7t - 3t + 21 - 12 \\ &= \underline{t^2 - 10t + 9}\end{aligned}$$

Så løser jeg en likningen $t^2 - 10t - 12 = 0$ for å finne hvilken verdi for t som er slik at $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Jeg bruker kalkulatoren og velger EQUA, POLY, GRAD 2, $a = 1$, $b = -10$ og $c = 9$.
Jeg får løsningene $t = \underline{1}$ og $t = \underline{9}$.

$\angle A = 90°$ når $t = 1$ og $t = 9$.

e) ΔABC er også rettvinklet dersom $\angle B = 90°$ eller $\angle C = 90°$.

Jeg har tidligere funnet at :

$\overrightarrow{AB} = [-t+7, -2]$

$\overrightarrow{BC} = [-4, 8]$

Jeg finner skalarproduktet mellom vektorene:

$$\begin{aligned}[-t+7,-2]\cdot[-4,8] &= (-t+7)\cdot(-4)-16\\ &= 4t-28-16\\ &= \underline{4t-44}\end{aligned}$$

Så løser jeg likningen $4t-44=0$ for å finne hvilken verdi for t som er slik at $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$$\begin{aligned}4t-44&=0\\ 4t&=44\\ t&=\underline{11}\end{aligned}$$

$\underline{\angle B = 90° \text{ når } t = 11.}$

Jeg har tidligere funnet at:

$\overrightarrow{AC} = [-t+3, 6]$

$\overrightarrow{BC} = [-4, 8]$

Jeg finner skalarproduktet mellom vektorene:

$$\begin{aligned}[-t+3,6]\cdot[-4,8] &= (-t+3)\cdot(-4)+48\\ &= 4t-12+48\\ &= \underline{4t+36}\end{aligned}$$

Så løser jeg likningen $4t+36=0$ for å finne hvilken verdi for t som er slik at $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

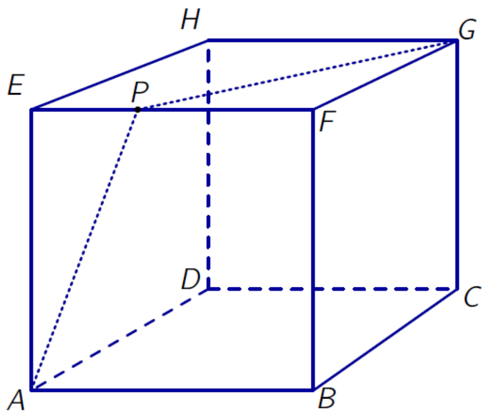
$$\begin{aligned}4t+36&=0\\ 4t&=-36\\ t&=\underline{-9}\end{aligned}$$

$\underline{\angle C = 90° \text{ når } t = -9.}$

$\underline{\underline{\Delta ABC \text{ er rettvinklet når } t = 11 \text{ og } t = -9.}}$

Oppgave 6

Alternativ I



a) Jeg bruker først Pytagoras' setning på ΔABC for å finne lengden av AC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$AC = \underline{\sqrt{8}}$$

Så bruker jeg Pytagoras' setning på ΔACG for å finne lengden av AG:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + 2^2 = 12$$

$$AG = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

b) Jeg bruker Pytagoras' setning på ΔAEP for å finne lengden av AP:

$$AP^2 = AE^2 + EP^2$$

$$AP^2 = 2^2 + (2-x)^2 \ .$$

$$AP = \underline{\sqrt{2^2 + (2-x)^2}}$$

Så bruker jeg Pytagoras' setning på ΔPFG for å finne lengden av PG:

$$PG^2 = PF^2 + FG^2$$

$$PG^2 = x^2 + 2^2$$

$$PG = \underline{\sqrt{x^2 + 2^2}}$$

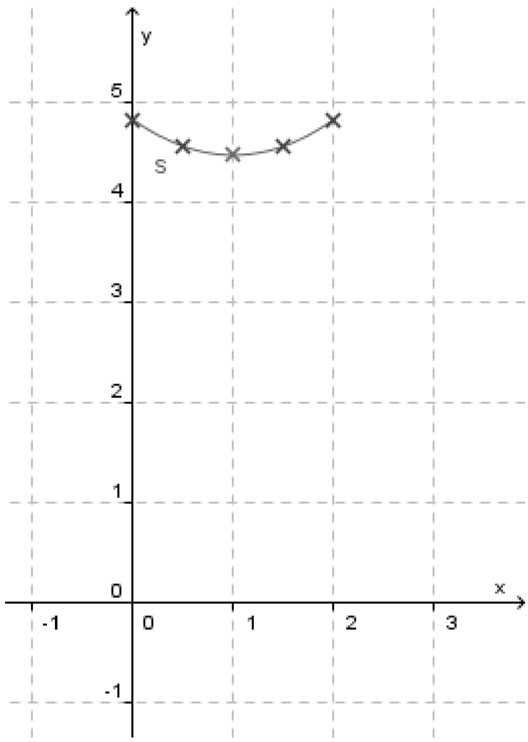
Hele strekningen mauren tilbakelegger er derfor:

$$s(x) = AP + PG = \underline{\sqrt{2^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + 2^2}}$$

c) Jeg bruker kalkulatoren og tegner grafen til s for $x \in \langle 0,2 \rangle$ for å finne den korteste strekningen mauren kan gå for å komme fra A til G.

Jeg tegnet først grafen på kalkulatoren for å se hvordan den så ut (GRAPH, la inn funksjonsuttrykket, DRAW), så brukte jeg TABLE for å finne koordinatene til ulike punkter på grafen, slik at jeg kunne lage en nøyaktig tegning på papir.

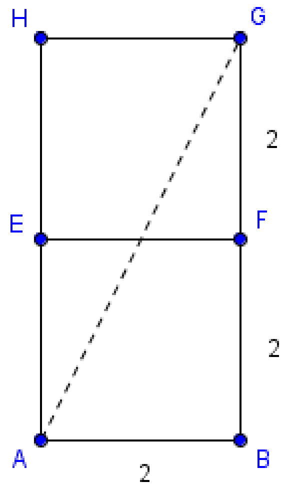
For å finne bunnpunktet brukte jeg G-SOLV og MIN.



Grafen har et bunnpunkt i $\left(1,\ 4{,}47\right)$.

<u>Den korteste strekningen er 4,47.</u> (Da er punket P plassert midt på EF.)

d)



Dersom mauren går den korteste veien, som er langs en rett linje, vil den gå langs linjestykket AG på figuren ovenfor. Jeg bruker Pytagoras' setning på ΔABG og finner AG:

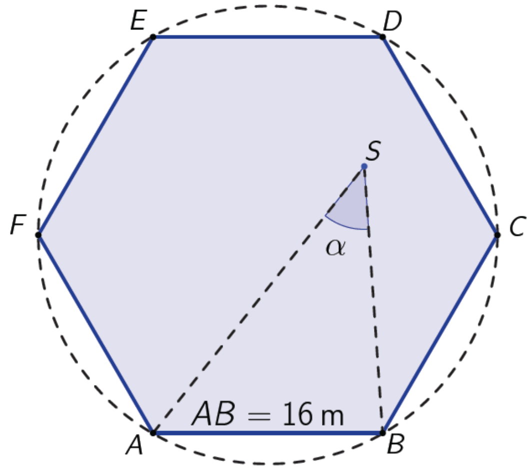
$$AG^2 = AB^2 + BG^2$$

$$AP^2 = 2^2 + 4^2$$

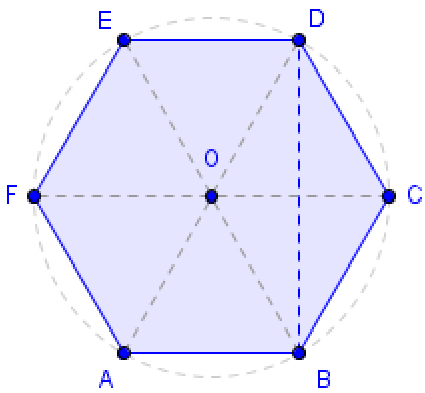
$$AP = \underline{\sqrt{20}\,(\approx 4,47)}$$

Oppgave 6

Alternativ II



a)



Jeg ser at jeg kan dele den regulære sekskanten i seks likesidede trekanter. Vinklene i en likesidet trekant er $60°$.

ΔBDO er likebeint og $\angle OBD = \angle ODB = \dfrac{180° - \angle BOD}{2} = \dfrac{180° - 2 \cdot 60°}{2} = \underline{30°}$.

ΔABC er da rettvinklet og jeg kan bruke Pythagoras' setning for å finne lengden av BD:

$$BD^2 = AD^2 - AB^2$$

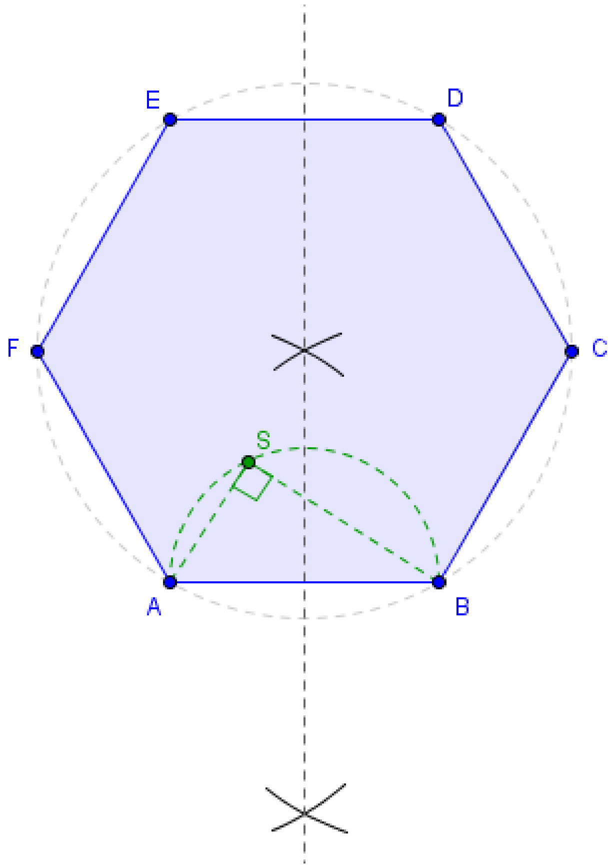
$$BD^2 = (2 \cdot 16)^2 - 16^2$$

$$BD^2 = 3 \cdot 16^2$$

$$BD = \underline{\underline{4\sqrt{3}}}$$

b) Når setet er plassert i hjørnene C, D, E eller F, vil α være en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue som sentralvinkelen $\angle AOB$, der O er sentrum i sirkelen. En periferivinkel er halvparten så stor som en sentralvinkel som spenne over samme sirkelbue. $\angle AOB = 60°$ og $\alpha = \frac{60°}{2} = \underline{\underline{30°}}$.

c) Hvis $\alpha = 90°$, vil setene i følge Thales setning ligge på sirkellinjen til en halvsirkel med diameter AB.

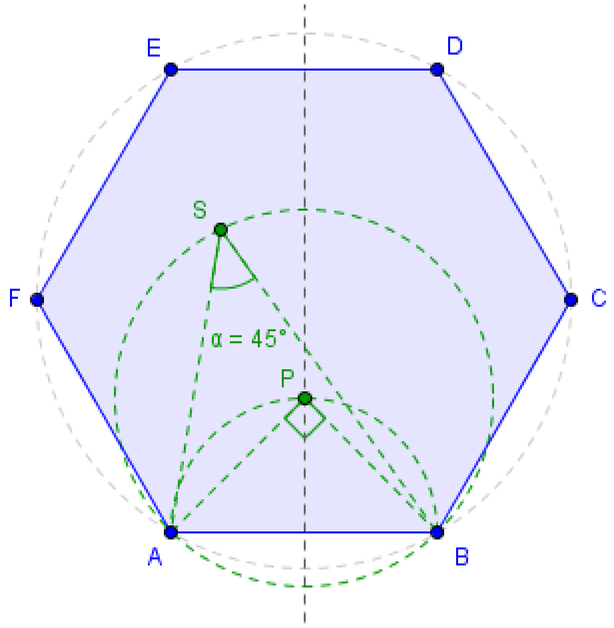


Konstruksjonsforklaring:

- Jeg konstruerer midtnormalen til AB.
- Jeg slår en halvsirkel med sentrum i midtpunktet på AB.

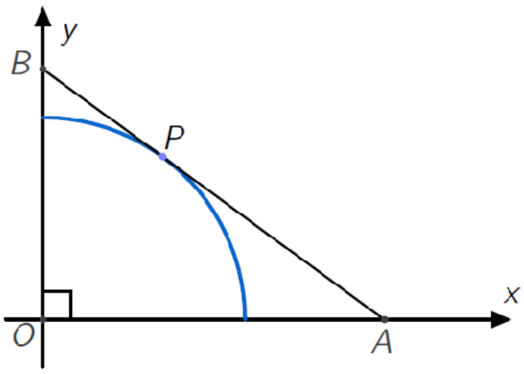
De beste setene er plasser på denne sirkellinjen.

d)



Midtnormalen på AB skjærer halvsirkelen fra c) i punktet P.
Jeg tegner en sirkel gjennom A og B, med sentrum i P.
I følge Thales setning er $\angle APB = 90°$. $\angle APB$ er en sentralvinkel i sirkelen gjennom A og B med sentrum i P. Hvis S ligger på sirklelinjen slik at α bli en periferivinkel som spenner over samme bue som $\angle APB$, vil $\alpha = \frac{90°}{2} = \underline{45°}$

Oppgave 7



a) I punktet A er $y=0$.
I punktet B er $x=0$.

Jeg løser likningen $y=0$:

$$y=0$$

$$\frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}\cdot x+\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}=0$$

$$x=\frac{-\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}}{\frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}}$$

$$x=\underline{\frac{9}{a}}$$

Punktet A har koordinatene $\underline{\underline{\left(\frac{9}{a},0\right)}}$.

Jeg setter $x=0$ inn i likningen for tangenten og får:

$$y=\frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}\cdot 0+\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}=\underline{\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}}.$$

Punktet B har koordinatene $\underline{\underline{\left(0,\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}\right)}}$.

b) Arealet av trekanten er:

$$F(a) = \frac{OA \cdot OB}{2}$$

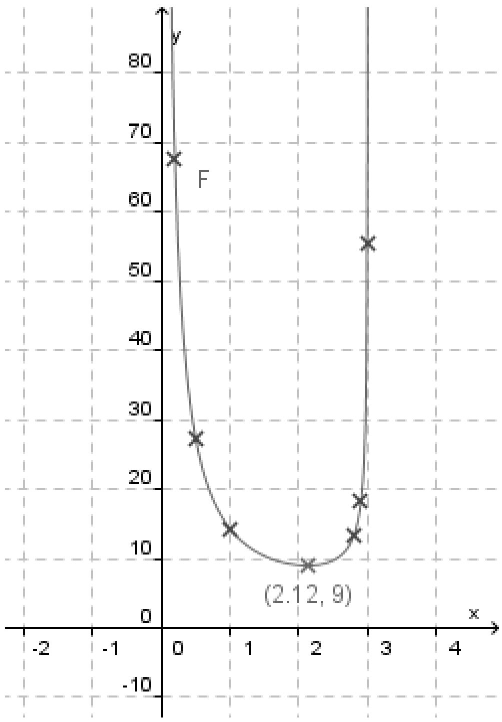
$$= \frac{\frac{9}{a} \cdot \frac{9}{\sqrt{9-a^2}}}{2}$$

$$= \frac{81}{2a\sqrt{9-a^2}}$$

$$= \underline{\frac{81}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}}$$

c) Jeg tegnet først grafen på kalkulatoren for å se hvordan den så ut (GRAPH, la inn funksjonsuttrykket, DRAW), så brukte jeg TABLE for å finne koordinatene til ulike punkter på grafen, slik at jeg kunne lage en nøyaktig tegning på papir.

For å finne bunnpunktet brukte jeg G-SOLV og MIN.



Grafen til F har et bunnpunkt i $(2{,}12,\ 9)$.

Det minste arealet ΔOAB kan ha er $\underline{\underline{9}}$.

Den tilhørende verdien av a er $\underline{\underline{2{,}12}}$.

d) $$F(a)=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}=\underline{\frac{81}{2}\left(9a^2-a^4\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$F'(a)=\frac{81}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(9a^2-a^4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(18a-4a^3\right)$$

$$=-\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{\left(9a^2-a^4\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(18a-4a^3\right)$$

$$=-\frac{81}{4}\cdot\frac{18a-4a^3}{\left(\sqrt{9a^2-a^4}\right)^3}$$

$$=-\frac{81}{4}\cdot\frac{18a-4a^3}{\left(\sqrt{9a^2-a^4}\right)^3}$$

$$=-\frac{81}{4}\cdot\frac{18a-4a^3}{a^3\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3}$$

$$=-\frac{81}{4}\cdot\frac{18-4a^2}{a^2\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3}$$

$$=\frac{81\left(4a^2-18\right)}{4a^2\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3}$$

$$=\underline{\underline{\frac{81\left(2a^2-9\right)}{2a^2\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3}}}$$

Jeg løser likningen $F'(a)=0$:

$$F'(a)=0$$

$$\frac{81\left(2a^2-9\right)}{2a^2\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3}=0$$

$$2a^2-9=0$$

$$a^2=\underline{\frac{9}{2}}$$

Siden kvartsirkelen ligger i første kvadrant er $a>0$.

$$a=\frac{3}{\sqrt{2}}=\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

Av grafen i c) ser jeg at dette er et bunnpunkt.

Arealet av trekanten er minst mulig når $a=\underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}$.

Del 2 – Alle hjelpemidler

Et eksempel på hvordan oppgavene i Del 2 kan løses ved hjelp av ulike digitale verktøy.

Dynamisk geometriprogram: GeoGebra
CAS: wxMaxima

Løsningen av Del 2 har her et digitalt format for lesbarhetens skyld. Elevene kan levere Del 2 som IKT-basert eksamen eller på papir (som utskrift fra et digitalt verktøy eller som håndskrevet besvarelse).

Oppgave 3

a) Jeg bruker CAS, definerer $f(x)$ og finner $f'(x)$:

```
f(x):=4x^2*%e^(-x);
```

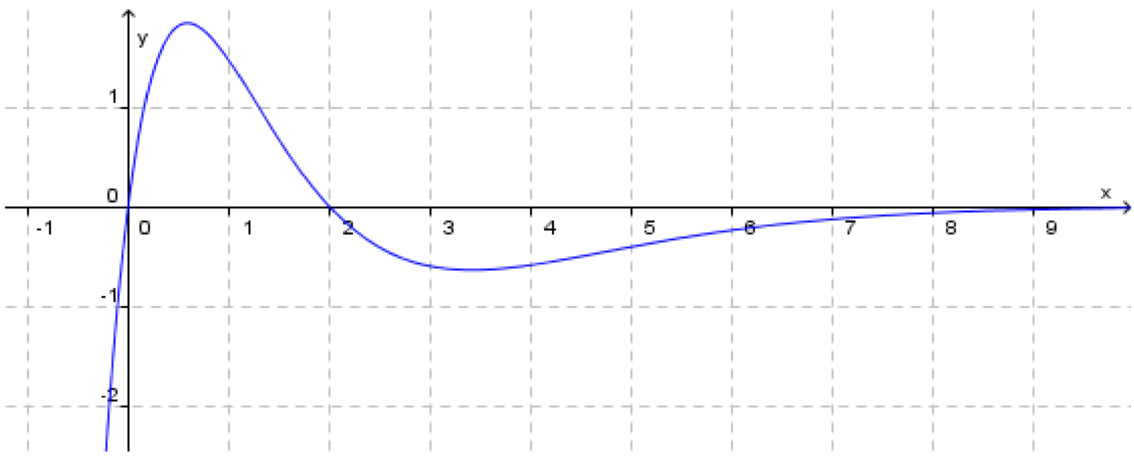
$f(x):=4\,x^2\,\%e^{-x}$

```
diff(f(x), x);
```

$8\,x\,\%e^{-x}-4\,x^2\,\%e^{-x}$

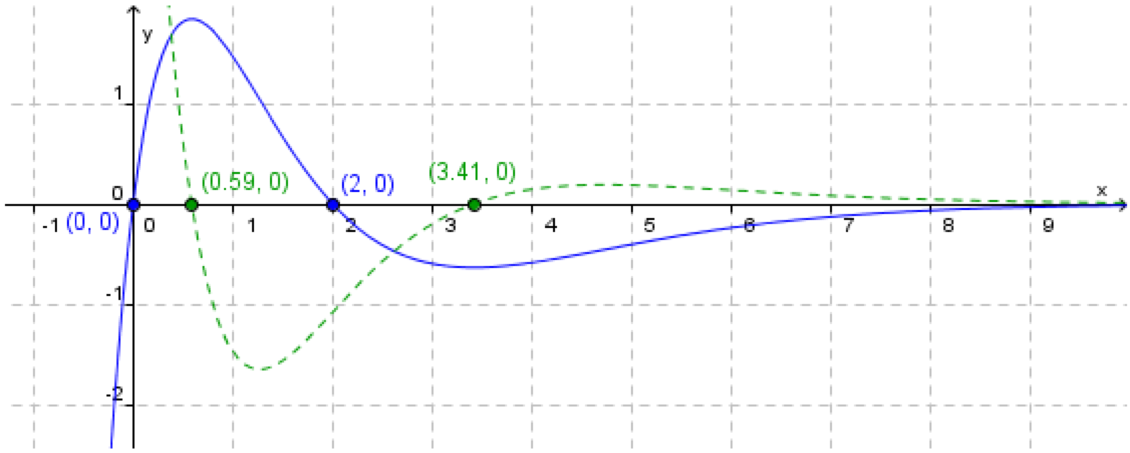
$f'(x)=\underline{\underline{8x\cdot e^{-x}-4x^2\cdot e^{-x}}}$

Jeg bruker GeoGebra, skriver inn uttrykket for den deriverte og tegner grafen til f':



b) For å finne eventuelle topp -, bunn - og vendepunkter på grafen til f, finner jeg topp -, bunn – og nullpunkter på grafen til f'.

Jeg finner nullpunktene ved å bruke kommandoen ”Skjæring mellom to objekter”.



Jeg ser av grafen at den deriverte er negativ for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, positiv for $x \in \langle 0, 2 \rangle$ og negativ for $x \in \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Det betyr at grafen til f avtar for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, har et bunnpunkt for $x = 0$, vokser for $x \in \langle 0, 2 \rangle$, har et toppunkt for $x = 2$ og avtar igjen for $x \in \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Jeg regner og finner at $f(0) = \underline{0}$ og $f(2) = 16e^{-2} \approx \underline{2{,}17}$.
(Se nedenfor.)

```
f(0);
0

f(2);
16 %e^-2
2.16536
```

Grafen til f har da et bunnpunkt i $(0, 0)$ og et toppunkt i $(2,\ 2{,}17)$.

For å finne nøyaktig når grafen til f' har et toppunkt og et bunnpunkt, har jeg tegnet grafen til f'', og funnet nullpunktene. (Se grønn stiplet graf i koordinatsystemet ovenfor.) Jeg finner disse nullpunktene ved å bruke kommandoen "Skjæring mellom to objekter".

Grafen til f' har et toppunkt for $x \approx 0{,}59$ og et bunnpunkt for $x \approx 3{,}41$. Grafen til f vokser da raskest og har et vendepunkt for $x \approx 0{,}59$ og avtar raskest og har et vendepunkt for $x \approx 3{,}41$.

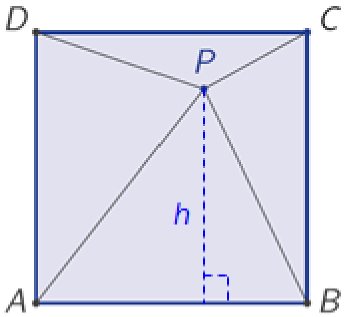
Jeg regner og finner at $f(0{,}59) \approx \underline{0{,}77}$ og $f(3{,}41) \approx \underline{1{,}54}$.
(Se nedenfor.)

```
f(0.59);
0.7718

f(3.41);
1.53683
```

Grafen til f har da vendepunkter i $(0{,}59,\ 0{,}77)$ og $(3{,}41,\ 1{,}54)$.

Oppgave 4



$AB = BC = CD = AD = a$

a) Arealet av $\Delta ABP = \underline{\underline{\frac{1}{2}ah}}$.

Høyden i ΔPCD er $a-h$. Jeg får derfor at arealet av $\Delta PCD = \underline{\underline{\frac{1}{2}a(a-h)}}$.

b) $\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a(a-h) = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ah = \underline{\underline{\frac{1}{2}a^2}}$

Arealet av de to trekantene er halvparten av arealet av kvadratet *ABCD*.

Oppgave 5

a) $\overrightarrow{AB} = \left[-(-1)+7, -0+(-2)\right] = \underline{\underline{[8,-2]}}$

$\overrightarrow{AC} = \left[-(-1)+3, -0+6\right] = \underline{\underline{[4,6]}}$

For å finne vinkelen mellom vektorene kan jeg bruke skalarproduktet

Jeg bruker CAS og finner skalarproduktet og lengden av vektorene.

Skalarproduktet:

```
[8,-2].[4,6];
```

20

Lengden av vektorene:

```
sqrt([8,-2].[8,-2]);
```

$2\sqrt{17}$

```
sqrt([4,6].[4,6]);
```

$2\sqrt{13}$

Jeg får da:

$$\cos A = \frac{[8,-2]\cdot[4,6]}{\left|[8,-2]\right|\cdot\left|[4,6]\right|}$$

$$= \frac{20}{2\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{13}}$$

$$\approx \underline{0,3363}$$

$$\angle A \approx \cos^{-1}(0,3363) \approx \underline{\underline{70,3^\circ}}$$

b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}[-8,2] + \frac{3}{4}[4,6]$$

$$= \underline{\frac{3}{4}[-4,8]}$$

$$\overrightarrow{BC} = [-7+3, -(-2)+6] = \underline{[-4,8]}$$

Dette viser at $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

<u>De to vektorene er da parallelle.</u>

c) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}[-7+t, -(-2)+0] + \frac{3}{4}[-t+3, -0+6]$$

$$= \frac{3}{4}[-4,8]$$

$$= \underline{[-3,6]}$$

Parameteren t "faller bort".

$\overrightarrow{DE}$ <u>har samme lengde for alle verdier av t.</u>

d) $\angle A = 90^\circ$ når $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} = \left[-t+7, -0+(-2)\right] = \underline{\left[-t+7, -2\right]}$$
$$\overrightarrow{AC} = \left[-t+3, -0+6\right] = \underline{\left[-t+3, 6\right]}$$

Jeg bruker et CAS og finner skalarproduktet mellom vektorene:

```
[-t+7,-2].[-t+3,6];
```

$(3-t)(7-t)-12$

Jeg løser så likningen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3-t)(7-t) - 12 = 0$.

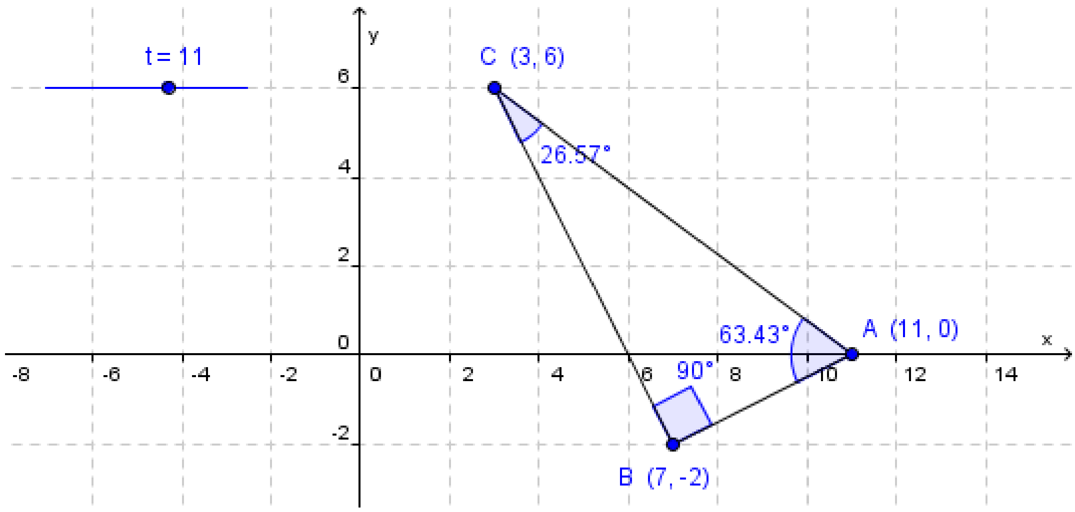
```
wx_compute_wrt((3-t)*(7-t)-12=0, t);
```

$[t=1, t=9]$

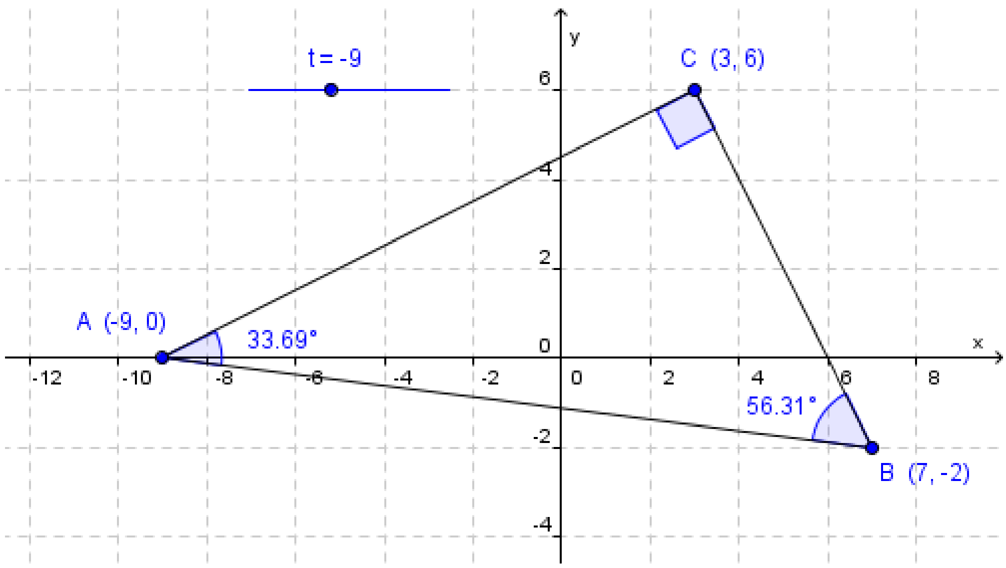
$\underline{\underline{\angle A = 90^\circ \text{ når } t = 1 \text{ og } t = 9.}}$

e) Jeg bruker dynamisk geometriprogram (GeoGebra) og tegner ΔABC i et koordinatsystem.
Jeg lar punktet A ha koordinatene $(t, 0)$ og lager en skyvekontroll slik at jeg kan endre verdien av t.

Jeg ser at når $t = 11$, er $\angle B = 90°$ og ΔABC er rettvinklet.
(Se nedenfor.)



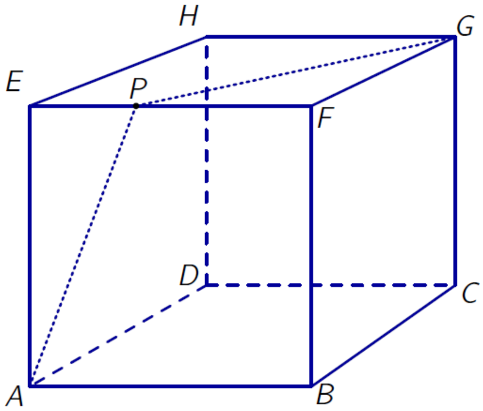
Jeg ser at når $t = -9$, er $\angle C = 90°$ og ΔABC er rettvinklet.
(Se nedenfor.)



$\underline{\underline{\Delta ABC \text{ er rettvinklet når } t = 11 \text{ og } t = -9.}}$

Oppgave 6

Alternativ I



a) Jeg bruker først Pytagoras' setning på ΔABC for å finne lengden av AC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$AC = \underline{\sqrt{8}}$$

Så bruker jeg Pytagoras' setning på ΔACG for å finne lengden av AG:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + 2^2 = 12$$

$$AG = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

b) Jeg bruker Pytagoras' setning på ΔAEP for å finne lengden av AP:

$$AP^2 = AE^2 + EP^2$$

$$AP^2 = 2^2 + (2-x)^2 \ .$$

$$AP = \underline{\sqrt{2^2 + (2-x)^2}}$$

Så bruker jeg Pytagoras' setning på ΔPFG for å finne lengden av PG:

$$PG^2 = PF^2 + FG^2$$

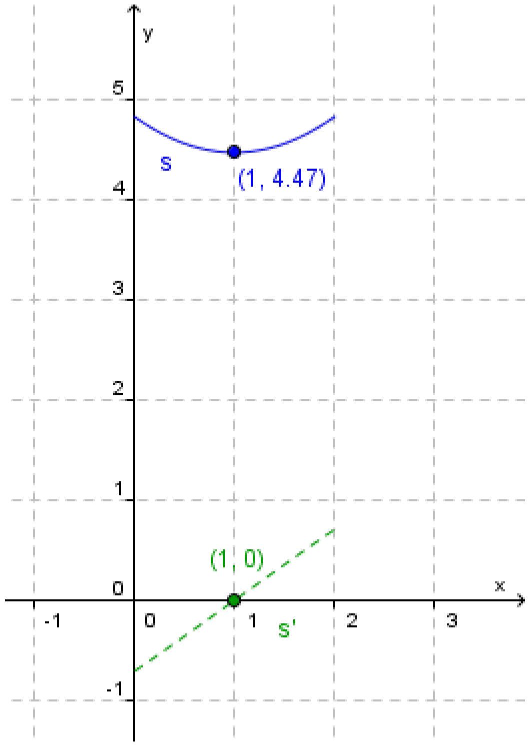
$$PG^2 = x^2 + 2^2$$

$$PG = \underline{\sqrt{x^2 + 2^2}}$$

Hele strekningen mauren tilbakelegger er derfor:

$$s(x) = AP + PG = \underline{\sqrt{2^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + 2^2}}$$

c) For å finne den korteste strekningen mauren kan gå for å komme fra A til G, tegner jeg grafen til s for $x \in \langle 0,2 \rangle$ i GeoGebra ved å bruke kommandoen "Funksjon[Funksjonsuttrykk, Startverdi for x, Sluttverdi for x]"

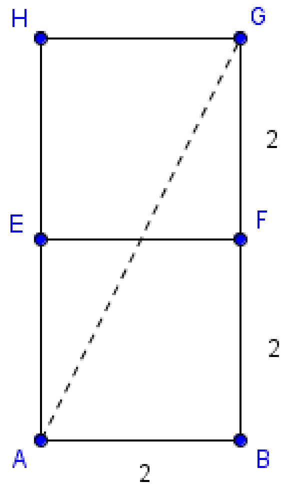


Grafen har et bunnpunkt i $(1, 4{,}47)$.

Den korteste strekningen er 4,47. (Da er punket P plassert midt på EF.)

For å finne bunnpunktet på grafen nøyaktig, tegnet jeg grafen til den deriverte i samme koordinatsystem (se grønn stiplet graf), og fant så nullpunktet til den deriverte.

d)



Dersom mauren går den korteste veien, som er langs en rett linje, vil den gå langs linjestykket AG på figuren ovenfor. Jeg bruker Pytagoras' setning på ΔABG og finner AG:

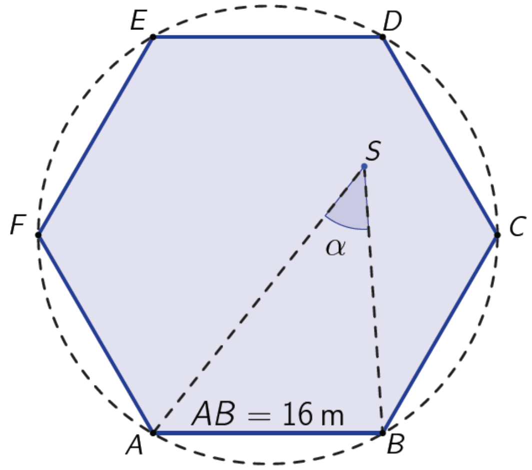
$$AG^2 = AB^2 + BG^2$$

$$AP^2 = 2^2 + 4^2$$

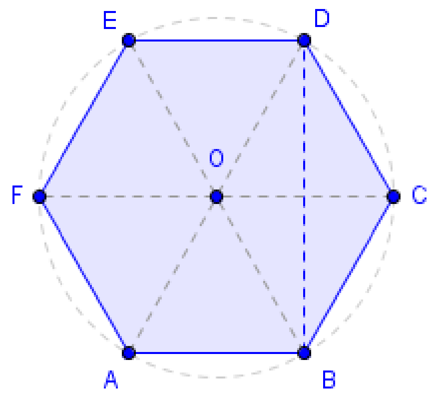
$$AP = \underline{\sqrt{20}\,(\approx 4{,}47)}$$

Oppgave 6

Alternativ II



a)



Jeg ser at jeg kan dele den regulære sekskanten i seks likesidede trekanter.
Vinklene i en likesidet trekant er $60°$.

ΔBDO er likebeint og $\angle OBD = \angle ODB = \dfrac{180° - \angle BOD}{2} = \dfrac{180° - 2 \cdot 60°}{2} = \underline{30°}$.

ΔABC er da rettvinklet og jeg kan bruke Pythagoras' setning for å finne lengden av BD:

$$BD^2 = AD^2 - AB^2$$

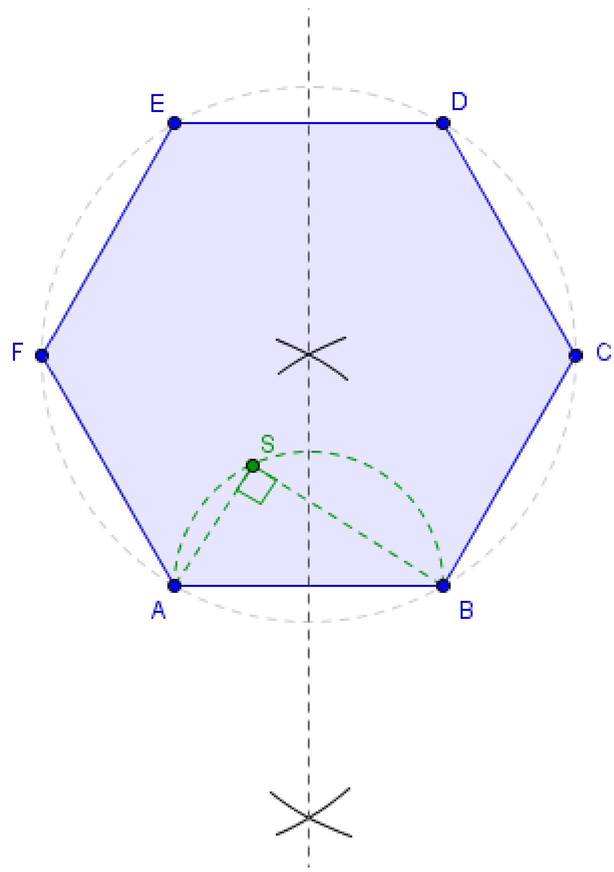
$$BD^2 = (2 \cdot 16)^2 - 16^2$$

$$BD^2 = 3 \cdot 16^2$$

$$BD = \underline{\underline{4\sqrt{3}}}$$

b) Når setet er plassert i hjørnene C, D, E eller F, vil α være en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue som sentralvinkelen $\angle AOB$, der O er sentrum i sirkelen. En periferivinkel er halvparten så stor som en sentralvinkel som spenne over samme sirkelbue. $\angle AOB = 60^\circ$ og $\alpha = \dfrac{60^\circ}{2} = \underline{30^\circ}$.

c) Hvis $\alpha = 90^\circ$, vil setene i følge Thales setning ligge på sirkellinjen til en halvsirkel med diameter AB.

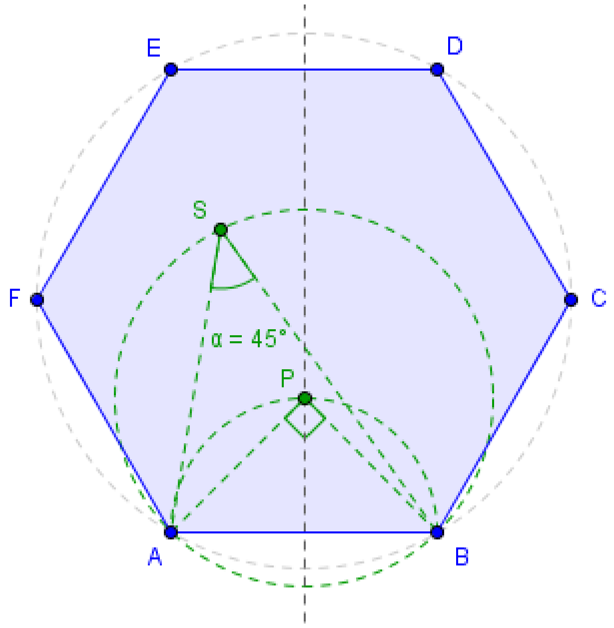


Konstruksjonsforklaring:

- Jeg konstruerer midtnormalen til AB.
- Jeg slår en halvsirkel med sentrum i midtpunktet på AB.

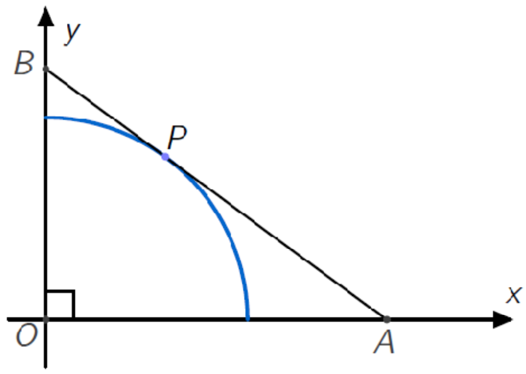
De beste setene er plasser på denne sirkellinjen.

d)



Midtnormalen på AB skjærer halvsirkelen fra c) i punktet P.
Jeg tegner en sirkel gjennom A og B, med sentrum i P.
I følge Thales setning er $\angle APB = 90°$. $\angle APB$ er en sentralvinkel i sirkelen gjennom A og B med sentrum i P. Hvis S ligger på sirklelinjen slik at α bli en periferivinkel som spenner over samme bue som $\angle APB$, vil $\alpha = \dfrac{90°}{2} = \underline{\underline{45°}}$

Oppgave 7



a) I punktet A er $y = 0$.
I punktet B er $x = 0$.

Jeg definerer $y(x)$ i CAS:

```
y(x):=-a/sqrt(9-a^2)*x+9/sqrt(9-a^2);
```

$$y(x) := \frac{-a}{\sqrt{9-a^2}}x + \frac{9}{\sqrt{9-a^2}}$$

Jeg løser likningen $y(x) = 0$:

```
wx_compute_wrt(y(x)=0, x);
```

$$[x = \frac{9}{a}]$$

Punktet A har koordinatene $\underline{\underline{\left(\frac{9}{a}, 0\right)}}$.

Jeg regner ut $y(0)$ og får:

```
y(0);
```

$$\frac{9}{\sqrt{9-a^2}}$$

Punktet B har koordinatene $\underline{\underline{\left(0, \frac{9}{\sqrt{9-a^2}}\right)}}$.

b) Arealet av trekanten er

$$F(a) = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{\frac{9}{a} \cdot y(0)}{2}$$

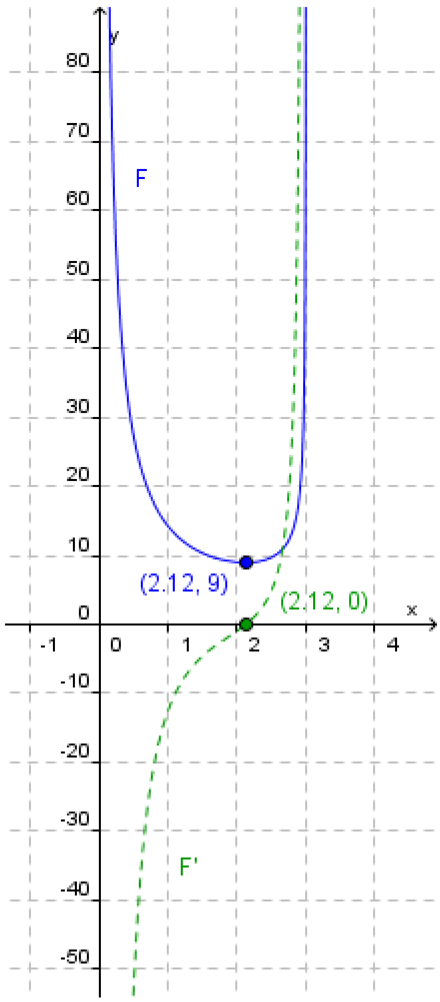
Jeg bruker CAS og får:

```
9/a*y(0)/2;
```

$$\frac{81}{2\,a\sqrt{9-a^2}}$$

$$F(a) = \frac{81}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{9-a^2}}$$

c) Jeg skriver inn funksjonsuttrykket og tegner grafen til F med Geogebra:



Grafen til F er tegnet med blått i koordinatsystemet ovenfor. For å finne bunnpunktet helt nøyaktig, har jeg også tegnet grafen til F' (grønn stiplet graf) og funnet nullpunktet til den deriverte.

Grafen til F har et bunnpunkt i $(2{,}12,\ 9)$.

Det minste arealet ΔOAB kan ha er $\underline{\underline{9}}$.

Den tilhørende verdien av a er $\underline{\underline{2{,}12}}$.

d) Jeg definerer $F(a)$ i CAS, finner $F'(a)$ og løser likningen $F'(a)=0$.

```
F(a):=81/2*1/(a*sqrt(9-a^2));
```

$$F(a):=\frac{\frac{81}{2}1}{a\sqrt{9-a^2}}$$

```
diff(F(a), a);
```

$$\frac{81}{2\left(9-a^2\right)^{3/2}}-\frac{81}{2\,a^2\sqrt{9-a^2}}$$

$$F'(a)=\underline{\underline{\frac{81}{2\sqrt{\left(9-a^2\right)^3}}-\frac{81}{2a^2\sqrt{9-a^2}}}}$$

```
wx_compute_wrt(diff(F(a), a)=0, a);
```

$$[\,a=-\frac{3}{\sqrt{2}},\ a=\frac{3}{\sqrt{2}}\,]$$

Siden kvartsirkelen ligger i første kvadrant er $a>0$.

Jeg har da at $F'(a)=0$ for $a=\frac{3}{\sqrt{2}}=\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$.

Av grafen i c) ser jeg at dette er et bunnpunkt.

Arealet av trekanten er minst mulig når $a=\underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}$.